

湍流附面层分析

(下 册)

[美] Tuncer Cebeci & A.M.O.Smith 著

皇甫贵真 朱培烨 译

曹起鹏 校

南京航空学院

1982.2.



第五章 湍流附面层计算的各种方法

5.1 引言

正如在第 1、2 章中指出的, 精确处理湍流的流体流动问题是不可能的; 即使平均的运动是定常和二维的, 相应的湍流运动也是三维和非定常的。高雷诺数时这种流动的直接数值逼近显然超出了本问题的范围。为了以某种程度的成功来处理技术上的重要问题, 必须借助半经验的方法, 它的特点在于用统计学的平均量描述湍流的随机、非定常三维运动这一事实; 通过一组微分方程使这些统计量彼此相联系。为了确立这样的微分方程组不得不引进经验假设 (也称做封闭条件)。

多年来, 已经作了许多努力去发展一种计算湍流附面层的一般方法并采取了各种途径。起初——在能使用高速计算机前, 几乎所有的努力都回避了求解偏微分形式的高度非线性附面层方程这一数学困难, 而代之以专心求解这些方程的积分形式, 后者得出常微分方程。这些方法统称为积分关系法。但是, 由于现代计算机提供了数值求解复杂偏微分方程组的可能性, 直接解偏微分方程形式的控制方程的兴趣最近增大了。结果, 大约从 1960 年以来, 已发展了一组方法称为微分法而且还在继续发展着。

1968 年在美国斯坦福大学举行了二维湍流附面层计算精度的会议。当时在系统的基础上比较了 29 种方法。这些研究局限于有压强梯度的不可压缩流动而不包括发汗、粗糙度、旋转以及别的影响。这次会议在确定各种积分法和微分法的精度并指出未来工作的方向方面是很有帮助的 [见 Kline 等人 (1968) 和 Coles 和 Hirst (1968)]。

第 5.2 节和 5.3 节讨论几个湍流附面层计算的积分型和微分型的一般方法。其中有一些在斯坦福会议上考察过并发现是很精确的, 而另一些是会后提出的。关于积分法的更详细叙述请读者参考 Kline 等人 (1968) 编辑的卷册。

在第 5.3 节关于微分法的叙述中, 我们着重于方法和物理假设而不强调数值技巧。关于微分法的更详细叙述请参考 Reynolds (1970) 和 Bradshaw (1972) 的两篇杰出评述。

第 5.4 节讨论计算二维湍流附面层的简单方法和公式。我们称之为“捷径”法的这些方法一般不具有在第 5.2 节和 5.3 节讨论的一般方法的精度, 而且仅限于有压强梯度的不可压缩流动。它们主要的优点和用处就在于其简单性。和一般方法不同, 它们不需要计算机, 在许多实际的工程问题中能够容易使用。

5.2 积分法

正如前面已经提到的, 积分法是基于解在第 3.6 节讨论的运动积分方程的。它们回避了解微分型附面层方程的复杂性, 而且只用很短的计算时间就能给出附面层方程的解。作为积

分法的一个例子, 我们研究没有质量交换的二维不可压缩流动的动量积分方程, 即

$$\frac{d\theta}{dx} + \frac{\theta}{u_e}(H+2)\frac{du_e}{dx} = \frac{c_f}{2} \quad (3.6.6)$$

对于一个给定的速度分布, 此方程包含三个未知数 θ 、 H 和 c_f 。它是精确的, 但在能求解它之前还需要这三个量之间的两个关系式, 以便得到封闭的方程组。在它们之间没有普遍的关系式, 因此必须进行假设。所以, 方程(3.6.6)解的精度极大依赖于假设。一个基于解方程(3.6.6)及两个辅助方程的简单而精确的方法是 Head 法 (1958)。除了方程(3.6.6)外, Head 法使用 Ludwig 和 Tillmann 的摩擦阻力公式

$$c_f = 0.246(10)^{-0.678H} R_\theta^{-0.268} \quad (5.2.1)$$

和掺混进入附面层的速率, 即在附面层里的质量流随 x 增长的速率

$$\int_0^\delta u dy$$

的经验表达式。由 δ^* 的定义有

$$\int_0^\delta u dy = u_e(\delta - \delta^*) \quad (5.2.2)$$

Head 假定

$$\frac{1}{u_e} \frac{d}{dx} [u_e(\delta - \delta^*)] = F(H_{\delta-\delta^*}) \quad (5.2.3)$$

这里 $H_{\delta-\delta^*} = (\delta - \delta^*)/\theta$ 是像 H 一样的另一个形状参数。

在假设速度分布图是单参数族的情况下, 可以简单地建立 $H_{\delta-\delta^*}$ 与 H 的关系式。因而写

$$H_{\delta-\delta^*} = G(H). \quad (5.2.4)$$

在函数 F 和 G 由实验确定的情况下, 可以将方程(5.2.3)和(5.2.4)用于形状参数发展结果的计算。根据实验, 可以用下述经验关系式来逼近 F 和 G :

$$F = 0.0306(H_{\delta-\delta^*} - 3)^{-0.653} \quad (5.2.5a)$$

$$H_{\delta-\delta^*} = G = 1.535(H - 0.7)^{-2.715} + 3.3. \quad (5.2.5b)$$

总之, Head 法用方程(5.2.1)和(5.2.5)作为两个辅助方程以求解动量积分方程(3.6.6)。已经把这个方法推广到广泛的各种流动。对于推广的叙述请参考 Kline 等人编写 (1968) 的卷册。

积分法也常利用平均能量积分方程

$$\frac{1}{u_e^3} \frac{d}{dx} (u_e^3 \delta^{**}) = \frac{2D}{\rho u_e^3} = 2C_D \quad (3.6.12b)$$

作为辅助方程。这又必须对由

$$C_D = \frac{D}{\rho u_e^3} = \frac{1}{\rho u_e^3} \int_0^\infty \left(\mu \frac{\partial u}{\partial y} - \rho \overline{u'v'} \right) \frac{\partial u}{\partial y} dy$$

定义的平均流动动能耗散系数 C_D 作出假设。在这个表达式里, 除了在壁面附近外 $\mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2$ 对

C_D 的影响是小的, 常常略去。按照在3.6.3节里所用的表示法[见方程(3.6.15)], 则可以写

$$C_D = \frac{P}{\rho u_e^3}$$

借助湍流能量积分方程也可以建立起湍流能量的生成项 P 与耗散项 d 以及对流项 $\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{2}IQ^2\right)$ 的关系式。由方程(3.6.13b)可以写

$$P = d + \left(-\frac{d}{dx}\right)\left(-\frac{1}{2}IQ^2\right)$$

在斯坦福会议上已经提出的若干积分方法已被建议用来得到用局部平均量表示的 P 的表达式。它们可以归纳如下:

1. 借助基于直接度量 $\overline{u'v'}$ 的 P 的经验形式, 像 Goldberg (1966) 所得到的那样。
2. 借助一个关于 P 的经验形式, 它是用 $u_e^3\delta^{**}$ 的实验值的演变根据平均能量积分方程(3.6.12b)确定的。例如, Truckenbrodt(1955)根据 Rotta 编纂的实验数据推演出来的下述经验表达式:

$$C_D = \frac{P}{\rho u_e^3} = 0.0056(R_\theta)^{-\frac{1}{6}} \quad (5.2.6)$$

3. 借助使 P 和用 $E = (d/dx)\int_0^\delta u dy$ 定义的掺混函数 E 相关。例如看 Escudier 和 Nicoll(1968)。

4. 借助用如像在第6章里叙述的涡流粘性假设, 即雷诺切应力 $\rho\overline{u'v'} = \rho\epsilon_m(\partial u/\partial y)$ 来计算 P 。可以把这些方法归类为加略金法。关于加略金法请参考 Abbott 等人(1968)的极好的评述论文。

5. 借助在整体假设的基础上确定 P , 该假设建立 P 和平均流动量的关系, 例如关于 P 相似性解的关系式。看 Alber 法(1968)。

也已提出了许多别的积分法, 它们使用借助动量方程乘以权函数所构成的别的类型的积分方程。尤其是, 在一些方法里使用通过乘以 y 所组成的力矩—动量积分方程。对进一步的详情感兴趣的读者请参考 Granville(1972)的杰出评论。

5.3 微分法

微分法是基于解偏微分形式的附面层方程。借助在每个方法里所用的封闭假设可以方便地叙述它们(封闭假设即为了封闭该方程组所必须的、对在控制方程里的未知量所假设的关系式)。在下两节中讨论之。

5.3.1 平均流动法。在第二章里导出了可压缩湍流的守恒方程。现在研究不可压缩的流动并写出它的连续性方程和动量方程。根据方程(2.5.3)和(2.5.4)我们可以写成

$$\frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_j} = 0, \quad (5.3.1)$$

$$\rho\left(\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial t} + \bar{u}_j \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j}\right) = -\frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j}(\bar{\tau}_{ij} + \bar{R}_{ij}), \quad (5.3.2)$$

这里 $\overline{R}_{ij}$ 是用

$$\overline{R}_{ij} = -\rho \overline{u_i' u_j'} \quad (5.3.3)$$

定义的雷诺应力张量。用在上面章节中讨论的 Boussinesq 涡流粘性概念，我们可以把雷诺应力张量写成为

$$\overline{R}_{ij} = \rho \varepsilon_m^* \left(\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i} \right), \quad (5.3.4)$$

它类似于在方程(2.2.4)里所定义的 τ_{ij} ，即

$$\tau_{ij} = \mu \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right).$$

方程(5.3.4)是 ε_m^* 的一个定义。

根据 Boussinesq 的概念，涡流粘性 ε_m^* 有标量值。本来，Boussinesq 假设了方向的不变性，但该理论对通过管道湍流的应用里，他也假设 ε_m^* 对空间是常量。仅当该湍流场至少是均匀时，这样的常数值可能预期出现。在少数自由剪切流动的情形中(它们是不均匀的，且在一个方向上呈现出显著的速度梯度和切应力)，在涡流粘性为常量的假设之下，用令人满意的方式来描述全流场是可能的。但作为一个普遍的法则，不能预期是常值。例如，正如在第4.3节所讨论的，在壁面附近的湍流里， ε_m^* 在附面层里，不是常数而是近似线性地随 y 变化。

如果使用标量涡流粘性的概念，一个更精确的方法应该是把平均湍流压力作为分离项从湍流应力中提取出来，又由于 $\bar{u}_i^2 = q^2$ 而把雷诺应力张量写成

$$R_{ij} \equiv \frac{-\overline{R}_{ij}}{\rho} = \frac{1}{3} q^2 \delta_{ij} - \varepsilon_m \left(\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i} \right). \quad (5.3.5)$$

关于进一步的讨论请读者参考 Hinze(1959)的书。

在平均流动法里，借助用方程(5.3.5)所给出的雷诺应力 $\overline{R}_{ij}$ 与平均场 $\bar{u}_i$ 的关系这一假设就获得了封闭。

在平均流动法里用的另一封闭方法是“混合长度”法。在那里把方程(5.3.5)写成

$$R_{ij} = \frac{1}{3} q^2 \delta_{ij} - l^2 \left(\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i} \right) \left(\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i} \right). \quad (5.3.6)$$

有时混合这两种方法。方程(5.3.5)与方程(5.3.6)的比较表明

$$\varepsilon_m = l^2 \left(\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i} \right) \quad (5.3.7)$$

这里 l 是湍流的长度尺度。

对于二维不可压定常流，附面层方程(5.3.1)和(5.3.2)的形式是

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (5.3.8)$$

$$u \frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{1}{\rho} \frac{dp}{dx} + \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \frac{\partial}{\partial y} \overline{u'v'}. \quad (5.3.9)$$

雷诺切应力和平均速度梯度间的关系是

$$-\overline{u'v'} = \varepsilon_m \frac{\partial u}{\partial y} = l^2 \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2.$$

为了简单起见, 我们在这些方程中略去了平均量上面的横杠。为了方便, 我们将把 $\overline{u'v'}$ 叫做雷诺切应力 (实际上 $\rho \overline{u'v'}$ 是切应力)。

对广泛的湍流剪切流已经很好地研究出三种平均流动法: Cebeci-Smith(CS)法, Mellor-Herring(MH)法和 Patankar-Spalding(NP)法。CS 法和 MH 法使用涡流粘性法, NP 法使用混合长度法。所有这三种方法都是用由内部和外部区域所组成的组合层来处理附面层, 而且在这两个区域里对 ε_m 和 l 使用分别的表达式。主要的差别在于求解方程所用的数值方法方面。在非常接近壁面的内部区域和外部区域里经验函数 ε_m 或 l^2 的处理也略有不同。Cebeci 和 Smith(1968)假设在内部区域里

$$(\varepsilon_m)_i = (\kappa y)^2 \left[1 - \exp\left(-\frac{y}{A}\right) \right]^2 \left| \frac{\partial u}{\partial y} \right| \quad (5.3.10)$$

这里 $\kappa = 0.40$, A 是阻尼长度常数, 在第 6 章将详细讨论它。对没有质量交换的不可压二维流动用

$$A = 26(\nu/u_\tau)[1 - 11.8P^+]^{1/2} \quad (5.3.11)$$

给出。Mellor 和 Herring(1968a)用

$$(\varepsilon_m^+)_i \equiv \frac{(\varepsilon_m)_i}{\nu} = \frac{\chi^4}{\chi^3 + (6.9)^3} \quad (5.3.12)$$

这里

$$\chi = \frac{(\kappa y)^\varepsilon}{\nu} \frac{\partial u}{\partial y}, \quad \kappa = 0.41, \quad (5.3.13)$$

来表示内层的涡流粘性。

在外部区域里, Cebeci 和 Smith 假设涡流粘性

$$(\varepsilon_m)_0 = 0.0168 u_\tau \delta_K^* \gamma, \quad (5.3.14)$$

这里

$$\delta_K^* = \int_0^\infty [1 - (u/u_\tau)] dy, \quad \gamma = [1 + 5.5(y/\delta)^6]^{-1}. \quad (5.3.15)$$

而 Mellor 和 Herring 假设

$$(\varepsilon_m^+)_0 = 0.016 u_\tau \delta_K^*. \quad (5.3.16)$$

方程(5.3.14)和(5.3.16)的外部涡流粘性实际上是相同的; 在方程(5.3.14)里的间歇项只改进穿过附面层的切应力分布的计算, 它几乎不影响平均速度分布。

Patankar 和 Spalding(1968)使用混合长度概念又假设在内部区域里

$$l = \kappa y \{1 - \exp[y(\tau\rho)^{1/2}/25.3\mu]\} \quad (5.3.17)$$

和在外部区域里

$$l = 0.09\delta. \quad (5.3.18)$$

他们在方程(5.3.17)里取 $\kappa=0.435$, 且把方程(5.3.18)里的附面层厚度 δ 定义为在 $u=0.99u_e$ 时的 y 的值。

使用这一类逼近方法在不可压流动里的二维和轴对称附面的计算里都获得显著的成功。斯坦福会议以来, 已把其中的一些扩展到具有热和质量交换的不可压和可压缩流动。CS 法已推广到种类广泛的流动。我们在第 6 至 9 章里将讨论求解附面层方程所用的 CS 涡流粘性公式和数值方法的推广。许多其他人也采用了 CS 涡流粘性公式。例如 Harris(1971) 提出了一个计算可压缩层流、过渡的、湍流附面层的精确而有效的方法。Lewis 等人 (1971)、Hopkins 和他的同事们(1972)及 Abbott 和他的同事们 (即 Deboy 和 Abbott, 1971)使用 CS 涡流粘性公式以便计算可压缩湍流附面层。Cooper(1971) 把 CS 法推广到旋转圆盘上的层流和湍流附面层计算。他的计算结果和实验很好吻合。

在 Herring 和 Mellor(1968)里叙述了把 MH 法推广到可压缩流动。

像 CS 法一样, NP 法也已推广到种类广泛的流动。在 Patankar 和 Spalding(1967)里叙述了对可压缩附面层和壁面射流的推广。Kays 和他的同事们, 已进行了本方法对包括高度加速流动的不可压发汗湍流附面层的推广, 且已在一些论文(例如 Kays(1972))中报导了。Whitelaw 和他的同事们完成了 NP 法对估算薄膜冷却现象的推广(看 Kacker 和 Whitlaw, 1968, 1971)。

Adams(1972)使用 NP 的混合长度分布连同 Dhawan 和 Narasimha 的间歇表达式 (1958) 进行可压缩层流、过渡的和湍流附面层计算。他使用不同于 NP 法的数值方法。他也把他的计算推广到有迎角的尖锥沿着向风流线的附面层(1971)。

Pletcher (1969, 1970, 1972) 也提出了一个计算不可压和可压缩湍流附面层的既有效又精确的方法。他使用横越附面层的混合长度分布。他的数值方法是属于 Dufort 和 Frankel 的显式有限差分法。

Bushnell 和 Beckwith (1970) 提出了计算高超音速附面层的既有效又精确的方法。他们也使用了混合长度的方法, 但不同于 NP 法。

Dvorak (1973) 提出了计算包括切向喷射效应的不可压湍流附面层的精确方法。此法也是基于涡流粘性方法, 它通过使用曲线正交坐标系保持了纵向表面曲率的影响。

5.3.2 传输方程法。本节讨论的方法使用雷诺应力的传输方程及平均动量方程。由方程 (3.5.3) 能够得到雷诺应力张量 $\bar{v}_{ij}$ 的方程。再者, 为了方便, 我们称 $-\overline{u_i' u_j'}$ 作雷诺应力张量而不是实际的 $-\rho \overline{u_i' u_j'}$, 而且也考虑不可压缩流动。在改写方程(3.5.3)之前, 让我们用 ρ 除方程的最后两项。如果用 v_{ij} 表示这两项, 即

$$V_{ij} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial x_K} (\overline{u_j' \tau_{iK}''} + \overline{u_i' \tau_{jK}''}) - \frac{1}{\rho} (\overline{\tau_{iK}'' \frac{\partial u_j'}{\partial x_K}} + \overline{\tau_{jK}'' \frac{\partial u_i'}{\partial x_K}}) \quad (5.3.19)$$

则根据应力张量的定义可以把第一项写成

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial x_K} (\overline{u_j' \tau_{iK}''} + \overline{u_i' \tau_{jK}''}) \\ &= \nu \frac{\partial}{\partial x_K} \left[\overline{u_j' \left(\frac{\partial u_i'}{\partial x_K} + \frac{\partial u_K'}{\partial x_i} \right)} + \overline{u_i' \left(\frac{\partial u_j'}{\partial x_K} + \frac{\partial u_K'}{\partial x_j} \right)} \right] \end{aligned}$$

$$= \nu \frac{\partial}{\partial x_K} \left(\frac{\partial}{\partial x_K} (\overline{u_i' u_i'}) \right) + \nu \frac{\partial}{\partial x_K} \left(\overline{u_i' \frac{\partial u_K'}{\partial x_i} + u_i' \frac{\partial u_K'}{\partial x_j}} \right) \quad (5.3.20)$$

再把方程(5.3.19)的第二项写成

$$\begin{aligned} & -\frac{1}{\rho} \left(\overline{\tau_{iK}'' \frac{\partial u_j'}{\partial x_K}} + \overline{\tau_{jK}'' \frac{\partial u_i'}{\partial x_K}} \right) \\ & = -\nu \left(\overline{\left(\frac{\partial u_i'}{\partial x_K} + \frac{\partial u_K'}{\partial x_i} \right) \frac{\partial u_j'}{\partial x_K}} - \nu \left(\frac{\partial u_j'}{\partial x_K} + \frac{\partial u_K'}{\partial x_j} \right) \frac{\partial u_i'}{\partial x_K} \right) \\ & = -\nu \left(2 \frac{\partial u_i'}{\partial x_K} \frac{\partial u_j'}{\partial x_K} + \frac{\partial u_K'}{\partial x_K} \frac{\partial u_j'}{\partial x_i} + \frac{\partial u_K'}{\partial x_j} \frac{\partial u_i'}{\partial x_K} \right) \end{aligned} \quad (5.3.21)$$

合并方程(5.3.20)和(5.3.21), 因为不可压流动的 $\overline{u_j' \left(\frac{\partial^2 u_K'}{\partial x_K \partial x_i} \right)}$ 和 $\overline{u_i' \left(\frac{\partial^2 u_K'}{\partial x_K \partial x_j} \right)}$ 是另, 我们得到

$$V_{ij} \equiv \nu \frac{\partial^2}{\partial x_K \partial x_K} (R_{ij}) - 2\nu \frac{\partial u_i'}{\partial x_K} \frac{\partial u_j'}{\partial x_K} \quad (5.3.22)$$

用方程(5.3.22)和连续性方程(2.5.3)我们可以把方程(3.5.3)写成

$$\begin{aligned} \frac{D}{Dt} R_{ij} &= \frac{p}{\rho} \left(\frac{\partial u_j'}{\partial x_i} + \frac{\partial u_i'}{\partial x_j} \right) - \frac{1}{\rho} \left[\frac{\partial}{\partial x_i} (\overline{p u_i'}) + \frac{\partial}{\partial x_j} (\overline{p u_j'}) \right] \\ & - \frac{\partial}{\partial x_K} (\overline{u_i' u_i' u_K'}) - R_{iK} \frac{\partial \tilde{u}_j}{\partial x_K} - R_{jK} \frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial x_K} + V_{ij} \end{aligned} \quad (5.3.23)$$

这里

$$\frac{D}{Dt} R_{ij} = \frac{\partial}{\partial t} (R_{ij}) + \tilde{u}_K \frac{\partial R_{ij}}{\partial x_K}$$

V_{ij} 是由(5.3.19)或(5.3.22)给出的粘性项。

$i=j$ 时方程(5.3.23)简化式给出在 2.8 节所讨论的湍流动能的下述方程:

$$\frac{D}{Dt} \left(\frac{q^2}{2} \right) = -\frac{\partial}{\partial x_K} \left(\overline{u_K' \frac{p}{\rho} + u_K' \frac{u_i' u_i'}{2}} \right) - R_{iK} \frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial x_K} + \frac{V_{ii}}{2} \quad (5.3.24)$$

这里

$$\begin{aligned} \frac{D}{Dt} \left(\frac{q^2}{2} \right) &= \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{q^2}{2} \right) + \tilde{u}_K \frac{\partial}{\partial x_K} \left(\frac{q^2}{2} \right) \\ \frac{V_{ii}}{2} &= \nu \frac{\partial^2}{\partial x_K \partial x_K} \left(\frac{q^2}{2} \right) - \nu \left(\frac{\partial u_i'}{\partial x_K} \frac{\partial u_i'}{\partial x_K} \right) \end{aligned} \quad (5.3.25)$$

方程(5.3.25)的第一项可以解释作湍流动能的“梯度扩散”, 第二项可以称为各相同性耗散, 因为实际耗散是[见方程(3.5.5)]

$$\phi = \frac{1}{\rho} \overline{\tau_{iK}'' \frac{\partial u_i'}{\partial x_K}} = \nu \left(\frac{\partial u_i'}{\partial x_K} + \frac{\partial u_K'}{\partial x_i} \right) \frac{\partial u_i'}{\partial x_K}$$

显然, 方程 (5.3.19) 可以用来将方程 (5.3.24) 中的 $\frac{V_{ii}}{2}$ 写成

$$\frac{V_{ii}}{2} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial x_K} (\overline{u_i' \tau_{iK}''}) - \phi \quad (5.3.26)$$

我们来查看传输方程法的两种主要途径。第一种途径考虑平均连续性方程、平均动量方程以及湍流动能方程(5.3.24)的解法。为了简便, 我们称它为途径 A。第二种途径考虑平均连续性方程、平均动量方程以及雷诺应力传输方程(5.3.23)的解法。为了简便, 我们称它为途径 B。这两种途径没有多大差别, 它们都包含下述假设: 能够用二阶乘积表示三阶湍流积, 且在二阶乘积间存在一个适当的关系。

途径 A。途径 A 主要包括两类。第一类使用湍流能量方程来构成涡流粘性, 第二类使用湍流能量方程来建立雷诺切应力的关系式。但是, 按惯例看来将用

$$\phi = c_1 (q^3/l) \quad (5.3.27)$$

来仿真方程 (5.3.24) 中的耗散项 ϕ , 这里 l 是湍流长度尺度, c_1 在高雷诺数 $R_t = ql/\nu$ 时是常数。

途径 A 各方法彼此间的不同在于它们关于压力与速度的相关项, $(\partial/\partial x_K) [\overline{u_K' (u_i' u_j' / 2)}]$ 雷诺应力张量 R_{ij} 与 q^2 间关系式形式的封闭假设。我们在这里查看两种方法。在第一种方法里, 压力速度和三重速度相关项与 q^2 的梯度相关联:

$$-\left(\overline{u_K' \frac{P}{\rho} + u_K' \frac{u_i' u_i'}{2}} \right) = N_Q \varepsilon_m \frac{\partial (q^2/2)}{\partial x_K} \quad (5.3.28)$$

这里 N_Q 是常数或特定函数。Glushko(1966), Beckwith 和 Bushnell(1968)、Mellor 和 Herring(1968b) 及 Ng 和 Spalding(1972)使用了上述“梯度扩散”模型。在同一方法里, 雷诺应力 R_{ij} 通过使用方程(5.3.5)

$$R_{ij} = -\frac{1}{3} q^2 \delta_{ij} - \varepsilon_m \left(\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i} \right)$$

和把 ε_m 写作

$$\varepsilon_m = c_2 q l \quad (5.3.29)$$

而与 q^2 相关联, 这里 c_2 在高湍流雷诺数 R_t 时是常数。在方程(5.3.29)和(5.3.27)里必须规定长度尺度 l (无论是代数地还是借助微分方程) 以便封闭该系统。在前三个方法里代数地确定 l , 在 Ng 和 Spalding 方法里从基于 Rotta (1951) 频谱传输方程的长度度量方程得到 l 。

Bradshaw 和他的助手所倡导的第二种方法, 例如 Bradshaw 等人(1967)假设用

$$\left(\overline{u_K' \frac{p}{\rho} + u_K' \frac{u_i' u_i'}{2}} \right) = G q^2 Q_K \quad (5.3.30)$$

给出压力—速度和三重速度相关项, 这里 G 是常数或特定函数, Q_K 是大涡流运动的总向量速度尺度特性。

雷诺应力 R_{ij} 是直接与 q^2 相关的。关于 R_{ij} 和 q^2 间的关系式的“广义Bradshaw假设”是

$$R_{ij} = a_{ij} q^2 \quad (5.3.31)$$

这里 a_{ij} 取决于应变的类型。

通过把它们表示成下述两种形式，我们能够概括4途径的传输方程法。把方程(5.3.27)代入方程(5.3.25)并把所得的表达式连同方程(5.3.28)和(5.3.29)一起代入方程(5.3.24)，我们就得到了湍流动能方程经验封闭的第一种形式：

$$\begin{aligned} \frac{D}{Dt} \left(\frac{q^2}{2} \right) &= \frac{\partial}{\partial x_K} \left[N_Q \varepsilon_m \frac{\partial}{\partial x_K} \left(\frac{q^2}{2} \right) \right] + \frac{\varepsilon_m}{\mu} \bar{\tau}_{iK} \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_K} \\ &+ \nu \frac{\partial}{\partial x_K \partial x_K} \left(\frac{q^2}{2} \right) - c_1 \frac{q^3}{l} \end{aligned} \quad (5.3.32)$$

这里 $\bar{\tau}_{iK} = \tau_{iK} / \rho$ 。对二维定常流，方程(5.3.32)的附面层形式是

$$\begin{aligned} \bar{u} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{q^2}{2} \right) + \bar{v} \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{q^2}{2} \right) \\ = \frac{\partial}{\partial y} \left[(N_Q \varepsilon_m + \nu) \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{q^2}{2} \right) \right] + \varepsilon_m \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \right)^2 - c_1 \frac{q^3}{l} \end{aligned} \quad (5.3.33)$$

把方程(5.3.27)代入方程(5.3.25)并把得到的表达式连同方程(5.3.30)和(5.3.31)一起代入(5.3.24)，我们就得到湍流动能方程经验封闭的第二种形式：

$$\begin{aligned} \frac{D}{Dt} \left(\frac{q^2}{2} \right) &= - \frac{\partial}{\partial x_K} (G q^2 Q_K) - a_{iK} q^2 \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_K} \\ &+ \nu \frac{\partial}{\partial x_K \partial x_K} \left(\frac{q^2}{2} \right) - c_1 \frac{q^3}{l} \end{aligned} \quad (5.3.34)$$

对二维定常流，方程(5.3.34)的附面层形式是

$$\begin{aligned} \bar{u} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{q^2}{2} \right) + \bar{v} \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{q^2}{2} \right) \\ = - \frac{\partial}{\partial y} (G q^2 Q) + a q^2 \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} + \nu \frac{\partial^2}{\partial y^2} \left(\frac{q^2}{2} \right) - c_1 \frac{q^3}{l} \end{aligned} \quad (5.3.35)$$

这里 $a = -a_{12}$ ， $Q = Q_2$ 。

粘性项 $\nu(\partial^2/\partial y^2)(q^2/2)$ 在粘性底层外是可以略去的。由于这个原因，Ng 和 Spalding 把方程(5.3.33)写成

$$\bar{u} \frac{\partial K}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial K}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\varepsilon_m}{\sigma_K} \frac{\partial K}{\partial y} \right) + \varepsilon_m \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \right)^2 - c_D \left(\frac{K}{l} \right)^{3/2} \quad (5.3.36)$$

这里 $K = q^2/2$ ， σ_K 是关于 K 的湍流普朗特施米特数而且由

$$\varepsilon_m = K^{1/2} l \quad (5.3.37)$$

给出 ε_m 。Kolmogoroff(1942)首次提出了方程(5.3.36)。方程(5.3.36)与(5.3.37)中长度尺度由解 Rotta(1951)首次提出的能量—长度方程得到

$$\begin{aligned} & \bar{u} \frac{\partial}{\partial x}(Kl) + \bar{v} \frac{\partial}{\partial y}(Kl) \\ &= \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{K^{3/2}l}{\sigma_1} \frac{\partial l}{\partial y} + \frac{K^{1/2}l}{\sigma_2} \frac{\partial K}{\partial y} \right) + c_p K^{1/2} l^2 \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 - \left[c_M + c_W \left(\frac{l}{y} \right)^4 \right] K^{3/2} \end{aligned} \quad (5.3.38)$$

在方程(5.3.36)和(5.3.38)里把 σ_K 、 c_D 、 σ_1 、 σ_2 、 c_p 、 c_M 和 c_W 作为取下述值的通用常数： $\sigma_K^2=2$ ， $c_D=0.1$ ， $\sigma_1=1.2$ ， $\sigma_2=2$ ， $c_p=0.84$ ， $c_M=0.055$ ， $c_W=22$ 。

Bradshaw 把方程(5.3.35)里的传输速度 Q 取作 $(\tau_{max}/\rho)^{1/2}$ ，这里 τ_{max} 是给定 x 处附面层里 $\tau(x, y)$ 的极大值。把参数 G 和 l 表示为横越附面层各点位置的函数(看图5.1)，而 a 取作常数0.15。

Jones 和 Launder(1972)也使用涡流粘性概念。他们把涡流粘性写成

$$\varepsilon_m = c_\mu f_\mu (K^2/\phi) \quad (5.3.39)$$

又用 $\phi = c_1 q^3/l$ ，把方程(5.3.33)写成

$$\bar{u} \frac{\partial K}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial K}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left[\left(\frac{\varepsilon_m}{\sigma_K} + \nu \right) \frac{\partial K}{\partial y} \right] + \varepsilon_m \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \right)^2 - \phi - 2\nu \left(\frac{\partial K^{1/2}}{\partial y} \right)^2 \quad (5.3.40)$$

根据由 Harlow 和 Nakayama(1967)导出的传输方程得到湍流能量的耗散速率：

$$\begin{aligned} \frac{D\phi}{Dt} = & -2\nu \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_K} \left(\frac{\partial \bar{u}_i'}{\partial x_1} \frac{\partial \bar{u}_K'}{\partial x_1} + \frac{\partial \bar{u}_1'}{\partial x_i} \frac{\partial \bar{u}_1'}{\partial x_K} \right) - 2\nu \frac{\partial \bar{u}_i'}{\partial x_K} \frac{\partial \bar{u}_i'}{\partial x_1} \frac{\partial \bar{u}_K'}{\partial x_1} \\ & - 2 \left[\nu \frac{\partial^2 \bar{u}_i'}{\partial x_K \partial x_1} \right]^2 - \frac{\partial}{\partial x_K} \bar{u}_K' \phi' - \frac{\nu}{\rho} \frac{\partial}{\partial x_i} \left[\frac{\partial p}{\partial x_1} \frac{\partial \bar{u}_i'}{\partial x_1} \right] \end{aligned} \quad (5.3.41)$$

对二维附面层，Jones 和 Launder 把此方程写为，

$$\begin{aligned} \bar{u} \frac{\partial \phi}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial \phi}{\partial y} = & \frac{\partial}{\partial y} \left[\left(\frac{\varepsilon_m}{\sigma_\phi} + \nu \right) \frac{\partial \phi}{\partial y} \right] + \bar{c}_1 f_1 \frac{\phi}{K} \varepsilon_m \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \right)^2 \\ & + \bar{c}_2 f_2 \frac{\phi^2}{K} + 2\nu \varepsilon_m \left(\frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial y^2} \right)^2 \end{aligned} \quad (5.3.42)$$

除方程(5.3.40)右端的末项之外，湍流动能方程(5.3.40)和(5.3.33)是等价的。Jones 和 Launder 为了计算方便包括了该项。对于方程(5.3.42)的末项 $2\nu \varepsilon_m (\partial^2 \bar{u}/\partial y^2)^2$ 同样是正确的，这项在高雷诺数流动里不出现。参数 c_μ 、 σ_K 、 σ_ϕ 、 $\bar{c}_1$ 、 $\bar{c}_2$ 和 f_1 是取下述各值的通用常数： $c_\mu=0.09$ ， $\sigma_K=1.0$ ， $\sigma_\phi=1.3$ ， $\bar{c}_1=1.55$ ， $\bar{c}_2=2.0$ 。其它的参数 f_2 和 f_μ 通过

$$\begin{aligned} f_2 = & 1.0 - 0.3 \exp(-R_e^2), \\ f_\mu = & \exp[-2.5/(1+R_e/50)] \end{aligned} \quad (5.3.43)$$

与湍流雷诺数 R_e 相关，这里 $R_e = K^2/\nu\phi$ 。

概括地说，Ng 和 Spalding 解连续性方程(5.3.8)、平均动量方程(5.3.9)，(其中 $-\overline{u'v'}$ 已用

方程(5.3.37)消去)湍流动能方程(5.3.36),以及能量长度尺度方程(5.3.38)。Bradshaw 解连续性方程(5.3.8)、平均动量方程(5.3.9)(其 $-\overline{u'v'}$ 用 τ 表示)及湍流动能方程(5.3.35)。在这两个方法中壁面边界条件都是在离壁面非常小的无量纲距离 Y_e^+ 上满足的。在 Y_e^+ 上Ng 和 Spalding 假设下述条件:

$$\begin{aligned} u_e^+ &= (1/\kappa) \ln(E y_e^+) \\ (-\overline{u'v'}/K)_e &= c_D^{1/2} \\ (l/y)_e &= K c_D^{1/4} \end{aligned} \quad (5.3.44)$$

这里假设 κ 和 E 是分别等于0.435和9.0的通用常数。

在壁面附近, Bradshaw 使用 $\kappa=0.41$ 和 $c=5.0$ 的壁面法则

$$u^+ = (1/\kappa) \ln y^+ + c \quad (5.3.45a)$$

他也假设对于动能方程的壁面边界条件是

$$q/u_e = \kappa = 0.41 \quad (5.3.45b)$$

Ng 和 Spalding 及 Bradshaw 都使用在附面层边缘的下述边界条件:

$$\text{在 } y=\delta \text{ 处: } u=u_e(x), K \text{ 或 } q=0, \tau=0, Kl=0.$$

Jones 和 Launder 使用下述边界条件:

$$\text{在 } y=0 \text{ 处: } K=0, \phi=0; \quad (5.3.46a)$$

$$\text{在 } y=\delta \text{ 处: } u_e(dK_e/dx) = -\phi_e, u_e(d\phi_e/dx) = \bar{c}_2 f_2 \phi_e^2 / K_e \quad (5.3.46b)$$

和以前一样, 这里的下标 e 表示外缘条件。方程(5.3.46b)当然是方程(5.3.40)和(5.3.42)的极限自由流形式。

应当提到的是, 封闭假设方程(5.3.28)具有值得注意的重要性。在这个假设的情况下, 方程(5.3.32)是抛物型的, 而在方程(5.3.30)的情况时方程(5.3.35)是双曲型的并有三条实特征线。因此, 在Ng 和 Spalding 方法与 Bradshaw 方法之间还有一个重要差别, 例如前者采用抛物型方程组而后者使用双曲型方程组。

Nee 和 Kovaszny 法(1968)采用涡流粘性方法, 但有点不同于已叙述过的几个方法。按照 NK 法, 假定用下述速率方程来控制总湍流粘性 $n=\nu+\varepsilon_m$:

$$u \frac{\partial n}{\partial x} + v \frac{\partial n}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left(n \frac{\partial n}{\partial y} \right) + A(n-\nu) \frac{\partial u}{\partial y} - B \frac{n(n-\nu)}{y^2} \quad (5.3.47)$$

这里 A 和 B 是通用常数($A=0.133, B=0.8$)。但是 NK 法没有透彻地研究过—它不像 CS、MH、NP 法和 BF 法—它的精确度还没有确定。

在途径 A 的讨论中所研究的传输方程法中, Bradshaw法对各种各样的流动引进了透彻的研究并发现是很精确的, 迄今该方法已推广到带有热量交换的不可压和可压缩流动及非定常三维流,(参看Bradshaw 和 Ferriss, (1972))Bradshaw本人把他的方法推广到无限掠翼(1971b)。Nash 用稍微不同的假设推广到全三维不可压流动。关于 Nash 计算的进一步细

节请参看 Nash 和 Patel 的书(1972)。Wesseling 和 Lindhout(1971)把 Bradshaw 法推广到了全三维不可压流动。

迄今只对包括附面层流动及自由剪切流动的不可压流研究了 Ng-Spalding 法(见 Rodi 和 Spalding(1970)); 也发现它是很精确的。Jones-Launder 法对附面层流动没有很好研究; 但发现它对自由剪切流是很精确的。关于细节请看 Launder 等人(1972)著作。

途径 B。Donaldson 和他的助手(这儿称作 Donaldson 法, 1968, 1972)、Harlow 和他的助手(例如 1967)、Hanjalic 和 Launder(1972)的方法都属于途径 B 的方法。本节将讨论 Donaldson 法和 Hanjalic-Launder 法。

Donaldson 法。像在途径 A 中一样, 为了封闭由方程(5.3.23)给定的系统, 必须对该方程中的未知条件做 4 个假设:

1. 速度扩散项 $(\partial/\partial x_K(\overline{u_i' u_j' u_K'}))$ 的模拟, Donaldson 假定

$$\overline{u_i' u_j' u_K'} = -q l \left(\frac{\partial R_{ij}}{\partial x_K} + \frac{\partial R_{jK}}{\partial x_i} + \frac{\partial R_{Ki}}{\partial x_j} \right) \quad (5.3.48)$$

2. 压力扩散项 $(1/\rho)(\partial/\partial x_j)(\overline{p u_i'})$ 的模拟。Donaldson 使用推广的梯度扩散模型——方程(5.3.28)来模拟这一项并写成

$$(1/\rho)(\overline{p u_i'}) = -q l (\partial R_{iK}/\partial x_K) \quad (5.3.49)$$

3. 耗散项 ϕ 的模拟。Donaldson 使用给定形式 $\nu [(\partial u_i'/\partial x_K)(\partial u_j'/\partial x_K)]$ 的耗散项并使用 Glushko 模型(1966)

$$\nu \left(\frac{\partial u_i'}{\partial x_K} \frac{\partial u_j'}{\partial x_K} \right) = \nu \frac{R_{ij}}{\lambda^2} \quad (5.3.50)$$

这里 λ 是换算长度。

4. 趋于各向同性的项

$$\frac{p}{\rho} \left(\frac{\partial u_i'}{\partial x_i} + \frac{\partial u_i'}{\partial x_j} \right)$$

的模拟。Donaldson 使用 Rotta(1951)给出的表达式并把该项写成形式

$$\frac{p}{\rho} \left(\frac{\partial u_i'}{\partial x_i} + \frac{\partial u_i'}{\partial x_j} \right) = -\frac{q}{l} \left(\frac{q^2}{3} \delta_{ij} - R_{ij} \right) \quad (5.3.51)$$

取方程(5.3.48)——(5.3.51)中的长度尺度 l 和 λ 如下(Donaldson 和 Sullivan, 1972):

$$\begin{aligned} l_i &= a^{1/2} y, & 0 < y < (c_1/a^{1/2})\delta \\ l_0 &= c_1 \delta, & (c_1/a^{1/2})\delta \leq y < \delta \end{aligned} \quad (5.3.52a)$$

和

$$\lambda = l/(a + b R t)^{1/2}, \quad (5.3.52b)$$

和前面一样, 这里 $R_i = q l / \nu$ 。把上述表达式中的常数取为 $a = 2.5$, $b = 0.125$, $c_1 = 0.064$ 。

方程(5.3.52a)中的 δ 是当 u 为外缘速度的 99% 时的 y 值。

把封闭性假设——方程(5.3.48)——(5.3.52)代入方程(5.3.23)并用附面层近似，我们得到二维流动的下述方程：

$$\frac{D}{Dt}(\overline{u'^2}) = \frac{q}{l} \left(\frac{q^2}{3} - \overline{u'^2} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(q l \frac{\partial \overline{u'^2}}{\partial y} \right) - 2 \overline{u'v'} \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} + \nu \frac{\partial^2}{\partial y^2} (\overline{u'^2}) - 2\nu \frac{\overline{u'^2}}{\lambda^2} \quad (5.3.53)$$

$$\frac{D}{Dt}(\overline{v'^2}) = \frac{q}{l} \left(\frac{q^2}{3} - \overline{v'^2} \right) + 5 \frac{\partial}{\partial y} \left(q l \frac{\partial}{\partial y} (\overline{v'^2}) \right) + \nu \frac{\partial^2}{\partial y^2} (\overline{v'^2}) - 2\nu \frac{\overline{v'^2}}{\lambda^2} \quad (5.3.54)$$

$$\frac{D}{Dt}(\overline{w'^2}) = \frac{q}{l} \left(\frac{q^2}{3} - \overline{w'^2} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(q l \frac{\partial \overline{w'^2}}{\partial y} \right) + \nu \frac{\partial^2}{\partial y^2} (\overline{w'^2}) - 2\nu \frac{\overline{w'^2}}{\lambda^2} \quad (5.3.55)$$

$$\frac{D}{Dt}(\overline{u'v'}) = -\frac{q}{l} (\overline{u'v'}) + 3 \frac{\partial}{\partial y} \left[q l \frac{\partial}{\partial y} (\overline{u'v'}) \right] - \overline{v'^2} \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} + \nu \frac{\partial^2}{\partial y^2} (\overline{u'v'}) - 2\nu \frac{\overline{u'v'}}{\lambda^2} \quad (5.3.56)$$

为了方便，我们在这里用

$$q^2 = \frac{1}{2} (\overline{u'^2} + \overline{v'^2} + \overline{w'^2}) \quad (5.3.57)$$

定义 q^2 。注意，这与在 1.4 节里较早的定义差一个因子 2。

方程(5.3.53)——(5.3.56) 包含 6 个未知数， $\bar{u}$ 、 $\bar{v}$ 、 $\overline{u'^2}$ 、 $\overline{v'^2}$ 、 $\overline{w'^2}$ 和 $\overline{u'v'}$ ，因此我们还需要两个方程，它们来自平均连续性方程和平均动量方程，对于不可压流可以写成

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} = 0 \quad (5.3.58)$$

$$\frac{D\bar{u}}{Dt} = -\frac{1}{\rho} \frac{d\bar{p}}{dx} + \nu \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial y^2} - \frac{\partial}{\partial y} (\overline{u'v'}) \quad (5.3.59)$$

Hanjalic-Launder 法。用只包括二阶相关项的下述形式代替三重相关项：

$$\overline{-u'_i u'_j u'_k} = C_s \frac{K}{\phi} \left(R_{il} \frac{\partial R_{jk}}{\partial x_l} + R_{jl} \frac{\partial R_{ki}}{\partial x_l} + R_{kl} \frac{\partial R_{ij}}{\partial x_l} \right) \quad (5.3.60)$$

这里 C_s 是常数， $K = q^2/2$ 。

Hanjalic 和 Launder 略去压力扩散项并以两个分离部分的形式表示压力应变率相关项(或趋于各向同性项)。例如，他们写

$$\frac{p}{\rho} \left(\frac{\partial u'_i}{\partial x_j} \right) = \psi_{ij,1} + \psi_{ij,2} \quad (5.3.61)$$

第一部分的模式是 Rotta(1951)给出的：

$$(\psi_{ij} + \psi_{ji})_1 = -C_{\psi 1} \left(\frac{\phi}{K} \right) \left(R_{ij} - \frac{2}{3} \delta_{ij} K \right) \quad (5.3.62)$$

把压力应变项的第二部分 $\psi_{ij,2}$ 写成

$$\psi_{ij,2} = \left(\frac{\partial \bar{u}_l}{\partial x_m} \right) a_{lj}^{mi} \quad (5.3.63)$$

这里

$$\begin{aligned} a_{lj}^{mi} = & \alpha \overline{u_m' u_l' u_j'} \delta_{lj} + \beta (\overline{u_m' u_l' u_j'} \delta_{ij} + \overline{u_m' u_j' u_l'} \delta_{il} + \overline{u_l' u_j' u_m'} \delta_{ml} + \overline{u_l' u_m' u_j'} \delta_{mj}) \\ & + (\gamma \delta_{ml} \delta_{lj} + \eta [\delta_{ml} \delta_{ij} + \delta_{mi} \delta_{lj}]) K + \xi (\overline{u_m' u_j' u_l'} + \overline{u_m' u_l' u_j'}) / K \\ & + c_{\psi 2} (\overline{u_m' u_l' u_j'}) / K \end{aligned} \quad (5.3.64)$$

系数 $\alpha, \beta, \gamma, \eta, \xi$ 和 $c_{\psi 2}$ 是常数, 它们存在下述关系式:

$$\begin{aligned} \alpha &= (10 - 8c_{\psi 2}) / 11, & \beta &= -(2 - 6c_{\psi 2}) / 11, \\ \gamma &= -(4 - 12c_{\psi 2}) / 55, & \eta &= (6 - 18c_{\psi 2}) / 55, \\ \xi &= -c_{\psi 2}. \end{aligned} \quad (5.3.65)$$

如果在方程(5.3.23)里引入封闭性假设(5.3.60)——(5.3.56)则可把雷诺切应力模拟方程的最后形式写成

$$\begin{aligned} \frac{D}{Dt} R_{ij} = & - \left[R_{jK} \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_K} + R_{iK} \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_K} \right] - \frac{2}{3} \delta_{ij} \phi - c_{\psi 1} \frac{\phi}{K} \left(R_{ij} - \delta_{ij} \frac{2K}{3} \right) \\ & + (\psi_{ij} + \psi_{ji})_2 + c_s \frac{\partial}{\partial x_K} \left[\frac{K}{\phi} \left[R_{il} \frac{\partial R_{jK}}{\partial x_l} + R_{jl} \frac{\partial R_{Ki}}{\partial x_l} + R_{Kl} \frac{\partial R_{ij}}{\partial x_l} \right] \right] \end{aligned} \quad (5.3.66)$$

为了简便, 在这里方程(5.3.63)——(5.3.65)模拟的压力应变项的第二部分用 $(\psi_{ij} + \psi_{ji})_2$ 表示。

方程(5.3.66)包含三个常数 $c_s, c_{\psi 1}$ 和 $c_{\psi 2}$ 。由实验数据得到后两个常数, 它们的值分别为 2.8 和 0.45, 稍后将讨论常数 c_s 。

由传输方程(5.3.41)得到耗散项 ϕ 。对这个方程的右端项作了下述封闭性假设: 用

$$2\nu \left(\frac{\partial u_i'}{\partial x_l} \frac{\partial u_K'}{\partial x_l} + \frac{\partial u_l'}{\partial x_i} \frac{\partial u_l'}{\partial x_K} \right) = \left(c_{\phi 1} \frac{\overline{u_i' u_K'}}{K} + \bar{c}_{\phi 1} \delta_{iK} \right) \quad (5.3.67)$$

模拟右端的第一项——生成项, 这里 $c_{\phi 1}$ 和 $\bar{c}_{\phi 1}$ 是常数。事实上, 当用 $\partial \bar{u} / \partial x_K$ 乘方程(5.3.67)时含 $\bar{c}_{\phi 1}$ 的项消去了, 因而不需要进一步考虑它。

将方程(5.3.41)右端第二和第三项合成一项用

$$2 \left\{ \nu \frac{\partial u_i'}{\partial x_K} \frac{\partial u_l'}{\partial x_l} \frac{\partial u_K'}{\partial x_l} + \left(\nu \frac{\partial^2 u_i'}{\partial x_K \partial x_l} \right)^2 \right\} = c_{\phi 2} \frac{\phi^2}{K} \quad (5.3.68)$$

模拟。用

$$\overline{u_K' \phi'} = -\frac{c_\phi K}{\phi} \overline{u_K' u_l'} \frac{\partial \phi}{\partial x_l} \quad (5.3.69)$$

模拟第四项——它计算出由于速度脉动所造成的 ϕ 的扩散。略去表示由压力脉动造成 ϕ 的扩散性传输的第五项。

用这些封闭性条件可以把关于耗散的模拟传输方程的最终形式写成

$$\frac{D\phi}{Dt} = -c_{\phi 1} \frac{\phi R_{iK}}{K} \frac{\partial u_i}{\partial x_K} - c_{\phi 2} \frac{\phi^2}{K} + c_\phi \frac{\partial}{\partial x_K} \left(\frac{K}{\phi} R_{Kl} \frac{\partial \phi}{\partial x_l} \right) \quad (5.3.70)$$

通过参照实验数据得到的常数 $c_{\phi 1}=1.45$, $c_{\phi 2}=20$, 稍后将讨论数 c_ϕ 。

在二维附面层流动里, 切应力 $-\overline{u'v'}$ 通常是唯一的雷诺应力, 它对平均流动的发展方面发挥有效的直接影响。由于这个原因, 在采用上述湍流模型对实际附面层计算时, Hanjalic-Launder 不是求解关于每个法向应力的传输方程, 而是提出关于它们的和的方程 (精确地说是和的一半) ——即湍流能量方程。此外, 留在动能方程中的法向应力项, 切应力和耗散认为是正比于湍流能量。

用了这些简化他们从方程(5.3.66)得到二维附面层流动的下述模拟切应力和湍流能量方程

$$\begin{aligned} \frac{D}{Dt} \overline{u'v'} = & \left[(\beta + \alpha - 1) \overline{v'^2} + \beta \overline{u'^2} + (\eta + \gamma) K - 2c_{\phi 2} \frac{(\overline{u'v'})^2}{K} \right] \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \\ & - c_{\phi 1} \frac{\phi}{K} \overline{u'v'} + c_\phi \frac{\partial}{\partial y} \left[\frac{K}{\phi} \left(\overline{u'v'} \frac{\partial \overline{v'^2}}{\partial y} + 2 \overline{v'^2} \frac{\partial \overline{u'v'}}{\partial y} \right) \right] \end{aligned} \quad (5.3.71)$$

$$\frac{DK}{Dt} = -\overline{u'v'} \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} - \phi + c_\phi \frac{\partial}{\partial y} \left[\frac{K}{\phi} \left(\overline{v'^2} \frac{\partial}{\partial y} (K + \overline{v'^2}) + \overline{u'v'} \frac{\partial \overline{u'v'}}{\partial y} \right) \right] \quad (5.3.72)$$

除 ϕ 之外 (下面提供关于它的传输方程), 方程(5.3.71)和(5.3.72)包含 $\overline{u'^2}$ 和 $\overline{v'^2}$ 两个未知数。Hanjalic 和 Launder 借助下述关系式消去它们:

$$\left(\frac{1}{2K} \right) \left(\overline{u'^2} - \frac{2}{3} K \right) = 0.135, \quad (5.3.73a)$$

$$\left(\frac{1}{2K} \right) \left(\overline{v'^2} - \frac{2}{3} K \right) = -0.085. \quad (5.3.73b)$$

他们还用