高等学校教材

微分几何一百例

姜国英　黄宣国　编

高等教育出版社

高等学校教材

微分几何一百例

姜国英　黄宣国　编

高等教育出版社·北京

内容提要

本书是作者多年教授微分几何课教学经验之积累所成。 内容为分属于四章的一百个例题。 这些例题基本覆盖了大学数学系微分几何教材中重要内容，还涉及一些难度较高的著名微分几何定理的证明。 本书叙述细致、由浅入深，具有启发性，可使读者加深对微分几何基本概念的理解，提高解题能力。

本书可供数学专业、应用数学专业的大学生，教师及其他有兴趣的读者参考。

本书于 1992 年出版，恰逢高等教育出版社建社 60 周年，甲午重印，以飨读者。

图书在版编目(CIP)数据

微分几何一百例/姜国英，黄宣国编．— 北京：高等教育出版社，2014.8

ISBN 978－7－04－040122－6

Ⅰ. ①微… Ⅱ. ①姜… ②黄… Ⅲ. ①微分几何－高等学校－教材 Ⅳ. ①O186.1

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2014)第 128765 号

策划编辑 田 玲 责任编辑 田 玲 封面设计 杨立新 版式设计 于 婕
插图绘制 郝 林 责任校对 刘 莉 责任印制 毛斯璐

出版发行	高等教育出版社	咨询电话	400－810－0598
社 址	北京市西城区德外大街 4 号	网 址	http://www.hep.edu.cn
邮政编码	100120		http://www.hep.com.cn
印 刷	北京中科印刷有限公司	网上订购	http://www.landraco.com
开 本	850mm × 1168mm 1/32		http://www.landraco.com.cn
印 张	6.25	版 次	2014年8月第1版
字 数	160 千字	印 次	2014年8月第1次印刷
购书热线	010－58581118	定 价	13.80 元

物 料 号 40122－00

出版说明

1954 年 5 月，高等教育出版社正式成立。60 年来，在教育部领导的关怀下，在数学教育工作者的支持下，高教社出版了众多数学教材，可谓群贤毕至，精品迭出，伴随着青年学子们度过了难忘的大学时光。

由于各种原因，部分优秀教材没有机会再版或重印。这其中有我国第一部高等数学教学大纲的制定者朱公谨先生编写的《高等数学（初稿）》；教材编审委员会主任赵访熊先生主编的《高等数学》；西安交通大学陆庆乐先生主编的《高等数学（基础部分）》；清华大学程紫明主编的《高等数学（基础部分）》；还有项武义先生的《微积分大意》，谷超豪、李大潜、沈玮熙的《应用偏微分方程》，吴大任先生的《微分几何讲义》（修订版），北京大学的《数学分析》及其习题集……这些教材，不仅是数学专家、广大数学教师的教学经验的积累，也是历届数学教材编审委员会的集体智慧的结晶，更是各个时期数学教学改革的成果代表，它们呈现了数学教材建设的真实历史，深深影响了几代人。

虽然这些教材出版时间较早，但从数学学科的发展和教学改革的趋势来看，它们对现在的数学课程教学仍然有一定的借鉴意义。为了使广大读者能够对比各时期高校数学教学要求、教学内容体系的变迁，更好地传承数学的教学思想、教学方法，促进当前数学教学改革，提高教学质量，我们遴选了 60 年来具有代表性的经典数学教材进行重新印刷。

这套教材的重版，牵动各方专家的关注，凝结了很多前辈的厚

爱和支持。在联系原作著作权人的过程中,西安交通大学马知恩教授、上海交通大学乐经良教授、清华大学盛祥耀教授都给予了我们帮助。已故作者的子女也积极地配合我们工作。高等教育出版社的郭思旭编审从选题到提供样书给予了很大帮助,胡乃冏、徐刚编审提供了部分资料和样书,王雎老师为这套书的封面从选纸到配色做了精美的设计,使得这套教材不仅保持了原有的风貌,更融入了现代元素。

在本套教材的重版编辑过程中,我们克服了重重困难,本着古建筑修复中"整旧如旧"的原则,尽管这套书中提及的有些算法已经不再用了,我们仍然保留了这些部分,以求保持经典教材的原汁原味,仅做了规范方面的微小改动。重温经典,不仅让老专家、老前辈们抚今追昔,也让我们倍感自豪和使命感,我们还会进一步增加重版的品种,奉献给读者更多优秀教材。

由于本套教材的重版在较短时间内完成,虽竭尽全力,疏漏之处在所难免,恳请各位专家和广大读者批评指正。

高等教育出版社

2014年4月

前　言

微分几何是现代数学的一个重要分支。编者执教数学系微分几何课程十年,积累了一些微分几何习题。高等教育出版社约复旦大学数学研究所微分几何研究室编一本微分几何习题集,我们在导师胡和生教授的鼓励下,合作编写了这本习题集。

收入这本习题集中的微分几何习题有一百个。同种类型的习题一般只收入一二题。因此,虽然本书只有一百个题目,却基本上覆盖了大学数学系微分几何教材中重要的内容。另外,在本书中,编者也自编了少量习题。对于一些难度较高的著名的微分几何定理,本书也有涉及。

今年是导师苏步青教授九十寿辰,苏先生在微分几何领域辛勤耕耘六十余年,桃李满天下,为我国微分几何一代宗师,我们谨以此书献给苏先生,祝他健康长寿。

由于编者水平有限,书中恐有不妥之处,敬请同行指正。

编者

1991 年 6 月

反盗版举报电话　(010)58581897　58582371　58581879
反盗版举报传真　(010)82086060
反盗版举报邮箱　dd@ hep. com. cn
通信地址　北京市西城区德外大街 4 号　高等教育出版社法务部
邮政编码　100120

目　录

第一章

曲线的局部几何性质

§1 曲线的曲率、挠率与 Frenet 标架

Frenet 标架和 Frenet 公式不仅是局部曲线论中最基本的内容，而且是研究曲线性质和解决具体问题的强有力的工具. 因此，熟练掌握已知曲线的 Frenet 标架及其曲率与挠率的计算方法应是学习微分几何的读者必须具备的基本技能. 当空间曲线是用以弧长为参数的向量形式给出时，由定义不难求出它的 Frenet 标架以及曲率和挠率. 当曲线不是以弧长为参数给出时，如能求出弧长，以其作为新参数写出向量表示，那这仍然是前面的情形，不然的话计算就复杂多了. 下面介绍一些曲线不是用弧长作参数给出时的例子，以期读者从中能了解到一些其他的一般处理方法.

例 1 设空间正则挠曲线 C 的向量表示为 $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(t)$，$t$ 是一般参数. 求 C 的 Frenet 标架.

解 将 $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(t)$ 对弧长 s 求导，利用复合函数求导的链式法则，我们有

$$\boldsymbol{T}=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}s}, \tag{1}$$

再对 s 求导，

$$k\boldsymbol{N}=\frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t^2}\left(\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}s}\right)^2+\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}^2t}{\mathrm{d}s^2}.$$

将上面两式的两端分别作叉积,可以得到

$$k\boldsymbol{B}=\left(\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}\times\frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t^2}\right)\left(\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}s}\right)^3, \tag{2}$$

从而便有

$$k\boldsymbol{N}=k\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{T}=\left[\left(\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}\times\frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t^2}\right)\times\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}\right]\left(\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}s}\right)^4. \tag{3}$$

注意到

$$\left|\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}s}\right|=\frac{1}{\left|\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}\right|},$$

以及一般参数下曲率 k 的计算公式

$$k(t)=\frac{\left|\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}\times\frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t^2}\right|}{\left|\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}\right|^3}, \tag{4}$$

由(1)(2)(3)便得到要求的 Frenet 标架为

$$\boldsymbol{T}(t)=\operatorname{sign}\left(\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}s}\right)\cdot\frac{\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}}{\left|\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}\right|},$$

$$\boldsymbol{N}(t)=\frac{\left(\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}\times\frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t^2}\right)\times\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}}{\left|\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}\times\frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t^2}\right|\cdot\left|\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}\right|},$$

$$\boldsymbol{B}(t)=\operatorname{sign}\left(\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}s}\right)\frac{\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}\times\frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t^2}}{\left|\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}\times\frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t^2}\right|}.$$

解毕.

然而当曲线 C 的具体方程 $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(t)$ 已知时,尽管 t 不是弧长参数,有时并不一定要直接代例 1 中得到的公式去求它的 Frenet 标架,那样太烦,通常的做法是边计算,边利用有关的几何性质进行

化简、推理,比如,我们来看下面的例题.

例 2 已知曲线 $C:\boldsymbol{r}(t)=(4a\cos^3 t,4a\sin^3 t,3b\cos 2t)$, $0<t<\frac{\pi}{2}$, a 和 b 是正常数. 求 C 的曲率 k、挠率 τ 及 Frenet 标架.

解 一般总假定参数 t 增加的方向为曲线的正向,从而

$$\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}>0.$$

将 C 的向量表示关于弧长 s 求导,我们有

$$\begin{aligned}\boldsymbol{T}&=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}s}\\&=(-12a\cos^2 t\sin t,12a\sin^2 t\cos t,-6b\sin 2t)\cdot\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}s}\\&=6\sin 2t(-a\cos t,a\sin t,-b)\cdot\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}s}.\end{aligned}$$

利用 $|\boldsymbol{T}|=1$,得到

$$\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}s}=\frac{1}{6\sin 2t\sqrt{a^2+b^2}},\tag{1}$$

从而

$$\boldsymbol{T}(t)=\frac{(-a\cos t,a\sin t,-b)}{\sqrt{a^2+b^2}}.\tag{2}$$

将上式对弧长 s 求导,利用 Frenet 公式和已得的(1)式便有

$$\begin{aligned}k\boldsymbol{N}&=\frac{(a\sin t,a\cos t,0)}{\sqrt{a^2+b^2}}\cdot\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}s}\\&=\frac{a}{6(a^2+b^2)\sin 2t}(\sin t,\cos t,0).\end{aligned}$$

由此可得

$$k(t)=|k(t)\boldsymbol{N}(t)|=\frac{a}{6(a^2+b^2)\sin 2t},$$

且有

$$\boldsymbol{N}(t)=(\sin t,\cos t,0).\tag{3}$$

因此，

$$B(t) = T(t) \times N(t) = \frac{(b\cos t, -b\sin t, -a)}{\sqrt{a^2+b^2}}. \tag{4}$$

将上式再关于弧长 s 求导，并利用(1)，我们有

$$-\tau N = \frac{(-b\sin t, -b\cos t, 0)}{\sqrt{a^2+b^2}} \cdot \frac{dt}{ds}$$

$$= -\frac{b}{6(a^2+b^2)\sin 2t}(\sin t, \cos t, 0).$$

注意到(3)，比较上式左右两端，即得

$$\tau(t) = \frac{b}{6(a^2+b^2)\sin 2t}.$$

解毕.

在实际问题中，有不少曲线是以两个曲面交线的形式给出的，这时其曲率与挠率的计算方法可参考下面的例题.

例 3 设曲线 C 是如下两个二次曲面

$$\alpha x^2 + \beta y^2 + \gamma z^2 = 1, \quad \lambda x^2 + \mu y^2 + \nu z^2 = 1$$

的交线. 求曲线 C 的曲率 k 与挠率 τ.

解 为方便起见，如果记

$$F(x,y,z) = \alpha x^2 + \beta y^2 + \gamma z^2 - 1,$$

$$G(x,y,z) = \lambda x^2 + \mu y^2 + \nu z^2 - 1,$$

则沿两曲面的交线 C，下列的积向量

$$\nabla F \times \nabla G = 4((\beta\nu - \gamma\mu)yz, (\gamma\lambda - \alpha\nu)zx, (\alpha\mu - \beta\lambda)xy)$$

就应与 C 的切方向平行. 因此，若记常数

$$a = \beta\nu - \gamma\mu, \quad b = \gamma\lambda - \alpha\nu, \quad c = \alpha\mu - \beta\lambda,$$

便可设 C 的单位切向量 $T = (x', y', z')$ 满足

$$eT = \frac{1}{xyz}(ayz, bzx, cxy)$$

$$= \left(\frac{a}{x}, \frac{b}{y}, \frac{c}{z}\right), \tag{1}$$

式中的 e 满足

$$e^2 = \frac{a^2}{x^2} + \frac{b^2}{y^2} + \frac{c^2}{z^2}.$$

将(1)式的两边关于弧长 s 求导,注意到 $\boldsymbol{T}$ 的定义,可得

$$\begin{aligned} e'\boldsymbol{T} + ek\boldsymbol{N} &= \left(-\frac{a}{x^2}\cdot x', -\frac{b}{y^2}\cdot y', -\frac{c}{z^2}\cdot z'\right) \\ &= -\frac{1}{e}\left(\frac{a^2}{x^3}, \frac{b^2}{y^3}, \frac{c^2}{z^3}\right). \end{aligned} \tag{2}$$

如果将(1)(2)的两端分别作外积,我们有

$$e^3 k\boldsymbol{B} = -\left(\frac{bc^2}{yz^3} - \frac{b^2c}{y^3z}, \frac{ca^2}{zx^3} - \frac{c^2a}{z^3x}, \frac{ab^2}{xy^3} - \frac{a^2b}{x^3y}\right). \tag{3}$$

注意到 C 同时在两个二次曲面上,于是

$$\begin{aligned} \frac{bc^2}{yz^3} - \frac{b^2c}{y^3z} &= \frac{bc}{y^3z^3}(cy^2 - bz^2) \\ &= \frac{bc}{y^3z^3}[(\alpha\mu - \beta\lambda)y^2 - (\gamma\lambda - \alpha\nu)z^2] \\ &= \frac{bc}{y^3z^3}[\alpha(\mu y^2 + \nu z^2) - \lambda(\beta y^2 + \gamma z^2)] \\ &= \frac{bc}{y^3z^3}[\alpha(1 - \lambda x^2) - \lambda(1 - \alpha x^2)] \\ &= \frac{bc}{y^3z^3}(\alpha - \lambda), \end{aligned}$$

类似地可以得到

$$\frac{ca^2}{zx^3} - \frac{c^2a}{z^3x} = \frac{ca}{z^3x^3}(\beta - \mu),$$

$$\frac{ab^2}{xy^3} - \frac{a^2b}{x^3y} = \frac{ab}{x^3y^3}(\gamma - \nu).$$

因而(3)式便化为

$$-e^3k\boldsymbol{B} = \frac{abc}{x^3y^3z^3}\left(\frac{\alpha - \lambda}{a}x^3, \frac{\beta - \mu}{b}y^3, \frac{\gamma - \nu}{c}z^3\right).$$

为便于计算,我们把上式再改写为

$$-e^3k\frac{x^3y^3z^3}{abc}\boldsymbol{B}=\left(\frac{\alpha-\lambda}{a}x^3,\frac{\beta-\mu}{b}y^3,\frac{\gamma-\nu}{c}z^3\right). \tag{4}$$

将(4)的两边对弧长 s 求导,并利用(1),我们有

$$\begin{aligned}&-\left(e^3k\frac{x^3y^3z^3}{abc}\right)'\boldsymbol{B}+\tau e^3k\frac{x^3y^3z^3}{abc}\boldsymbol{N}\\&=3\left(\frac{\alpha-\lambda}{a}x^2x',\frac{\beta-\mu}{b}y^2y',\frac{\gamma-\nu}{c}z^2z'\right)\\&=\frac{3}{e}((\alpha-\lambda)x,(\beta-\mu)y,(\gamma-\nu)z).\end{aligned} \tag{5}$$

现在已能求出所要的曲率 k 与挠率 τ. 利用(4),注意到 e^2 的表达式,我们得到

$$k=\frac{\left|\frac{abc}{x^3y^3z^3}\right|\left[\left(\frac{\alpha-\lambda}{a}\right)^2x^6+\left(\frac{\beta-\mu}{b}\right)^2y^6+\left(\frac{\gamma-\nu}{c}\right)^2z^6\right]^{\frac{1}{2}}}{\left(\frac{a^2}{x^2}+\frac{b^2}{y^2}+\frac{c^2}{z^2}\right)^{\frac{3}{2}}}. \tag{6}$$

至于挠率 τ,如将(2)(5)的两端分别作内积,我们有

$$\tau e^4k^2\frac{x^3y^3z^3}{abc}=-\frac{3}{e^2}\left[\frac{a^2(\alpha-\lambda)}{x^2}+\frac{b^2(\beta-\mu)}{y^2}+\frac{c^2(\gamma-\nu)}{z^2}\right],$$

因此,

$$\tau=-3\cdot\frac{x^3y^3z^3}{abc}\cdot\frac{\frac{a^2(\alpha-\lambda)}{x^2}+\frac{b^2(\beta-\mu)}{y^2}+\frac{c^2(\gamma-\nu)}{z^2}}{\left(\frac{\alpha-\lambda}{a}\right)^2x^6+\left(\frac{\beta-\mu}{b}\right)^2y^6+\left(\frac{\gamma-\nu}{c}\right)^2z^6}. \tag{7}$$

自然,(6)(7)中的 x、y、z 应是交线 C 上所论点的坐标.

顺便提一句,这时利用(1)(4)和 $\boldsymbol{N}=\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{T}$ 已不难写出交线 C 的 Frenet 标架,这里就不赘述了. 解毕.

例 4 设 C 是空间正则挠曲线,试求它从法线的球面标线的曲率和挠率.

解 如果设 $C:\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(s)$,$s$ 为弧长,则其从法线的球面标线 C_1 就有表示 $\boldsymbol{r}_1=\boldsymbol{B}(s)$,这里的 s 是 C_1 的参数. 将 C_1 的向量表示对其

弧长 s_1 求导,我们有

$$T_1 = -\tau N\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}s_1}.$$

因此得到

$$\left|\frac{\mathrm{d}s_1}{\mathrm{d}s}\right| = |\tau|, \quad T_1 = \varepsilon N \quad (\varepsilon = \pm 1).$$

将所得的第二式再对 s_1 求导,

$$k_1 N_1 = \varepsilon(-kT + \tau B)\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}s_1}.$$

于是

$$k_1^2 = \frac{k^2 + \tau^2}{\tau^2}. \tag{1}$$

由于 C_1 落在单位球面上,如果 C_1 的挠率 $\tau_1 = 0$,则 C_1 就是圆弧,这时 $k_1 = \mathrm{const}$,利用(1)即知,原来的曲线 C 便是一般螺线.因而若 C 不是一般螺线,则其从法线的球面标线 C_1 的曲率 k_1 与挠率 τ_1 均不为零,于是作为球面曲线的 C_1 就有如下的分解式

$$\begin{aligned} r_1 &= -\rho_1 N_1 - \frac{\mathrm{d}\rho_1}{\mathrm{d}s_1}\cdot\sigma_1 B_1 \\ &= -\frac{1}{k_1}N_1 - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s_1}\left(\frac{1}{k_1}\right)\cdot\frac{1}{\tau_1}B_1. \end{aligned}$$

因此,

$$\left(\frac{1}{k_1}\right)^2 + \left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s_1}\left(\frac{1}{k_1}\right)\cdot\frac{1}{\tau_1}\right]^2 = 1,$$

由此解得

$$\tau_1^2 = \frac{\left(\dfrac{\mathrm{d}k_1}{\mathrm{d}s_1}\right)^2}{k_1^2(k_1^2 - 1)}. \tag{2}$$

但从(1)式可以推得

$$k_1\frac{\mathrm{d}k_1}{\mathrm{d}s_1}\frac{\mathrm{d}s_1}{\mathrm{d}s} = \left(\frac{k}{\tau}\right)\left(\frac{k}{\tau}\right)',$$

从而

$$\left(k_1\frac{\mathrm{d}k_1}{\mathrm{d}s_1}\right)^2=\left(\frac{k}{\tau}\cdot\frac{k'\tau-k\tau'}{\tau^2}\right)^2\cdot\frac{1}{\tau^2}=\frac{k^2}{\tau^8}(k'\tau-k\tau')^2.$$

因此(2)式化为

$$\tau_1^2=\frac{\left(k_1\dfrac{\mathrm{d}k_1}{\mathrm{d}s_1}\right)^2}{k_1^4(k_1^2-1)}=\left[\frac{k'\tau-k\tau'}{\tau(k^2+\tau^2)}\right]^2. \tag{3}$$

于是,根据(1)(3)即得所求的曲率与挠率分别为

$$k_1=\frac{\sqrt{k^2+\tau^2}}{|\tau|},\quad \tau_1=\pm\left|\frac{k'\tau-k\tau'}{\tau(k^2+\tau^2)}\right|.$$

解毕.

注 (2)式揭示了单位球面上曲线的曲率与挠率之间的一个联系. 对于曲线切线的球面标线与主法线的球面标线,也可用与本题类似的方法求出它们的曲率与挠率.

§2 Frenet 公式的应用

在局部曲线论中,有一大类习题是属于应用 Frenet 公式的常规练习. 它们的共同点是先将所给的几何条件表达成解析式子,再利用 Frenet 公式对所归结的式子进行一定次数的微积分运算(主要是微分),同时进行适当的处理,然后分析得到的各个结果,逐一找出它们的几何内涵,引出所要的结论. 下面举例说明之.

例 5 设空间正则挠曲线 C 非一般螺线. 证明:C 的主法向量与一固定方向成定角的充分必要条件是 C 的曲率 k 与挠率 τ 满足等式

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\left(\frac{k^2+\tau^2}{k\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\left(\dfrac{\tau}{k}\right)}\right)+\tau=0. \tag{1}$$