21世纪高职高专系列规划教材
高职高专"十二五"规划教材

文化课系列

YINGYONG SHUXUE

应用数学（下册）

主　编◎毛珍玲　屈寅春
主　审◎顾惠明

北京师范大学出版集团
BEIJING NORMAL UNIVERSITY PUBLISHING GROUP
北京师范大学出版社

21世纪高职高专系列规划教材

高职高专“十二五”规划教材

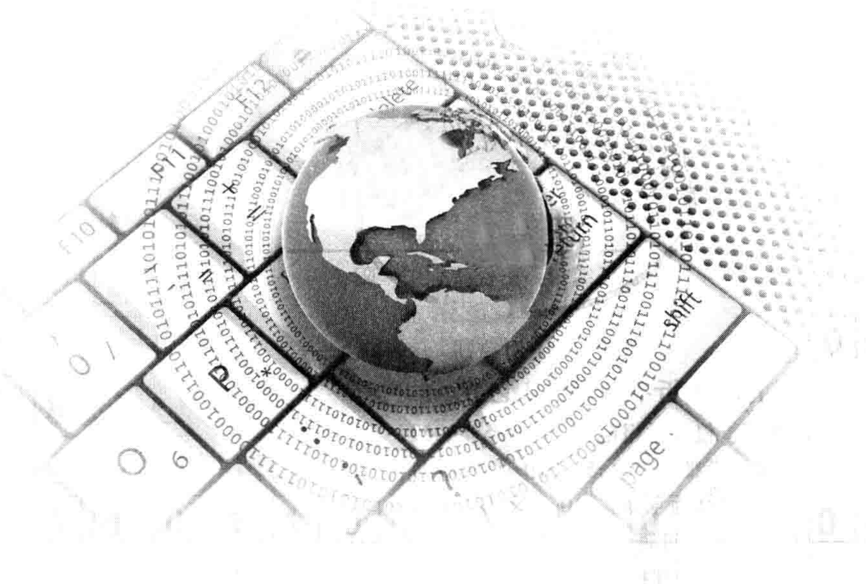
文化课系列

YINGYONG SHUXUE

应用数学（下册）

主　编◎毛珍玲　屈寅春

主　审◎顾惠明



北京师范大学出版集团
BEIJING NORMAL UNIVERSITY PUBLISHING GROUP
北京师范大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

应用数学.下册／毛珍玲，屈寅春主编.—北京：北京师范大学出版社，2012.2

（高职高专“十二五”规划教材）

ISBN 978-7-303-14016-9

Ⅰ.①应… Ⅱ.①毛…②屈… Ⅲ.①应用数学－高等职业教育－教材 Ⅳ.①O29

中国版本图书馆CIP数据核字（2012）第015590号

营销中心电话　010-58802755 58800035
北师大出版社职业教育分社网　http://zjfs.bnup.com.cn
电子信箱　bsdzyjy@126.com

出版发行：北京师范大学出版社 www.bnup.com.cn
北京新街口外大街19号
邮政编码：100875

印　　刷：北京京师印务有限公司
经　　销：全国新华书店
开　　本：184 mm × 260 mm
印　　张：27.25
字　　数：580千字
版　　次：2012年2月第1版
印　　次：2012年2月第1次印刷
定　　价：48.50元

策划编辑：王松浦　　责任编辑：王松浦　周　阳
美术编辑：高　霞　　装帧设计：李尘工作室
责任校对：李　菡　　责任印制：孙文凯

前　言

本教材是在“系统改革高职课程体系”的大背景下，为了适应高职教育培养高技能人才的目标，适应高职教育大众化发展趋势的需求，应高职教育基础课全面改革的要求而编写的.

本套教材共两本，分上、下两册，本书为下册. 本套教材可作为高职高专工科类、经管类各专业的基础数学课程的教材，也可作为“专转本”“专升本”的学习教材或参考用书.

按照“进一步优化课程体系、降低理论要求、扩大知识容量、增加工程氛围、加强实际应用”的原则，本教材在编写中注意体现以下特点：

(1)注重优化课程体系，把握好内容的深度和广度，适当降低理论要求，增加知识容量，以适应不同层次、不同专业学生的学习需求.

(2)注重理论联系实际，以案例引入知识，知识的展开由浅入深、由易到难，注重培养学生的数学素质和应用意识，激发学生的学习兴趣.

(3)注重通过数学软件、数学建模的教学，更好的培养学生的创新能力和应用数学知识、数学方法解决实际问题的能力.

(4)内容叙述力求简明扼要，通俗易懂，深入浅出，富于启发性.

(5)为了巩固知识、引导应用、扩充知识面，书中除配有大量的例题、习题及总复习题外，本书每章末还附有内容小结、学习指导和阅读材料.

本书由无锡职业技术学院毛珍玲、屈寅春、杨先伟主编，傅小波任副主编，顾惠明主审. 其中第一、二章由田星编写，第三、四章由刘宗宝编写，第五章由吴吟吟编写，第六章由屈寅春编写，第七、八章由王先婷编写，第九、十三章由傅小波编写，第十章由毛珍玲编写，第十一、十二章由杨先伟编写，第十四章由朱永强、黄飞编写.

由于时间仓促，编者水平有限，书中缺点和错误之处在所难免，恳请读者批评指正.

编者

2011 年 12 月

目录

第一章 常微分方程 ……………… (1)

§1.1 微分方程的基本概念 ……………… (1)

§1.2 一阶微分方程 ……………… (4)

§1.3 可降阶的高阶微分方程 ……………… (10)

§1.4 二阶线性微分方程 …… (12)

本章小结 ……………… (20)

复习题一 ……………… (20)

阅读材料 ……………… (22)

第二章 向量与空间解析几何 …… (24)

§2.1 空间直角坐标系与空间向量 ……………… (24)

§2.2 向量的数量积和向量积 ……………… (31)

§2.3 空间平面与直线的方程 ……………… (36)

§2.4 曲面与空间曲线及其方程 ……………… (46)

本章小结 ……………… (55)

复习题二 ……………… (56)

阅读材料 ……………… (58)

第三章 多元函数微分学 ……………… (60)

§3.1 多元函数的基本概念 ……………… (60)

§3.2 偏导数 ……………… (66)

§3.3 全微分 ……………… (70)

§3.4 多元复合函数与隐函数的微分法 ……………… (75)

§3.5 偏导数的几何应用 … (79)

§3.6 多元函数的极值和最值 ……………… (83)

本章小结 ……………… (89)

复习题三 ……………… (90)

阅读材料 ……………… (91)

第四章 多元函数积分学 ……………… (94)

§4.1 二重积分的概念与性质 ……………… (94)

§4.2 二重积分的计算方法 ……………… (98)

§4.3 二重积分的应用 …… (106)

本章小结 ……………… (112)

复习题四 ……………… (114)

阅读材料 ……………… (115)

第五章 级 数 ……………… (117)

§5.1 数项级数 ……………… (117)

§5.2 数项级数的审敛法 ……………… (121)

§5.3 幂级数的概念与性质 ……………… (129)

§5.4 函数的幂级数展开式 ……………… (134)

§5.5 付里叶级数 ……………… (140)

本章小结 ……………… (149)

复习题五 ……………… (149)

阅读材料 ……………… (151)

第六章 拉普拉斯变换 …………(153)

§6.1 拉普拉斯变换的概念与性质 ……………………(153)

§6.2 拉氏变换的逆变换 …(161)

§6.3 拉氏变换应用举例 …(163)

本章小结 ……………………(168)

复习题六 ……………………(168)

阅读材料 ……………………(169)

第七章 行列式与矩阵 …………(170)

§7.1 行列式 ………………(170)

§7.2 克莱姆法则 …………(178)

§7.3 矩阵的概念及运算 …(181)

§7.4 逆矩阵 ………………(189)

§7.5 矩阵的初等变换与矩阵的秩 ……………………(192)

本章小结 ……………………(196)

复习题七 ……………………(196)

阅读材料 ……………………(199)

第八章 线性方程组 ……………(200)

§8.1 高斯消元法 …………(200)

§8.2 n维向量及向量组的线性相关性 …………(204)

§8.3 线性方程组的解的判定 ……………………(211)

§8.4 线性方程组解的结构 ……………………(217)

本章小结 ……………………(223)

复习题八 ……………………(224)

阅读材料 ……………………(225)

第九章 特征值、特征向量及二次型 ……………………(227)

§9.1 矩阵的特征值和特征向量 ……………………(227)

§9.2 相似矩阵 ……………(231)

§9.3 正交矩阵与实对称矩阵对角化 ………………(235)

§9.4 二次型 ………………(241)

§9.5 正定二次型 …………(249)

本章小结 ……………………(251)

复习题九 ……………………(254)

阅读材料 ……………………(255)

第十章 线性规划初步 …………(257)

§10.1 线性规划问题的数学模型 ………………(257)

§10.2 线性规划问题的图解法 ……………………(262)

§10.3 单纯形法初步 ……(264)

本章小结 ……………………(272)

复习题十 ……………………(273)

阅读材料 ……………………(274)

第十一章 概率初步 ……………(276)

§11.1 排列与组合 ………(276)

§11.2 随机事件与样本空间 ……………………(279)

§11.3 概率的定义 ………(282)

§11.4 概率的加法公式和乘法公式 ………………(285)

§11.5 事件的独立性与伯努利概型 ………………(290)

§11.6 随机变量及其分布函数 ……………………(292)

§11.7 随机变量的分布 …(294)

§11.8 随机变量的数字特征 ……………………(305)

本章小结 ……………………(313)

复习题十一 …………………(314)

阅读材料 ……………………(316)

第十二章 数理统计 ……………(318)

§12.1 数理统计及其相关概念 ……………………(318)

§12.2 参数估计 …………(321)

§12.3 假设检验 …………(328)

本章小结 ……………………(332)

复习题十二 …………………(333)

第十三章 数值计算 …………… (335)
§13.1 数值计算的一般概念 …………………… (335)
§13.2 误差的基本概念 … (336)
§13.3 方程的数值解法 … (340)
§13.4 解线性方程组的直接法 …………………… (350)
§13.5 数据插值 ………… (354)
§13.6 最小二乘拟合 …… (360)
§13.7 数值积分 ………… (364)
本章小结 …………………… (368)
复习题十三 ………………… (370)
阅读材料 …………………… (370)
第十四章 数学建模 …………… (372)
§14.1 数学建模简介 …… (372)
§14.2 数学建模实例 …… (375)
阅读材料 …………………… (388)
附表一 泊松分布表 …………… (390)
附表二 标准正态分布表 ……… (391)
附表三 χ^2 分布表 …………………… (392)
附表四 T 分布表 …………………… (393)
参考答案 ……………………… (394)

第一章　常微分方程

微分方程是数学理论(特别是微积分)联系实际的重要渠道之一.它是研究自然科学、工程技术、生物技术、农业、经济学等诸多问题的有力工具,因而微分方程具有重要的应用价值.本章主要介绍常微分方程的一些基本概念,以及几种常用的微分方程的最基本解法.

§1.1　微分方程的基本概念

下面我们通过两个具体的例题来说明微分方程的基本概念.

例 1　一条曲线通过点(1, 2),且在该曲线上任一点 $M(x, y)$ 处的切线的斜率为 $2x$,求这条曲线的方程.

解　设所求的曲线方程为 $y=y(x)$,则根据导数的几何意义可知,未知函数 $y=y(x)$ 应满足下面的关系:

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=2x, \tag{1}$$

且当 $x=1$ 时,$y=2$.即 $y(1)=2$.

对(1)式两端积分,得

$$y=\int 2x\mathrm{d}x=x^2+C, \tag{2}$$

其中 C 是任意常数.将 $y(1)=2$ 代入,得 $C=1$.将 $C=1$ 代入(2)式,即得所求曲线方程为

$$y=x^2+1.$$

例 2　一质量为 m 的质点,从高度为 h 处,做自由落体运动,试求其运动方程.

解　从高度为 h 处下落的自由落体,离地面高度 s 的变化规律为 $s=h-\frac{1}{2}gt^2$,其中 g 为重力加速度.这个规律是怎么得到的呢?下面我们给出推导过程.

取质点下落的铅垂线为 s 轴,它与地面的交点为原点,并规定正向朝上.设质点在时刻 t 的位置在 $s(t)$(如图 1-1 所示).因为质点只受方向向下的重力的作用(空气阻力忽略不计),由牛顿第二定律 $F=ma$,得

$$m\frac{\mathrm{d}^2s(t)}{\mathrm{d}t^2}=-mg,$$

即

$$\frac{\mathrm{d}^2s(t)}{\mathrm{d}t^2}=-g. \tag{3}$$

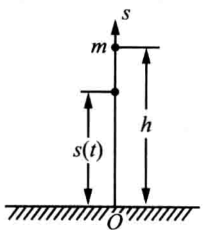


图 1-1

根据质点由静止状态自由下降的假设,初始速度为 0,所以,

$s=s(t)$ 还应满足下列条件

$$s\Big|_{t=0}=h,\ \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}\Big|_{t=0}=0. \tag{4}$$

对(3)式两边积分，得

$$\frac{\mathrm{d}s(t)}{\mathrm{d}t}=-g\int\mathrm{d}t=-gt+C_1, \tag{5}$$

两边再积分，得

$$s(t)=\int(-gt+C_1)\mathrm{d}t=-\frac{1}{2}gt^2+C_1t+C_2, \tag{6}$$

其中 C_1，C_2 均为任意常数.

将条件(4)代入(5)，(6)式，得 $C_1=0$，$C_2=h$. 于是所求的运动方程为

$$s(t)=-\frac{1}{2}gt^2+h.$$

定义 凡表示未知函数、未知函数的导数与自变量之间的关系的方程，叫作**微分方程**. 未知函数是一元函数的方程为**常微分方程**，简称为**微分方程**.

微分方程中未知函数的导数的最高阶数，称为**微分方程的阶**.

例如，$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=f(x)$ 是一阶微分方程，$y''-3y'+y=3x+1$ 是二阶微分方程，$y^{(4)}+x^3y'''-x^2y''+xy'-y=\cos x$ 是四阶微分方程.

一般地，n 阶微分方程的形式是

$$F(x,\ y,\ y',\ \cdots,\ y^{(n)})=0, \tag{7}$$

其中 F 是 $n+2$ 个变量的函数. 这里必须指出，在方程(7)中 $y^{(n)}$ 是必须出现的，而 x，y，y'，$\cdots$，$y^{(n-1)}$ 等变量则可以不出现. 例如 n 阶微分方程 $y^{(n)}+1=0$ 中除 $y^{(n)}$ 外其他变量都没有出现.

二阶及二阶以上的微分方程统称为**高阶微分方程**.

未知函数及其各阶导数都以一次形式出现的微分方程称为**线性微分方程**，否则，称为**非线性微分方程**.

由前面的例子我们看到，在研究某些实际问题时，首先要建立微分方程，然后找出满足微分方程的函数，即找出这样的函数，把这个函数代入微分方程能使方程成为自变量的恒等式，则称这个函数为**微分方程的解**.

例如，例 1 中 $y=x^2+C$，(C 为任意常数)，$y=x^2+1$ 都是微分方程 $y'=2x$ 的解.

如果微分方程的解中含有相互独立的任意常数，且个数与方程的阶数相同，则称为**微分方程的通解**.

例如，$y=x^2+C$ 是微分方程 $y'=2x$ 的通解.

由于通解中含有任意常数，所以它还不能完全确定地反映某一客观事物的规律性，要完全确定地反映某一客观事物的规律性，就必须确定这一常数的值. 为此，要根据问题的实际情况，提出确定这些常数的条件. 如在例 1 中的条件 $y(1)=2$、例 2 中的条件(4)，就是这样的条件. 我们将上述这种条件叫作**初始条件**.

在微分方程的通解中，由初始条件确定任意常数而得到的解称为**微分方程的特解**.

如例 1 中的 $y=x^2+1$ 是微分方程 $y'=2x$ 满足初始条件 $y(1)=2$ 的特解.

求微分方程满足初始条件的特解的问题，称为**初值问题**.

微分方程的解的图像是一条曲线，叫作**微分方程的积分曲线**. 通解的图像是一族曲线，称为**积分曲线族**.

特解的图像是积分曲线族中一条特定的积分曲线.

例 3 验证函数 $y=C_1\mathrm{e}^{2x}+C_2\mathrm{e}^{-2x}$（$C_1$，$C_2$ 为任意常数）是方程 $y''-4y=0$ 的通解，并求满足初始条件 $y|_{x=0}=0$，$y'|_{x=0}=1$ 的特解.

解 $$y'=2C_1\mathrm{e}^{2x}-2C_2\mathrm{e}^{-2x},\ y''=4C_1\mathrm{e}^{2x}+4C_2\mathrm{e}^{-2x},$$

将 y，y'' 代入微分方程，得

$$y''-4y=4(C_1\mathrm{e}^{2x}+C_2\mathrm{e}^{-2x})-4(C_1\mathrm{e}^{2x}+C_2\mathrm{e}^{-2x})\equiv 0,$$

所以，函数 $y=C_1\mathrm{e}^{2x}+C_2\mathrm{e}^{-2x}$ 是所给微分方程的解. 因为 $\dfrac{\mathrm{e}^{2x}}{\mathrm{e}^{-2x}}=\mathrm{e}^{4x}\neq$ 常数，且解中含有两个独立的任意常数 C_1 和 C_2，又因为微分方程是二阶的，即任意常数的个数与方程的阶数相同，所以它是该方程的通解.

将初始条件 $y|_{x=0}=0$，$y'|_{x=0}=1$ 分别代入 y 及 y' 中，得

$$\begin{cases}C_1+C_2=0,\\2C_1-2C_2=1,\end{cases}$$

解得 $C_1=\dfrac{1}{4}$，$C_2=-\dfrac{1}{4}$. 于是所求特解为 $y=\dfrac{1}{4}(\mathrm{e}^{2x}-\mathrm{e}^{-2x})$.

练　习　1.1

1. 指出下列方程中哪些是微分方程？并说明它们的阶数.

(1) $\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}-y=2x$；　　(2) $y^2-3y+x=0$；

(3) $x(y')^2+y=1$；　　(4) $(x^2+y^2)\mathrm{d}x-xy\mathrm{d}y=0$.

2. 判断下列方程右边所给函数是否为该方程的解？如果是解，是通解还是特解？

(1) $xy'=2y$，$y=5x^2$；

(2) $y''+y=0$，$y=3\sin x-4\cos x$；

(3) $y''-2y'+y=0$，$y=x^2\mathrm{e}^x$；

(4) $(x+y)\mathrm{d}x=-x\mathrm{d}y$，$y=\dfrac{(C-x^2)}{2x}$（$C$ 为任意常数）.

习　题　1.1

1. 在下列各题中，验证所给二元方程所确定的函数为所给微分方程的解.

(1) $y=C_1\cos 2x+C_2\sin 2x$，$y''+4y=0$，（C_1，C_2 为任意常数）；

(2) $y=C_1\mathrm{e}^{2x}+C_2\mathrm{e}^{-2x}$，$y''-4y=0$，（$C_1$，$C_2$ 为任意常数）；

(3) $(x-2y)y'=2x-y$，$x^2-xy+y^2=C$，（C 为任意常数）.

2. 在下列各问题中，确定函数关系式中所含的参数，使函数满足所给定的初始条件.

(1) $x^2 - y^2 = C$，$y\Big|_{x=0} = 5$；

(2) $y = (C_1 + C_2 x)e^{2x}$，$y\Big|_{x=0} = 0$，$y'\Big|_{x=0} = 1$.

3. 写出由下列条件所确定的曲线所满足的微分方程.

(1) 曲线在点 (x, y) 处的切线斜率等于该点横坐标的平方；

(2) 曲线上点 $P(x, y)$ 处的法线与 x 轴的交点为 Q，且线段 PQ 被 y 轴平分.

4. 用微分方程表示一物理命题：某种气体的气压 P 对于温度 T 的变化率与气压成正比，与温度的平方成反比.

§1.2 一阶微分方程

本节我们讨论一阶微分方程

$$y' = f(x, y)(\text{或 } F(x, y, y') = 0) \tag{1}$$

的一些解法.

一阶微分方程有时也写成如下的对称形式

$$P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0. \tag{2}$$

在方程(2)中，变量 x，y 对称，所以它既可看做是以 x 为自变量，y 为未知函数的方程 $\dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{P(x, y)}{Q(x, y)}$（这时 $Q(x, y) \neq 0$），也可看做是以 y 为自变量，x 为未知函数的方程 $\dfrac{dx}{dy} = -\dfrac{Q(x, y)}{P(x, y)}$（这时 $P(x, y) \neq 0$）.

一、可分离变量的一阶微分方程

一般地，如果一个一阶微分方程能写成

$$g(y)dy = f(x)dx \tag{3}$$

的形式，即能把微分方程写成一端只含有 y 的函数和 dy，另一端只含有 x 的函数和 dx，则称其为**可分离变量的微分方程**.

其特点是：方程的两边都仅含一个变量，这一形式可以看成是微分形式 $dy = f(x)dx$ 的推广.

其解法是：

对(3)式两边同时求不定积分，即

$$\int g(y)dy = \int f(x)dx,$$

依次记 $G(y)$，$F(x)$ 为 $g(y)$，$f(x)$ 的一个原函数，于是有

$$G(y) = F(x) + C,$$

即为方程(3)的通解.

例 1 求微分方程$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=2xy$的通解.

解 这是一个可分离变量的微分方程，分离变量得：$\dfrac{\mathrm{d}y}{y}=2x\mathrm{d}x$，

两边积分，得
$$\int\frac{\mathrm{d}y}{y}=\int 2x\mathrm{d}x,$$

即
$$\ln|y|=x^2+C_1 \text{ 或 } y=\pm \mathrm{e}^{x^2+C_1}=\pm \mathrm{e}^{C_1}\cdot \mathrm{e}^{x^2}.$$

因为C_1为任意常数，所以$\pm \mathrm{e}^{C_1}$也是任意常数，把$\pm \mathrm{e}^{C_1}$记作C. 代入后得方程的通解
$$y=C\mathrm{e}^{x^2}.$$

例 2 求微分方程$y(1+x^2)\mathrm{d}y+x(1+y^2)\mathrm{d}x=0$满足条件$y\Big|_{x=1}=1$的特解.

解 这是一个可分离变量的微分方程，分离变量得$\dfrac{y\mathrm{d}y}{1+y^2}=-\dfrac{x\mathrm{d}x}{1+x^2}$，

两边积分，得
$$\int\frac{y\mathrm{d}y}{1+y^2}=-\int\frac{x\mathrm{d}x}{1+x^2},$$

即
$$\frac{1}{2}\ln(1+y^2)=-\frac{1}{2}\ln(1+x^2)+\frac{1}{2}\ln C.$$

故方程的通解为$(1+x^2)(1+y^2)=C$.

将$y\Big|_{x=1}=1$代入通解表达式，得$C=4$.

因此，所求方程的特解为 $(1+x^2)(1+y^2)=4$.

例 3 求微分方程$(1+\mathrm{e}^x)yy'=\mathrm{e}^x$满足初始条件$y(0)=0$的特解.

解 这是一个可分离变量的微分方程，分离变量，得
$$y\mathrm{d}y=\frac{\mathrm{e}^x}{1+\mathrm{e}^x}\mathrm{d}x,$$

两边积分，$\displaystyle\int y\mathrm{d}y=\int\frac{\mathrm{e}^x}{1+\mathrm{e}^x}\mathrm{d}x$ 得$\dfrac{1}{2}y^2=\ln(1+\mathrm{e}^x)+C_1$，

即方程通解为 $y^2=2\ln(1+\mathrm{e}^x)+C$(其中$C=2C_1$).

由初始条件$y(0)=0$，得$C=-2\ln 2$.

因此，方程满足初始条件的特解为$y^2=2\ln(1+\mathrm{e}^x)-2\ln 2$.

二、一阶线性微分方程

如果一阶微分方程可化为
$$y'+P(x)y=Q(x) \tag{4}$$
的形式，即方程关于未知函数及其导数是线性的，而$P(x)$和$Q(x)$是已知连续函数，则称此方程为**一阶线性微分方程**. 当$Q(x)\not\equiv 0$时，称方程(4)为关于未知函数y，y'的**一阶非齐次线性微分方程**；反之，当$Q(x)\equiv 0$时即变为
$$y'+P(x)y=0, \tag{5}$$
称其为(4)所对应的**一阶齐次线性微分方程**.

1. 一阶齐次线性微分方程的通解

方程(5)是个可分离变量的方程，分离变量后得

$$\frac{\mathrm{d}y}{y}=-P(x)\mathrm{d}x,$$

两边积分，得

$$\ln y=-\int P(x)\mathrm{d}x+C,$$

式中$\int P(x)\mathrm{d}x$表示$P(x)$的一个原函数，于是一阶齐次线性微分方程(5)的通解为

$$y=C\mathrm{e}^{-\int P(x)\mathrm{d}x}, \tag{6}$$

其中C为任意常数.

2. 一阶非齐次线性微分方程的通解

比较方程(4)(5)，差别仅在(4)的等式右端是一个函数，根据函数的求导特点，试设(4)的解为

$$y=C(x)\cdot\mathrm{e}^{-\int P(x)\mathrm{d}x}, \tag{7}$$

即把齐次方程通解中的任意常数C改变为x的待定函数$C(x)$，然后求$C(x)$使之满足非齐次线性方程(4).

对(7)求导得 $y'=C'(x)\cdot\mathrm{e}^{-\int P(x)\mathrm{d}x}+C(x)[-P(x)]\mathrm{e}^{-\int P(x)\mathrm{d}x}$, (8)

将(7)(8)式代入(4)式，经整理后得

$$C'(x)=Q(x)\mathrm{e}^{\int P(x)\mathrm{d}x},$$

积分后得

$$C(x)=\int Q(x)\mathrm{e}^{\int P(x)\mathrm{d}x}\mathrm{d}x+C. \tag{9}$$

将(9)式代入(7)式，即得**一阶非齐次线性微分方程(4)的通解公式：**

$$y=\mathrm{e}^{-\int P(x)\mathrm{d}x}\left[\int Q(x)\mathrm{e}^{\int P(x)\mathrm{d}x}\mathrm{d}x+C\right],\ (C\text{为任意常数}). \tag{10}$$

上述通过把对应的齐次线性方程通解中的任意常数C改变为待定函数$C(x)$，然后求出非齐次线性方程通解的方法，称为**常数变易法**.

将(10)式改写成下面的形式：

$$y=C\cdot\mathrm{e}^{-\int P(x)\mathrm{d}x}+\mathrm{e}^{-\int P(x)\mathrm{d}x}\int Q(x)\mathrm{e}^{\int P(x)\mathrm{d}x}\mathrm{d}x.$$

上式右端第一项恰是对应的齐次线性方程(5)的通解；第二项可由非齐次线性方程(4)的通解(10)中取$C=0$得到，所以是(4)的一个特解.

由此可知，**一阶非齐次线性微分方程通解的结构**是：对应齐次方程的通解与它的一个特解之和.

例 4 求方程$(1+x^2)y'-2xy=(1+x^2)^2$的通解.

解 原方程可化为 $y'-\dfrac{2x}{1+x^2}y=1+x^2$,

所以原方程是一阶非齐次线性微分方程，且

$$P(x)=-\frac{2x}{1+x^2},\ Q(x)=1+x^2.$$

方法 1(常数变易法)：

(1) 对应齐次方程为 $$y'-\frac{2x}{1+x^2}y=0,$$

分离变量，得 $$\frac{\mathrm{d}y}{y}=\frac{2x}{1+x^2}\mathrm{d}x,$$

两边积分，得 $$\ln y=\ln(1+x^2)+\ln C,$$

所以，对应齐次方程通解为 $y=C(1+x^2)$.

(2) 设原方程的解为 $y=C(x)(1+x^2)$，代入原方程，得

$$C'(x)(1+x^2)+2xC(x)-\frac{2x}{1+x^2}C(x)(1+x^2)=1+x^2,$$

$$C'(x)(1+x^2)=(1+x^2),$$

$$C'(x)=1,$$

$$C(x)=x+C.$$

由此得到原方程的通解： $y=(x+C)(1+x^2)$.

方法 2(公式法)：

原方程的通解： $$y=\mathrm{e}^{\int\frac{2x}{1+x^2}\mathrm{d}x}\left[\int(1+x^2)\mathrm{e}^{-\int\frac{2x}{1+x^2}\mathrm{d}x}\mathrm{d}x+C\right]$$

$$=\mathrm{e}^{\ln(1+x^2)}\left[\int\frac{(1+x^2)}{(1+x^2)}\mathrm{d}x+C\right]=(1+x^2)(x+C).$$

例 5　求微分方程 $y'+\frac{2y}{x}=x$ 的通解.

解　这个方程是一阶非齐次线性微分方程，其中 $P(x)=\frac{2}{x}$，$Q(x)=x$.

由通解公式(10)知方程的通解为：

$$y=\mathrm{e}^{-\int\frac{2}{x}\mathrm{d}x}\left(\int x\mathrm{e}^{\int\frac{2}{x}\mathrm{d}x}\mathrm{d}x+C\right)=\mathrm{e}^{\ln x^{-2}}\left(\int x\mathrm{e}^{\ln x^2}\mathrm{d}x+C\right)$$

$$=\frac{1}{x^2}\left(\int x^3\mathrm{d}x+C\right)=\frac{1}{x^2}\left(\frac{x^4}{4}+C\right)=\frac{C}{x^2}+\frac{x^2}{4}.$$

例 6　求方程 $xy'-y=x^2\mathrm{e}^x$ 满足初始条件 $y(1)=1$ 的特解.

解　在方程两边同时除以 x，将方程化为标准形式

$$y'-\frac{1}{x}y=x\mathrm{e}^x.$$

这里 $P(x)=-\frac{1}{x}$，$Q(x)=x\mathrm{e}^x$，由通解公式得方程的通解为：

$$y=\mathrm{e}^{\int\frac{1}{x}\mathrm{d}x}\left(\int x\mathrm{e}^x\mathrm{e}^{-\int\frac{1}{x}\mathrm{d}x}\mathrm{d}x+C\right)=\mathrm{e}^{\ln x}\left(\int x\mathrm{e}^x\mathrm{e}^{-\ln x}\mathrm{d}x+C\right)=x(\mathrm{e}^x+C).$$

将初始条件 $y(1)=1$ 代入得：$C=1-\mathrm{e}$.

故方程的特解为 $y = x(e^x - e + 1)$.

有时方程虽然不是关于未知函数 y，y' 的一阶线性方程，但若把 x 看成 y 的未知函数 $x = x(y)$，可将方程转化成关于未知函数 $x(y)$，$x'(y)$ 的一阶线性方程，即：

$$\frac{dx}{dy} + P(y)x = Q(y). \tag{11}$$

此时可利用上述方法求解，得到的解的形式是 $x = x(y, C)$.

例 7 求方程 $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{y}{x + y^3}$ 的通解.

解 原方程不是一个关于 y，y' 的一阶线性方程. 现改写为

$$\frac{dx}{dy} - \frac{1}{y}x = y^2,$$

显然，这是关于 $x(y)$，$x'(y)$ 的一阶线性方程.

对应公式(11)， $P(y) = -\dfrac{1}{y}$，$Q(y) = y^2$.

由公式得原方程的通解为：

$$\begin{aligned} x &= e^{-\int P(y)dy}\left[\int Q(y)e^{\int P(y)dy}dy + C\right] \\ &= e^{\int \frac{1}{y}dy}\left[\int y^2 e^{-\int \frac{1}{y}dy}dy + C\right] = y\left(\int ydy + C\right) = \frac{1}{2}y^3 + Cy. \end{aligned}$$

* 三、齐次方程

若一阶微分方程可化成

$$\frac{dy}{dx} = \varphi\left(\frac{y}{x}\right) \tag{12}$$

的形式，则称此方程为**齐次方程**.

在齐次方程$\dfrac{dy}{dx} = \varphi\left(\dfrac{y}{x}\right)$中，只要作一个变量代换，就能将方程转化为新变量的可分离变量的一阶微分方程，从而求得通解. 具体步骤如下：

第一步　化原方程为形式(12)；

第二步　在(12)中作代换 $u = \dfrac{y}{x}$，即 $y = ux$，可得

$$\frac{dy}{dx} = u + x\frac{du}{dx},$$

代入(12)后得 $u + x\dfrac{du}{dx} = \varphi(u)$. 这是一个关于 u 的可分离变量的一阶微分方程.

分离变量，得 $$\frac{du}{\varphi(u) - u} = \frac{dx}{x}. \tag{13}$$

第三步　两边积分得到(13)的通解

$$\int \frac{du}{\varphi(u) - u} = \int \frac{dx}{x}.$$

第四步　求出不定积分后以 $u=\dfrac{y}{x}$ 回代，即得原齐次微分方程的通解.

例 8　求微分方程 $x\dfrac{dy}{dx}-y=2\sqrt{xy}$ 的通解.

解　原方程可化为
$$\frac{dy}{dx}=\frac{2\sqrt{xy}+y}{x},$$
$$\frac{dy}{dx}=2\sqrt{\frac{y}{x}}+\frac{y}{x}.$$

作代换 $u=\dfrac{y}{x}$，则 $y=ux$，$\dfrac{dy}{dx}=u+x\dfrac{du}{dx}$，代入上式，

得
$$u+x\frac{du}{dx}=2\sqrt{u}+u,$$
分离变量，得
$$\frac{du}{2\sqrt{u}}=\frac{dx}{x},$$
两边积分，得
$$\sqrt{u}=\ln x+C,$$
将 $u=\dfrac{y}{x}$ 回代，得原方程的通解 $\sqrt{\dfrac{y}{x}}=\ln x+C$.

练　习　1.2

1. 判别下列一阶微分方程的类型.

(1) $xdy+y^2\sin x dx=0$；　(2) $\dfrac{dy}{dx}+3y=e^{2x}$；

(3) $dy=\dfrac{dx}{x+y^2}$；　(4) $(x+1)y'-3y=e^x(1+x)^4$；

(5) $x\dfrac{dy}{dx}+y=2\sqrt{xy}$；　(6) $(x^2+1)y'+2xy=\cos x$.

2. 求解下列微分方程.

(1) $y'=y^2$；　(2) $e^{x+y}dy=dx$；

(3) $\dfrac{dy}{dx}+y=e^{-x}$；　(4) $(y^2-6x)\dfrac{dy}{dx}+2y=0$.

习　题　1.2

1. 求解下列微分方程.

(1) $xy'-y\ln y=0$；　(2) $\dfrac{dy}{dx}=10^{x+y}$；

(3) $(x^2y+y)dy+(xy^2+x)dx=0$；　(4) $(e^{x+1}-e^x)dx+(e^{x+y}+e^y)dy=0$；

(5) $\cos x\sin y dx+\sin x\cos y dy=0$.

2. 求解下列微分方程.

(1) $y'+y=2e^x$；　(2) $x^2dy+(2xy-x^2)dx=0$；

(3) $y' + 2xy = 4x$；　　(4) $(x-2)\dfrac{dy}{dx} = y + 2(x-2)^3$；

(5) $y' + y\cos x = e^{-\sin x}$；　　(6) $y\ln y dx + (x - \ln y)dy = 0$.

3. 求下列微分方程满足所给初始条件的特解.

(1) $y' = e^{2x-y}$，$y\Big|_{x=0} = 0$；　　(2) $y'\sin x = y\ln y$，$y\Big|_{x=\frac{\pi}{2}} = e$；

(3) $xdy + 2ydx = 0$，$y\Big|_{x=2} = 1$；　　(4) $\dfrac{dy}{dx} + \dfrac{y}{x} = \dfrac{\sin x}{x}$，$y\Big|_{x=\pi} = 1$；

(5) $\dfrac{dy}{dx} + 3y = 8$，$y\Big|_{x=0} = 2$；　　(6) $ydx + (x - e^y)dy = 0$，$y(2) = 3$.

4. 一曲线通过点(2, 3)，它在两坐标轴间的任一切线线段均被切点所平分，求这条曲线方程.

§1.3　可降阶的高阶微分方程

二阶及二阶以上的微分方程统称为**高阶微分方程**.对于普通的高阶微分方程，求解一般比较复杂，没有求通解的公式可用，但有些高阶微分方程，我们可以通过降阶的方法，将它化为较低阶的方程来求解.本节主要介绍两种容易降阶的高阶微分方程的求解方法.

一、$y^{(n)} = f(x)$ 型的微分方程

微分方程 $y^{(n)} = f(x)$ 的特点：方程右边仅含有自变量 x 的函数.

降阶方法：只要通过逐次积分，就能逐次降阶，直到成为一阶方程.即在两边积分一次，得 $n-1$ 阶方程 $y^{(n-1)} = \int f(x)dx + C_1$；再积分一次，得 $n-2$ 阶方程 $y^{(n-2)} = \int\left[\int f(x)dx\right]dx + C_1x + C_2$；如此继续，便可得到所求方程的通解.

例 1　求微分方程 $y''' = x + 1$ 的通解.

解　两边积分，得　$y'' = \int(x+1)dx = \dfrac{1}{2}x^2 + x + C_1$，

再对两边积分，得　$y' = \int\left(\dfrac{1}{2}x^2 + x + C_1\right)dx = \dfrac{1}{6}x^3 + \dfrac{1}{2}x^2 + C_1x + C_2$，

再对两边积分，得 $y = \int\left(\dfrac{1}{6}x^3 + \dfrac{1}{2}x^2 + C_1x + C_2\right)dx = \dfrac{1}{24}x^4 + \dfrac{1}{6}x^3 + \dfrac{C_1}{2}x^2 + C_2x + C_3$.

例 2　求微分方程 $y''' = e^{2x} - \cos x$ 的通解.

解　对所给方程连续积分三次，得

$$y'' = \frac{1}{2}e^{2x} - \sin x + C,$$

$$y' = \frac{1}{4}e^{2x} + \cos x + Cx + C_2,$$