信毅教材大系

高等数学（上册）

• 余达锦 编著

Advanced Mathematics

复旦大學出版社

信毅教材大系

高等数学（上册）

● 余达锦 编著

Advanced Mathematics

复旦大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

高等数学(上册)/余达锦编著. —上海:复旦大学出版社,2014. 8
(信毅教材大系)
ISBN 978-7-309-10919-1

Ⅰ. 高…　Ⅱ. 余…　Ⅲ. 高等数学-高等学校-教材　Ⅳ. O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2014)第 182670 号

高等数学(上册)
余达锦　编著
责任编辑/梁　玲

复旦大学出版社有限公司出版发行
上海市国权路 579 号　邮编:200433
网址:fupnet@fudanpress.com　http://www.fudanpress.com
门市零售:86-21-65642857　团体订购:86-21-65118853
外埠邮购:86-21-65109143
大丰市科星印刷有限责任公司

开本 787×1092　1/16　印张 18　字数 461 千
2014 年 8 月第 1 版第 1 次印刷

ISBN 978-7-309-10919-1/O・548
定价: 38.00 元

“信毅教材大系”编委会

内容提要

本书是根据教育部高等学校数学与统计学教学指导委员会制定的“工科类本科数学基础课程教学基本要求”和“经济管理类本科数学基础课程教学基本要求”，为适应高校高等数学教育改革，充分吸收现有国内外优秀教材的精华，结合编者多年教学实践经验编写而成的。

通过本课程的学习，使学生掌握微积分学、空间解析几何与向量代数、微分方程及无穷级数的有关基本理论和方法，培养学生具有一定的抽象思维、逻辑推理、空间想象能力和自主学习能力，具有比较熟练的分析能力和运算能力，并能用数学方法解决实际问题，为后续课程奠定必要的数学基础。

本书分为上、下两册。上册主要介绍函数、极限与连续、导数与微分、微分中值定理与导数的应用、不定积分、定积分及其应用等6章内容。部分带“*”的内容可根据不同层次教学需要选择教学。书末附有部分练习与复习题的答案或提示，供读者参考。

总序

世界高等教育的起源可以追溯到1088年意大利建立的博洛尼亚大学，它运用社会化组织成批量培养社会所需要的人才，改变了知识、技能主要在师徒间、个体间传授的教育方式，满足了大家获取知识的需要，史称“博洛尼亚传统”。

19世纪初期，德国的教育家洪堡提出“教学与研究相统一”和“学术自由”的原则，并指出大学的主要职能是追求真理，学术研究在大学应当具有第一位的重要性，即“洪堡理念”，强调大学对学术研究人才的培养。

在洪堡理念广为传播和接受之际，德国都柏林天主教大学校长纽曼发表了“大学的理想”的著名演说，旗帜鲜明地指出“从本质上讲，大学是教育的场所”，“我们不能借口履行大学的使命职责，而把它引向不属于它本身的目标。”强调培养人才是大学的唯一职能。纽曼关于“大学的理想”的演说让人们重新审视和思考大学为何而设、为谁而设的问题。

19世纪后期到20世纪初，美国威斯康辛大学查尔斯·范海斯校长提出“大学必须为社会发展服务”的办学理念，更加关注大学与社会需求的结合，从而使大学走出了象牙塔。

2011年4月24日，胡锦涛总书记在清华大学百年校庆庆典上，指出高等教育是优秀文化传承的重要载体和思想文化创新的重要源泉，强调要充分发挥大学文化育人和文化传承创新的职能。

总而言之，随着社会的进步与变革，高等教育不断发展，大学的功能不断扩展，但始终都在围绕着人才培养这一大学的根本使命，致力于不断提高人才培养的质量和水平。

对大学而言，优秀人才的培养，离不开一些必要的物质条件保障，但更重要的是高效的执行体系。高效的执行体系应该体现

在三个方面:一是科学合理的学科专业结构,二是能洞悉学科前沿的优秀的师资队伍,三是作为知识载体和传播媒介的优秀教材。教材是体现教学内容与教学方法的知识载体,是进行教学的基本工具,也是深化教育教学改革,提高人才培养质量的重要保证。

一本好的教材,要能反映该学科领域的学术水平和科研成就,能引导学生沿着正确的学术方向步入所向往的科学殿堂。因此,加强高校教材建设,对于提高教育质量、稳定教学秩序、实现高等教育人才培养目标起着重要的作用。正是基于这样的考虑,江西财经大学与复旦大学出版社达成共识,准备通过编写出版一套高质量的教材系列,以期进一步锻炼学校教师队伍,提高教师素质和教学水平,最终将学校的学科、师资等优势转化为人才培养优势,提升人才培养质量。为凸显江西财经大学特色,我们取校训“信敏廉毅”中一前一尾两个字,将这个系列的教材命名为“信毅教材大系”。

“信毅教材大系”将分期分批出版问世,江西财经大学教师将积极参与这一具有重大意义的学术事业,精益求精地不断提高写作质量,力争将“信毅教材大系”打造成业内有影响力的高端品牌。“信毅教材大系”的出版,得到了复旦大学出版社的大力支持,没有他们的卓越视野和精心组织,就不可能有这套系列教材的问世。作为“信毅教材大系”的合作方和复旦大学出版社的一位多年的合作者,对他们的敬业精神和远见卓识,我感到由衷的钦佩。

王　乔

2012年9月19日

前言

高等数学是科学和技术的基础。进入新世纪以来,随着科学技术的飞速发展,数学科学在与其他科学的相互渗透和相互影响中日益壮大。它越来越多地渗透到科学与工程技术的各个领域,成为至关重要的组成部分。高等数学已经成为自然科学、工程技术、社会科学等不可缺少的基础和工具,显示出强大的生命力。在科学技术日新月异的信息化时代,数学科学的应用范围被大大地扩展,与此同时也给高等数学教育带来了巨大影响,教育目标、内容设置、问题提出、学生的学习策略和问题解决也因此发生了变革。高等数学教育必须紧跟时代前进的潮流,进行不断的探索和创新。

“高等数学”是以讨论实函数微积分为主要内容的一门课程,它学时多,覆盖面广,影响面宽,其教学质量对工科各专业的教学质量影响很大,历来倍受重视。如今,除工科各专业学习外,越来越多的经济管理专业(如经济学、管理学、金融学、统计学、保险学等)也加入到学习“高等数学”课程当中来。“高等数学”课程已成为高校非数学各专业必修的一门重要的基础理论课。

本教材分上、下两册。主要介绍一元微积分学和多元微积分学的知识及其应用,并适当介绍空间解析几何、向量代数和无穷级数等有关基本理论和方法。上册主要介绍函数、极限与连续、导数与微分、微分中值定理与导数的应用、不定积分、定积分及其应用等 6 章内容。下册主要介绍微分方程与差分方程、空间解析几何、多元函数微分学、重积分、曲线积分和曲面积分、无穷级数等 6 章内容。

本教材由编者在十余年的教学讲义基础上编写,充分吸收了现有国内外优秀教材的精华,并结合江西财经大学财经和相关专业实际编写,针对性更强,适用性更好,更有利于学生的学习与掌

握。我的研究生姚远、肖伟、杨群、马良良在习题的搜集整理和书稿的校对上做了一些工作，我的各专业30余名本科生试读了本教材的初稿或正式稿，并提出了许多建议，在此表示感谢。此外，本教材编写过程中得到了江西财经大学信息管理学院众多领导和数学老师的帮助，并参考了国内外众多优秀教材或专家学者的成果，在此深致谢忱。

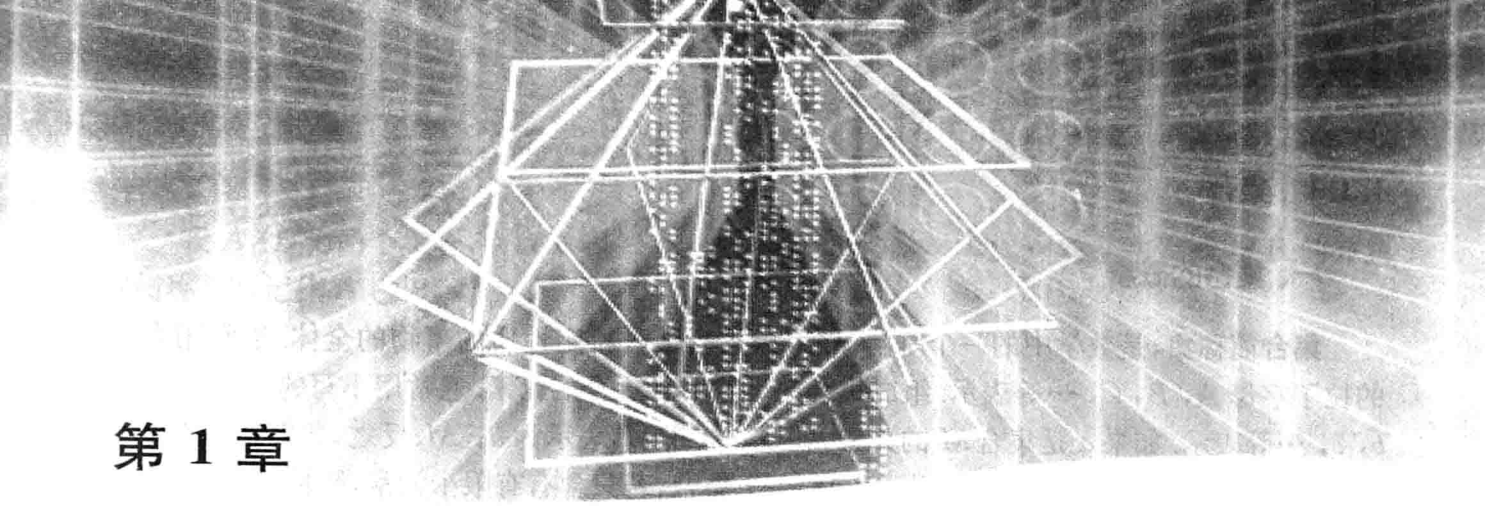
本教材的主要特色如下：①内容系统，翔实准确，反映时代要求；②图文并茂，易于学习；③语言简练流畅，可读性强；④与国际教材接轨；⑤习题丰富，适合不同学习层次；⑥相关内容与有关专业紧密联系，利于专业学习。

本教材可以作为工科类和经济管理类各专业本科生、高职生学习“高等数学”课程的教学用书，也可作为全国硕士研究生入学考试的教学参考书。由于本人的见识和水平有限，难免会有疏漏和错误，恳请广大读者批评指正。

余达锦

2014年5月16日

目录



第 1 章

函　　数

【学习目标】

(1) 理解映射与函数的概念,掌握函数的表示方法,并会建立简单应用问题中的函数关系式;

(2) 掌握函数的奇偶性、单调性、周期性和有界性;

(3) 理解复合函数及分段函数的概念,了解反函数及隐函数的概念;

(4) 掌握基本初等函数的性质及其图形;

(5) 了解经济学中常见的函数关系.

【学习要点】

区间和邻域;映射与函数;函数定义域;函数的 4 种表示法;函数的奇偶性、单调性、周期性和有界性;基本初等函数;复合函数;反函数;初等函数;分段函数;经济函数介绍(需求函数、供给函数、市场均衡、成本函数、收益函数、利润函数);双曲函数与反双曲函数.

初等数学的研究对象基本上为常量,它以静止的观点研究问题;而高等数学的研究对象则为变量,这时运动和辩证法进入数学. 函数关系就是变量之间的依赖关系,函数是高等数学中处理的最基本的对象. 本章将介绍函数的基本思想、相关概念及性质,为今后高等数学的深入学习做准备.

§1.1　预 备 知 识

高等数学中的函数是在实数范围来研究的,用得最多的数集是区间和邻域,而函数则是定义在某个区间上,后面对函数的讨论经常是在定义区间内的某个邻域内讨论该函数的性质. 下面将逐一对集合、区间、邻域、映射展开讨论.

1.1.1 集合

一、集合的概念

集合简称集，是数学中的一个基本概念，指具有某种特定性质的事物的全体. 通常用大写的拉丁字母 A, B, C, …等表示. 组成集合的事物称为集合的**元素**. 通常用小写的拉丁字母 a, b, c, …等表示. 如果 a 是集合 M 的元素，就说 a 属于 M，表示为 $a\in M$；反之，如果 a 不是集合 M 的元素，就说 a 不属于 M，表示为 $a\notin M$. 一个集合，若只含有有限个元素，则称为**有限集**；不是有限集的集合称为**无限集**

集合的表示方法通常有以下两种：

一是**列举法(或称枚举法)**：把集合的全体元素一一列举出来. 例如

$$A=\{a, b, c, d, e, f, g, h\}.$$

二是**描述法**：若集合 B 是由具有某种性质 P 的元素 x 的全体所组成，则集合 B 可表示为

$$B=\{x|x\text{ 具有性质 }P\}.$$

例如，集合 B 是方程 $x^2-4=0$ 的解集，就可以表示成

$$B=\{x\mid x^2-4=0\}.$$

一般说来，常见的数集有如下几种：

$\mathbf{N}$ 表示所有自然数组成的集合，称为**自然数集**，即

$$\mathbf{N}=\{0, 1, 2, 3, \cdots, n, \cdots\};$$

$\mathbf{N}^+$ 表示所有正整数构成的集合，称为**正整数集**，即

$$\mathbf{N}^+=\{1, 2, 3, \cdots, n, \cdots\};$$

$\mathbf{R}$ 表示所有实数构成的集合，称为**实数集**；

$\mathbf{Z}$ 表示所有整数构成的集合，称为**整数集**，即

$$\mathbf{Z}=\{\cdots, -n, \cdots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \cdots, n, \cdots\};$$

$\mathbf{Q}$ 表示所有有理数构成的集合，称为**有理数集**，即

$$\mathbf{Q}=\left\{\frac{p}{q}\,\middle|\,p\in\mathbf{Z}, q\in\mathbf{N}^+\text{ 且 }p\text{ 与 }q\text{ 互质}\right\}.$$

设 A, B 为两个集合，若 $x\in A$，则必有 $x\in B$，则称 A 是 B 的**子集**，记为 $A\subset B$(读作 A 包含于 B)或 $B\supset A$.

如果集合 A 与集合 B 互为子集，$A\subset B$ 且 $B\supset A$，则称集合 A 与集合 B **相等**，记作 $A=B$.

若 $A\subset B$ 且 $A\neq B$，则称 A 是 B 的**真子集**，记作 $A\subsetneqq B$. 例如，

$$\mathbf{N}\subsetneqq\mathbf{Z}\subsetneqq\mathbf{Q}\subsetneqq\mathbf{R}.$$

不含任何元素的集合称为**空集**，记作$\varnothing$. 数学上规定空集是任何集合的子集.

二、集合的运算

设 A, B 为两个集合,由所有属于 A 或者属于 B 的元素组成的集合称为 A 与 B 的**并集**(简称并),记作 $A\cup B$, 即

$$A\cup B=\{x\mid x\in A\text{ 或 }x\in B\};$$

设 A, B 是两个集合,由所有既属于 A 又属于 B 的元素组成的集合称为 A 与 B 的**交集**(简称交),记作 $A\cap B$, 即

$$A\cap B=\{x\mid x\in A\text{ 且 }x\in B\};$$

设 A, B 是两个集合,由属于 A 而不属于 B 的元素组成的集合称为 A 与 B 的**差集**(简称差),记作 $A\backslash B$,即

$$A\backslash B=\{x\mid x\in A\text{ 且 }x\notin B\}.$$

如果研究某个问题时将其限定在一个大的集合 I 中进行,所研究的其他集合 A 都是 I 的子集. 此时,称集合 I 为**全集或基本集**,称 $I\backslash A$ 为 A 的**余集或补集**,记作 A^C.

设 A, B, C 为任意 3 个集合,则有下列运算法则:

(1) 交换律 $A\cup B=B\cup A$, $A\cap B=B\cap A$;

(2) 结合律 $(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C)$, $(A\cap B)\cap C=A\cap(B\cap C)$;

(3) 分配律 $(A\cup B)\cap C=(A\cap C)\cup(B\cap C)$, $(A\cap B)\cup C=(A\cup C)\cap(B\cup C)$;

(4) 对偶律 $(A\cup B)^C=A^C\cap B^C$ (即“两个集合的并集的余集等于它们的余集的交集”),$(A\cap B)^C=A^C\cup B^C$(即“两个集合的交集的余集等于它们的余集的并集”).

三、区间和邻域

1. 有限区间

区间的长度为有限的.

设 a, b 为实数,且 $a<b$, 则称数集 $\{x\mid a<x<b\}$ 为以 a, b 为端点的**开区间**,记为(a,b),即

$$(a,b)=\{x\mid a<x<b\}.$$

类似地,$[a,b)=\{x\mid a\leqslant x<b\}$, $(a,b]=\{x\mid a<x\leqslant b\}$, 称为以 a, b 为端点的**半开半闭区间**, $[a,b]=\{x\mid a\leqslant x\leqslant b\}$, 称为以 a, b 为端点的**闭区间**.

以上的区间都是有限区间, $b-a$ 称为**区间的长度**.

2. 无限区间

区间的长度为无限时,为了方便起见,引入“$+\infty$”(读作正无穷大)和“$-\infty$”(读作负无穷大),如

$$[a,+\infty)=\{x\mid x\geqslant a\};\ (a,+\infty)=\{x\mid x>a\};$$
$$(-\infty,a]=\{x\mid x\leqslant a\};\ (-\infty,a)=\{x\mid x<a\};$$
$$\mathbf{R}=(-\infty,+\infty)=\{x\mid -\infty<x<+\infty\},$$

即实数集.

区间在数轴上的表示如图 1-1-1 所示.

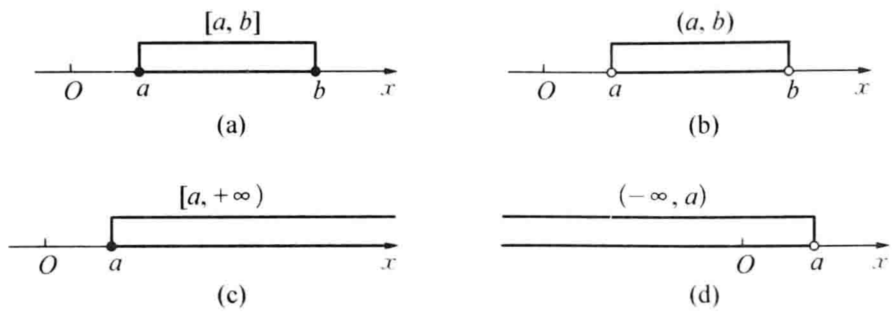


图 1-1-1

3. 邻域

除了区间的概念外，为了阐述函数的局部性质，还常常用到邻域的概念，它是由某点附近所有的点组成的一个点的集合.

设 a 为数轴上的一个点，以点 a 为中心的任何开区间称为点 a 的**邻域**，记作 $U(a)$.

设 δ 是任一正数，则称开区间 $(a-\delta, a+\delta)$ 为点 a 的 δ 邻域，记作 $U(a, \delta)$ 或 $U_\delta(a)$，即

$$U(a, \delta)=\{x \mid a-\delta<x<a+\delta\}=\{x \mid |x-a|<\delta\},$$

其中点 a 称为邻域的中心，δ 称为邻域的半径，如图 1-1-2(a)所示.

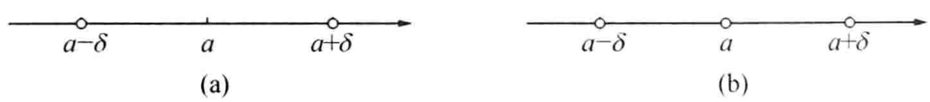


图 1-1-2

如果将邻域 $U(a, \delta)$ 的中心去掉，则称剩下的数集为邻域 $U(a, \delta)$ 的**去心邻域**，记为 $\mathring{U}(a, \delta)$，如图 1-1-2(b)所示，即

$$\mathring{U}(a, \delta)=\{x \mid 0<|x-a|<\delta\}.$$

有时为了说明函数在点的某一侧附近的情况，还要用到左、右邻域的概念. 开区间 $(a-\delta, a)$ 称为点 a 的**左 δ 邻域**，开区间 $(a, a+\delta)$ 称为点 a 的**右 δ 邻域**.

对于无穷远点 ∞ 的邻域，它的表示及含义如下：设 $M>0$，称 $U(M, \infty)$ 为无穷远点 ∞ 的 M 邻域，即

$$U(M, \infty)=\{x \mid |x|>M\}=(-\infty, -M) \cup (M, +\infty).$$

$(-\infty, -M)$ 为无穷远点 ∞ 的左邻域，$(M, +\infty)$ 为无穷远点 ∞ 的右邻域.

1.1.2 映射

一、映射的概念

定义 设 A, B 是两个非空集合，如果存在一个法则 f，使得对 A 中每个元素 x 按法则 f 在 B 中有唯一确定的元素 y 与之对应，则称 f 为从 A 到 B 的**映射**，记作

$$f: A \to B,$$