高等职业教育课程改革示范教材

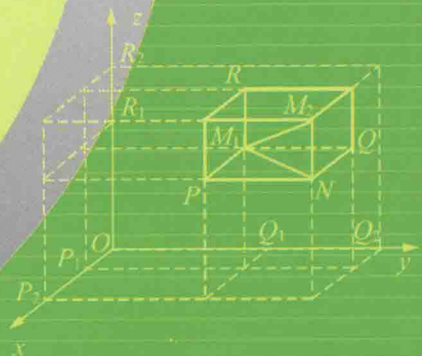
高等数学

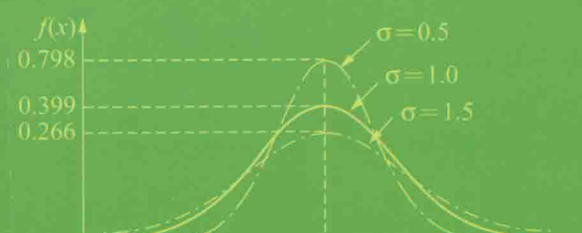
主　编　曹亚萍　龚建荣

副主编　宋文章　张玉兰　王理峰

谢小韦　冯再勇

- 函数、极限与连续
- 导数与微分及其应用
- 不定积分与常微分方程
- 定积分及其应用
- 多元函数微积分学
- 无穷级数
- 线性代数初步
- 概率统计初步





南京大学出版社

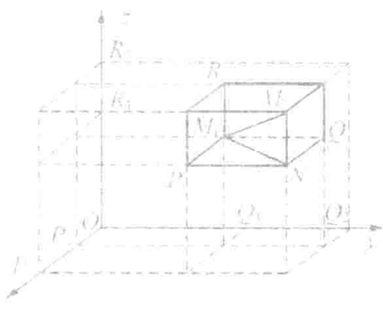
高等职业教育课程改革示范教材

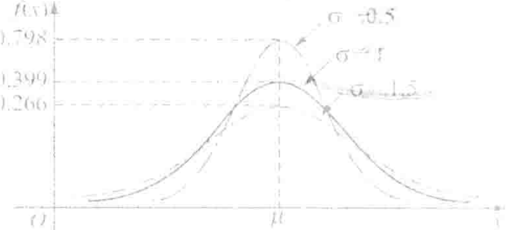
高等数学

主　编　曹亚萍　龚建荣

副主编　宋文章　张玉兰　王理峰

谢小韦　冯再勇





南京大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

高等数学/曹亚萍，龚建荣主编. —南京：南京大学出版社，2012.8

高等职业教育课程改革示范教材

ISBN 978-7-305-10138-0

Ⅰ. ①高… Ⅱ. ①曹… ②龚… Ⅲ. ①高等数学—高等职业教育—教材 Ⅳ. ①O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2012)第 148076 号

出版发行 南京大学出版社
社　　址 南京市汉口路 22 号　　　邮编 210093
网　　址 http://www.NjupCo.com
出 版 人 左　健

丛 书 名 高等职业教育课程改革示范教材
书　　名 高等数学
主　　编 曹亚萍　龚建荣
责任编辑 吴　华　　　编辑热线 025-83596997

照　　排 江苏南大印刷厂
印　　刷 南京京新印刷厂
开　　本 787×1 092　1/16　印张 17.5　字数 434 千
版　　次 2012 年 8 月第 1 版　　2012 年 8 月第 1 次印刷
印　　数 1～3000
ISBN 978-7-305-10138-0
定　　价 32.80 元

发行热线 025-83594756　83686452
电子邮箱 Press@NjupCo.com
Sales@NjupCo.com(市场部)

前　　言

根据教育部制定的《高职高专教育基础课程教学基本要求》和《高职高专教育专业人才培养目标及规格》，结合现代高等职业教育实际情况，我们组织了在高等职业教学第一线、从事多年的高等数学教学、有比较丰富教学经验的部分教师，参与编写了这本《高等数学》教材。

本书以就业为导向和以培养技能型人才为目标，以“掌握概念、强化应用、培养技能”为指导思想，理论教学以应用为目的，满足必需、够用为度的要求，加强基本概念的教学，从生活、生产的具体例子出发，引入抽象的数学概念，使抽象概念具体化，对难度比较大的基础理论，不作严格的证明，只作简单的几何说明，突出应用能力的培养。

本书本着一切为了学生、为了学生的一切的宗旨，结合高职院学生的具体情况，每章开篇都列出了学习目标，每章结尾都有本章小结，有利于学生把握每章的重点和难点，每章还附有大量复习题，便于学生巩固所学的知识，书末还附有每个章节的习题和复习题的参考答案，可方便学生学习之用。

本书的第 1 章由张玉兰编写，第 2、3 章由王理峰编写，第 4 章由谢小韦编写，第 5、6 章由曹亚萍编写，第 7 章由宋文章编写，第 8 章由龚建荣编写，第 9 章由冯再勇编写。全书由曹亚萍、龚建荣最后统稿。

在本书的编写过程中，得到了南京铁道职业技术学院社科部张珺主任的大力支持，得到了南京大学出版社吴华编辑的指导，在此一并表示感谢！

在本书的使用过程中，如有不当之处，敬请同行和广大读者批评指正。

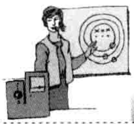
编者

于南京铁道职业技术学院浦口校区

2012 年 6 月

目　　录

第 1 章　函数、极限与连续



学习目标

1. 加深理解函数的概念.
2. 了解分段函数、复合函数的概念.
3. 掌握函数极限、无穷小、无穷大以及函数连续性的概念.
4. 熟练掌握函数极限的四则运算法则.
5. 会用两个重要极限求极限.
6. 会判断函数间断点的类型.
7. 会求连续函数和分段函数的极限.
8. 知道初等函数的连续性以及闭区间上连续函数的性质(介值定理、最大值和最小值定理).

§1.1　函数的概念

一、函数的概念

1. 区间和邻域

如果变量的变化是连续的,则常用区间来表示其变化范围. 在数轴上来说,**区间**是指介于某两点之间的线段上点的全体.

设 a 和 b 都是实数,且 $a<b$,将数集

$\{x|a<x<b\}$称为开区间,记为(a,b);

$\{x|a\leqslant x\leqslant b\}$称为闭区间,记为$[a,b]$;

$\{x|a<x\leqslant b\}$称为左开右闭区间,记为$(a,b]$;

$\{x|a\leqslant x<b\}$称为左闭右开区间,记为$[a,b)$.

上述四个区间的长度都是有限的(区间长度为 $b-a$),统称为有限区间.

此外还有下列无限区间,引进记号$+\infty$,$-\infty$(读作正无穷大,负无穷大).

无限区间有:$(-\infty,+\infty)=\mathbf{R}$(通常也表示为$-\infty<x<+\infty$);

$$(a,+\infty)=\{x|x>a\};[a,+\infty)=\{x|x\geqslant a\};$$
$$(-\infty,b)=\{x|x<b\};(-\infty,b]=\{x|x\leqslant b\}.$$

如无特别声明,可用如下符号表示一些常用数集:

R——实数集;**Q**——有理数集;**Z**——整数集;**N**——自然数集.

定义 1－1　设 a 与 δ 是两个实数,且 $\delta>0$(通常 δ 是指很小的正数),集合

$\{x \mid |x-a|<\delta\}$称为点 a 的 δ **邻域**，记为 $U(a,\delta)$，a 称为该邻域的中心，δ 称为该邻域的半径，即：

$$U(a,\delta)=\{x \mid a-\delta<x<a+\delta\}.$$

$U(a,\delta)$表示与点 a 距离小于 δ 的一切点 x 的全体.

同理，称将邻域的中心 a 去掉所形成的区间$(a-\delta,a)\cup(a,a+\delta)$为 a 的去心 δ **邻域**（或 a 的空心 δ 邻域），记为 $\overset{\circ}{U}(a,\delta)=\{x \mid 0<|x-a|<\delta\}$.

2. 函数

在研究某一事物的变化过程时，往往同时遇到两个或多个变量，这些变量不是彼此孤立的，而是相互联系，互相依赖，遵循着一定的变化规律.

例如：圆的面积. 圆面积 A 与它的半径 r 间的关系由公式 $A=\pi r^2$ 确定，当 r 在区间$(0,+\infty)$内任意取定一个数值时，根据公式 $A=\pi r^2$ 就可以确定圆的面积 A 的相应数值.

定义 1-2 设有两个变量 x 和 y，D 是一个给定的数集，若对于 D 中每一个数 x（即 $\forall x\in D$），按照一定的对应法则 f 总有唯一确定的数值 y 与之对应，则称 y 是 x 的**函数**，记作：$y=f(x)$. x 称为**自变量**，y 称为**因变量**，数集 D 和 $M=\{y \mid y=f(x),x\in D\}$分别称为函数的**定义域**和**值域**.

若当自变量 x 取某个确定的值 x_0，根据对应法则 f 能够得到一个确定的值 y_0，y_0 称为函数 $y=f(x)$在 x_0 处的**函数值**，记为 $y_0=f(x_0)$或 $y_0=y|_{x=x_0}$.

平面点集 $G=\{(x,y) \mid y=f(x),x\in D\}$称为函数 $y=f(x)$的**图形**.

根据函数的定义，当函数的定义域和函数的对应法则确定以后，这个函数就完全确定了. 因此，通常把函数的定义域 D 和对应法则 f 叫做确定函数的**两个要素**. 只有当两个函数的定义域和对应法则完全相同时，才认为这两个函数是完全相同的.

在实际问题中，函数的定义域是根据问题的实际意义确定的. 例如，圆面积中定义域为$(0,+\infty)$.

在数学中，有时不考虑函数的实际意义，而抽象地研究用算式表达的函数. 约定函数的定义域就是自变量所能取的使算式有意义的一切实数值.

例如，函数 $y=\dfrac{1}{\sqrt{3x-x^2}}$的定义域是开区间$(0,3)$，函数 $y=\arcsin\dfrac{x}{4}$的定义域是闭区间$[-4,4]$.

二、函数的表示方法

根据问题的不同特点，函数可以用表格法、图像法和解析法（公式法）来表示（三种表示方法也可以混合使用）. 在微积分学中，函数还可以用以下方式来表示.

1. 隐函数

如果变量 x，y 之间的函数关系是由一个方程 $F(x,y)=0$ 所确定的，则称 y 是 x 的**隐函数**. 相应地，如果因变量 y 都能用含有 x 的解析式明显表示，则称之为**显函数**. 有些隐函数可以转化为显函数，但也有些隐函数不可以化为显函数，如方程 $e^y-e^x-xy=1$ 所确定的隐函数就无法化为显函数，但这并不影响我们研究它们的某些变化规律.

2. 分段函数

在自变量的不同的范围内用不同的解析式分段表示的函数叫**分段函数**.

分段函数求函数值时，应把自变量的值代入相应范围的表达式中去计算.

例 1-1-1　已知分段函数 $f(x)=\begin{cases}x^2+1 & x>0\\ 2 & x=0\\ 2x & x<0\end{cases}$（如图 1-1），求 $f[f(0)]$，$f(-3)$.

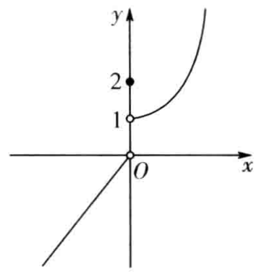


图 1-1

解　$f[f(0)]=f(2)=2^2+1=5$；$f(-3)=2\times(-3)=-6$.

其中 $x=0$ 称为分段函数的“分界点”.

几个常见的分段函数：

(1) **符号函数**

$$y=\operatorname{sgn} x=\begin{cases}1 & x>0\\ 0 & x=0\\ -1 & x<0\end{cases},D=(-\infty,+\infty),M=\{-1,0,1\}\text{（如图 1-2）}.$$

(2) **取整函数**

$y=[x]$，$x\in\mathbf{R}$（如图 1-3），$[x]$表示不超过 x 的最大整数.

$$D=(-\infty,+\infty),M=\mathbf{Z}\text{（其中 }\mathbf{Z}\text{ 表示整数集）}.$$

例如，$[2.38]=2$，$[-6.12]=-7$，$[1]=1$.

(3) **绝对值函数**

$$y=|x|=\begin{cases}x & x>0\\ 0 & x=0\\ -x & x<0\end{cases},D=(-\infty,+\infty),M=[0,+\infty)\text{（如图 1-4）}.$$

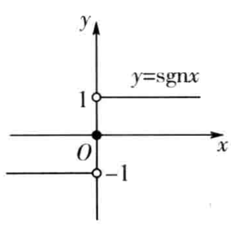


图 1-2

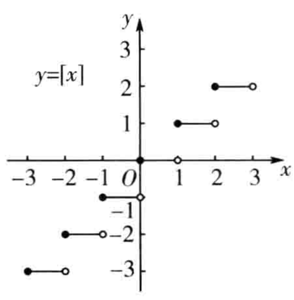


图 1-3

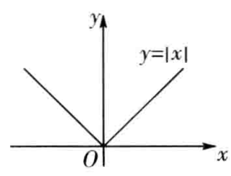


图 1-4

3. 由参数方程确定的函数

如果变量 x,y 之间的函数关系是由参数方程 $\begin{cases}x=f(t)\\ y=g(t)\end{cases}$（$t$ 是参数）所确定的，则称为由参数方程确定的函数（简称参数式函数），其中 t 称为参数.

三、函数的性质

1. 有界性

存在正数 $M>0$，若对 $\forall x\in D$，总有 $|f(x)|\leqslant M$ 成立，则称函数 $f(x)$ 在区间 D 内**有界**，

否则称为**无界**.

若函数 $f(x)$ 在其定义域内有界,则称 $f(x)$ 为**有界函数**,否则称为**无界函数**.

有界函数的图形必介于直线 $y=M$ 与 $y=-M$ 之间.

例如,函数 $y=\cos x$ 是有界函数,因为在其定义域 $(-\infty,+\infty)$ 内恒有 $|\cos x|\leqslant 1$.

函数 $y=\tan x$ 在 $\left[-\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{6}\right]$ 是有界函数,但在 $\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$ 内是无界的.

注意	确定一个函数是有界的或无界的,必须指出其相应的自变量的取值范围.

2. 单调性

若对于区间 (a,b) 内的任意两点 x_1 及 x_2,如果当 $x_1<x_2$ 时,总有 $f(x_1)<f(x_2)$,则称函数 $f(x)$ 在 (a,b) 内单调增加;当 $x_1<x_2$ 时,总有 $f(x_1)>f(x_2)$,则称函数 $f(x)$ 在 (a,b) 内单调减少. 区间 (a,b) 称为单调区间.

从几何直观上看,单调增函数是从左至右上升的,单调减函数是从左至右下降的.

例如,$f(x)=x^2$ 在区间 $(-\infty,0]$ 上是单调减少的,在区间 $[0,+\infty)$ 上是单调增加的,在区间 $(-\infty,+\infty)$ 内 $f(x)=x^2$ 不是单调的.

3. 奇偶性

设函数 $y=f(x)$ 的定义域 D 关于原点对称(即如果 $x\in D$ 则必有 $-x\in D$),若对于 $\forall x\in D$,都有 $f(-x)=-f(x)$,则称函数 $f(x)$ 在 D 上是**奇函数**;若对于 $\forall x\in D$,都有 $f(-x)=f(x)$,则称函数 $f(x)$ 在 D 上是**偶函数**.

奇函数的图形关于原点对称,偶函数的图形关于 y 轴对称.

例如,$y=x^3$,$y=\sin x$ 是奇函数;$y=|x|$,$y=\cos x$ 是偶函数;$y=\sqrt{x}+\sin x$,$y=\ln x+1$ 是非奇非偶函数.

4. 周期性

设函数 $y=f(x)$ 在数集 D 上有定义,若存在一不为零的数 T,使得对于 $\forall x\in D$,有 $x+T\in D$ 且 $f(x+T)=f(x)$ 恒成立,则称函数 $y=f(x)$ 是周期函数,T 称为 $f(x)$ 的周期.

例如,函数 $y=\tan x$,$y=\cot x$ 是以 π 为周期的周期函数,函数 $y=x-[x]$ 是周期为 1 的周期函数.

若 T 为 $f(x)$ 的周期,则根据定义,$2T,3T,4T,\cdots$ 也是 $f(x)$ 的周期,故周期函数有无穷多个周期,而我们通常说的周期是指最小正周期(基本周期).

周期函数在每一个周期 $(\varepsilon+kT,\varepsilon+(k+1)T)$($\varepsilon$ 为任意数,k 为任意整数)上,都有相同的形状.

四、初等函数

1. 基本初等函数

定义 1-3 常数函数、幂函数、指数函数、对数函数、三角函数、反三角函数统称为基本初等函数(见附录 1).

(1) 常数函数 $y=C$(C 为常数);

(2) 幂函数 $y=x^{\mu}$($\mu\in\mathbf{R}$,为常数);

(3) 指数函数 $y=a^x(a>0,a\neq1)$，$y=e^x(e=2.718281828495045\cdots)$；

(4) 对数函数 $y=\log_a x(a>0,a\neq1)$，$y=\log_e x=\ln x$(称为**自然对数函数**)；

(5) 三角函数 $y=\sin x$，$y=\cos x$，$y=\tan x$，$y=\cot x$，$y=\sec x$，$y=\csc x$；

(6) 反三角函数 $y=\arcsin x$，$y=\arccos x$，$y=\arctan x$，$y=\text{arccot}\, x$.

2. 复合函数

函数 $y=\sin^2 x$ 不是基本初等函数，但可由基本初等函数 $y=u^2$ 和 $u=\sin x$ 组合而成，称这种组合为复合函数. 实际上较复杂的函数都是由几个基本初等函数或简单函数复合而成的.

定义 1-4　设 y 是 u 的函数 $y=f(u)$，u 是 x 的函数 $u=g(x)$，若 $u=g(x)$ 的值域或其部分包含在 $y=f(u)$ 定义域中，则 y 通过中间变量 u 构成 x 的函数，称为 x 的**复合函数**，记为 $y=f[g(x)]$. 其中 x 是自变量，u 称为**中间变量**.

例 1-1-2　设 $f(x)=x^3-x$，$g(x)=\sin 2x$，求 $f[g(x)]$，$g[f(x)]$.

解　$f[g(x)]=[g(x)]^3-g(x)=\sin^3 2x-\sin 2x$；

$g[f(x)]=\sin[2f(x)]=\sin(2x^3-2x)$.

例 1-1-3　指出下列复合函数的复合过程：

(1) $y=e^{\sin^2 x}$；　(2) $y=\arccos\sqrt{\ln(x^2-1)}$；　(3) $y=\tan^3(1+x^2)$.

解　(1) $y=e^{\sin^2 x}$ 是由 $y=e^u$(指数函数)，$u=v^2$(幂函数)，$v=\sin x$(三角函数)复合而成.

(2) $y=\arccos\sqrt{\ln(x^2-1)}$ 是由 $y=\arccos u$，$u=\sqrt{v}$，$v=\ln w$，$w=x^2-1$ 复合而成.

(3) $y=\tan^3(1+x^2)$ 是由 $y=u^3$，$u=\tan v$，$v=1+x^2$ 复合而成.

注意　不是任何两个函数都能够复合成一个复合函数的. 例如，$y=\arccos u$ 及 $u=3+x^2$ 就不能复合成一个复合函数. 因为对于 $u=3+x^2$ 的定义域 $(-\infty,+\infty)$ 内任何 x 值所对应的 u 值(都大于或等于 3)，都不能使 $y=\arccos u$ 有意义.

3. 反函数

定义 1-5　设函数 $y=f(x)$，其定义域为 D，值域为 M. 如果对于 $\forall y\in M$，都可以从关系式 $y=f(x)$ 确定唯一的 $x(x\in D)$ 与之对应，这样就确定了一个以 y 为自变量的函数，称这个函数为 $y=f(x)$ 的**反函数**，记为 $x=f^{-1}(y)$，其定义域为 M，值域为 D.

习惯上用 x 表示自变量，y 表示因变量，因此 $y=f(x)$ 的反函数可表示为 $y=f^{-1}(x)$.

性质 1-1　(1) 函数 $y=f(x)$ 的定义域是其反函数 $y=f^{-1}(x)$ 的值域，其值域是反函数的定义域.

(2) 函数 $y=f(x)$ 与其反函数 $y=f^{-1}(x)$ 的单调性相同.

(3) 函数 $y=f(x)$ 的图像与其反函数 $y=f^{-1}(x)$ 的图像关于直线 $y=x$ 对称.

例 1-1-4　求 $y=2^x+1$ 的反函数.

解　由 $y=2^x+1$ 得 $\log_2(y-1)=x$，所以 $x=\log_2(y-1)$，互换字母 x，y 得所求反函数：$y=\log_2(x-1)$.

4. 初等函数

由常数和基本初等函数经过有限次的四则运算或有限次的函数复合所构成的，并能用一个解析式表示的函数称为初等函数.

例如，函数 $y=\cos^2(3x+1)$，$y=\sqrt{x^3+2}$，$y=\dfrac{\ln x+2\tan x}{10^x-1}$都是初等函数.

在微积分的运算中，常把一个初等函数分解为基本初等函数或基本初等函数的四则运算形式，因此我们应当学会如何分析初等函数的结构.

例 1-1-5 求下列函数的定义域：

(1) $y=\sqrt{9-x^2}+\dfrac{1}{x-1}$； (2) $y=\arccos\dfrac{x+1}{3}+\ln(3+x)$.

解 (1) 要使函数有意义，应满足偶次根式的被开方式大于等于零和分母不为零，即：

$$9-x^2\geqslant 0,$$

且 $x-1\neq 0$，故$\begin{cases}-3\leqslant x\leqslant 3\\ x\neq 1\end{cases}$，所求定义域为$[-3,1)\cup(1,3]$；

(2) 要使函数有意义，应满足反余弦函数符号内的式子绝对值小于等于 1 且对数函数符号内的式子为正，即：

$$\begin{cases}-1\leqslant\dfrac{x+1}{3}\leqslant 1\\ 3+x>0\end{cases}，所以\begin{cases}-4\leqslant x\leqslant 2\\ x>-3\end{cases}，即-3<x\leqslant 2，所求定义域为(-3,2].$$

一般求函数的定义域时应考虑：

(1) 代数式中分母不能为零；

(2) 偶次根式内的表达式非负；

(3) 对数运算中真数的表达式大于零；

(4) 反三角函数 $y=\arcsin x$，$y=\arccos x$，要满足$|x|\leqslant 1$；

(5) 两函数和(差)的定义域，应是两函数定义域的公共部分；

(6) 分段函数的定义域是各段定义域的并集等.

五、函数模型的建立

用数学方法解决实际问题时，往往需要找出变量之间的函数关系，建立函数关系，或成为函数模型.

例 1-1-6 已知某种商品的成本函数与收入函数分别是 $C=12+3q+q^2$，$R=11q$，试求该商品的盈亏平衡点，并说明随产量 q 变化时的盈亏情况.

解 利润函数 $L(q)=R(q)-C(q)=11q-12-3q-q^2=8q-q^2-12=-(q-2)(q-6)$.

由 $L(q)=0$ 得盈亏平衡点有两个：$q_1=2$，$q_2=6$.

当 $q<2$ 时，$L<0$；当 $2<q<6$ 时，$L>0$；而当 $q>6$ 时，$L<0$.

即当 $q<2$ 时亏损，当 $2<q<6$ 时盈利，而当 $q>6$ 时又转为亏损.

习题 1.1

1. 设函数 $f(x+2)=x^2+3x+5$，求 $f(x)$，$f(x-2)$.

2. 已知 $f(\sin x)=\cos 2x+1$，求 $f(\cos x)$.

3. 求下列函数的定义域：

(1) $y=\dfrac{x}{\sqrt{x^2-3x+2}}$； (2) $y=\arccos(2x-5)$；

(3) $y=\ln(2-x)+1$； (4) $y=\sqrt{x-2}+\dfrac{1}{x-3}+\ln(5-x)$.

4. 求下列函数的反函数：

(1) $y=\dfrac{2x}{x-1}$； (2) $y=\sqrt[3]{x+1}$；

(3) $y=\ln\dfrac{1}{2+x}$； (4) $f(x)=\begin{cases}x-1 & x<0\\ x^2 & x\geqslant 0\end{cases}$.

5. 设 $f(x)=x^2$，$\varphi(x)=e^x$，求 $f[\varphi(x)]$，$\varphi[f(x)]$，$f[f(x)]$，$\varphi[\varphi(x)]$.

6. 判定下列函数的奇偶性：

(1) $y=\sin x+\cos x$； (2) $y=\log_3(x+\sqrt{x^2+1})$.

7. 指出下列复合函数的复合过程：

(1) $y=2^{\sqrt{\sin x}}$； (2) $y=\sqrt[3]{\cos x^2}$；

(3) $y=\tan e^{-\sqrt{1+x^2}}$； (4) $y=\ln(\arctan\sqrt{1+x^2})$.

8. 某市出租汽车的起步价为 9 元，超过 3 公里时，超出部分每公里付费 2.4 元，每次旅程的附加燃油费为 2 元，试求付费金额 y 与乘车距离 x 的函数关系.

§1.2 函数的极限及运算法则

由于求某些实际问题的精确值而产生了极限的思想. 例如，我国春秋战国时期的哲学家庄子在《天下篇》中有如下描述："一尺之棰，日截其半，万世不竭"，就体现了初步的极限思想. 极限是微积分学中一个基本概念，极限是变量变化的终极状态. 微分学与积分学的许多概念都是由极限引入的，并且最终都是由极限来解决. 因此在微积分学中，极限占有非常重要的地位.

一、$x\to\infty$ 时函数的极限

引例 1-1 分析反比例函数 $y=\dfrac{1}{x}$ 当 x 无限增大时的变化趋势.

分析 当 $x\to+\infty$ 时，$y=\dfrac{1}{x}$ 的值无限趋于 0；

当 $x\to-\infty$ 时，$y=\dfrac{1}{x}$ 的值也无限趋于 0.

从而当 $x\to\infty$ 时，函数 $y=\dfrac{1}{x}$ 的值无限趋于 0.

定义 1-6 如果当 $|x|$ 无限增大时，函数 $f(x)$ 无限趋近于一个确定的常数 A，则称 A 为函数 $f(x)$ 当 $x\to\infty$ 时的极限，记作 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=A$ 或 $f(x)\to A$（当 $x\to\infty$ 时）.

同理，可以定义 $x\to+\infty$ 时或 $x\to-\infty$ 时，函数 $f(x)$ 的极限.

例如，$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x}=0$，$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{1}{2}\right)^x=0$，$\lim\limits_{x\to-\infty}2^x=0$.

注意 如果$\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=A$,则把直线 $y=A$ 称为曲线 $y=f(x)$的水平渐近线.

定理 1-1 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=A\Leftrightarrow\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=A$.

例 1-2-1 讨论当 $x\to\infty$时,函数 $y=\arctan x$ 的极限.

解 考察函数 $y=\arctan x$ 的函数值随自变量变化的变化趋势,图形见附录 1.

从图形上看,$\lim\limits_{x\to+\infty}\arctan x=\frac{\pi}{2}$, $\lim\limits_{x\to-\infty}\arctan x=-\frac{\pi}{2}$.

因为 $\lim\limits_{x\to+\infty}\arctan x\neq\lim\limits_{x\to-\infty}\arctan x$,所以当 $x\to\infty$时,$y=\arctan x$ 极限不存在.

说明

曲线 $y=\arctan x$ 有两条水平渐近线,分别为 $y=\frac{\pi}{2}$和 $y=-\frac{\pi}{2}$.

注意 数列是自变量取自然数时的函数(通常称为整标函数)$x_n=f(n)$,因此,数列是函数的一种特殊情况.

例 1-2-2 观察下列函数的图像,说出当 $x\to\infty$时的极限.

(1) $y=\frac{1}{x^2}$;(2) $y=e^x$;(3) $y=C$(C 为常数).

解 由图 1-5、图 1-6、图 1-7 知:

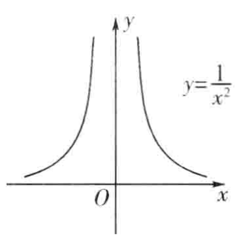


图 1-5

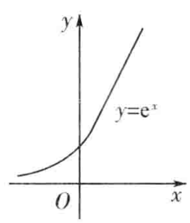


图 1-6

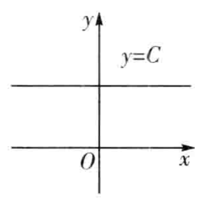


图 1-7

(1) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x^2}=0$;

(2) 因为 $\lim\limits_{x\to-\infty}e^x=0$, $\lim\limits_{x\to+\infty}e^x=+\infty$,所以$\lim\limits_{x\to\infty}e^x$ 不存在;

(3) $\lim\limits_{x\to\infty}C=C$.

二、$x\to x_0$ 时函数的极限

引例 1-2 考察函数 $y=x+1$,当 x 无限趋于 1(不等于 1)时 y 的变化趋势(如图 1-8(a)).

分析 由图知:当 x 趋向于 1 时,y 就趋向于 2,而且 x 越接近 1,y 就越接近 2,因此,当 $x\to1$ 时,$y=x+1\to2$.

引例 1－3 考察函数 $y=\dfrac{x^2-1}{x-1}$，当 x 无限趋于 1(不等于 1)时的变化趋势(如图 1－8(b)).

分析 由图知:当 x 趋向于 1 时，y 就趋向于 2. 虽然 y 在点 $x=1$ 处没有定义，但是只要 x 无限趋于 1，y 就无限趋于 2，于是，当 $x\to 1$ 时，$y=\dfrac{x^2-1}{x-1}\to 2$.

引例 1－4 考察函数 $y=\begin{cases}x+1 & x\neq 1\\ 1 & x=1\end{cases}$，当 x 无限趋于 1(不等于 1)时的变化趋势(如图 1－8(c)).

分析 由图知:当 x 趋向于 1 时，y 就趋向于 2，而且 x 越接近 1，y 就越接近 2，因此，当 $x\to 1$ 时，$y=\begin{cases}x+1 & x\neq 1\\ 1 & x=1\end{cases}\to 2$.

以上三个例子表明:当自变量 x 趋于某个值 x_0 时，函数值就趋于某个确定常数(与函数在点 x_0 有无定义没有关系)，这就是函数极限的含义.

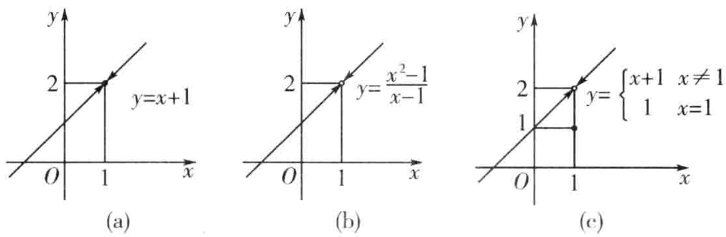


图 1－8

定义 1－7 设函数 $f(x)$ 在 x_0 的左、右近旁(即附近，可以不含 x_0)内有定义，如果当 $x\to x_0$ 时，相应的函数值 $f(x)$ 无限趋近于一个确定的常数 A，则称当 $x\to x_0$ 时，$f(x)$ 以 A 为极限，记作 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$，或 $f(x)\to A(x\to x_0)$.

注意

(1) $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$ 与函数 $f(x)$ 在 x_0 点是否有定义无关，且与 $f(x_0)$ 的值无关，它描述的是当自变量 x 无限接近 x_0 时，相应的函数值 $f(x)$ 无限趋近于常数 A 的一种变化趋势.

(2) x 在无限趋近 x_0 的过程中，既从大于 x_0 的方向(即从 x_0 的右边)趋近 x_0，又从小于 x_0 的方向(即从 x_0 的左边)趋近于 x_0.

由函数极限的定义，易得

(1) $\lim\limits_{x\to x_0}C=C$ 或 $\lim\limits_{x\to\infty}C=C$($C$ 为一常数)；

(2) $\lim\limits_{x\to x_0}(ax+b)=ax_0+b(a\neq 0)$，特别地，$\lim\limits_{x\to x_0}x=x_0$.

类似可定义，当 x 仅从 x_0 的左侧无限趋近于 x_0(记为 $x\to x_0^-$)或 x 仅从 x_0 的右侧无限趋近于 x_0(记为 $x\to x_0^+$)时的极限，分别称为函数 $f(x)$ 在点 x_0 的左、右极限，记为:$f(x_0-0)=\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)$ 和 $f(x_0+0)=\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)$.

定理 1－2 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A\Leftrightarrow f(x_0-0)=f(x_0+0)=A$.

例 1-2-3 考察符号函数 $y=\operatorname{sgn} x=\begin{cases}-1 & x<0 \\ 0 & x=0 \\ 1 & x>0\end{cases}$ 当 $x\to 0$ 时的极限.

解 因为 $f(0-0)=\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}(-1)=-1$，$f(0+0)=\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+} 1=1$，所以 $f(0-0)\neq f(0+0)$.

故符号函数在点 $x=0$ 的极限不存在.

例 1-2-4 讨论函数 $f(x)=|x|$ 在点 $x_0=0$ 处的极限.

解 因为 $f(0-0)=\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}(-x)=0$，$f(0+0)=\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+} x=0$，所以 $f(0-0)=f(0+0)=0$，因此 $\lim\limits_{x\to 0}|x|=0$.

例 1-2-5 设 $f(x)=\begin{cases}1-x & x<0 \\ x^2+1 & x\geqslant 0\end{cases}$，求 $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$.

解 $x=0$ 是函数的分界点，两个单侧极限分别为：

$\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}(1-x)=1$，$\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}(x^2+1)=1$.

左右极限存在且相等，所以 $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=1$.

例 1-2-6 验证 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{|x|}{x}$ 不存在.

解 函数 $y=\dfrac{|x|}{x}$ 如图 1-9 所示.

由图 1-9 知：$\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{|x|}{x}=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{-x}{x}=\lim\limits_{x\to 0^-}(-1)=-1$，

$\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{|x|}{x}=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{x}{x}=\lim\limits_{x\to 0^+} 1=1$.

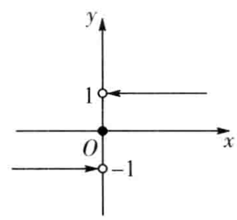


图 1-9

左右极限存在但不相等，所以 $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ 不存在.

例 1-2-7 设 $f(x)=\begin{cases}\sin x+a & x<0 \\ 1+x^2 & x>0\end{cases}$，当 a 为何值时，$f(x)$ 在 $x\to 0$ 的极限存在.

解 由于函数在分段点 $x=0$ 处，两边的表达式不同，因此一般要考虑在分段点 $x=0$ 处的左极限与右极限.

因为 $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}(\sin x+a)=\lim\limits_{x\to 0^-}(\sin x)+\lim\limits_{x\to 0^-} a=a$，

$$\lim_{x\to 0^+} f(x)=\lim_{x\to 0^+}(1+x^2)=1,$$

所以要使 $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ 存在，必须 $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)$.

因此，当 $a=1$ 时，$\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ 存在且 $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=1$.

当求分段函数在分段区间分界点处的极限时，务必先考虑其左、右极限，当左、右极限各自存在并且相等时，分段函数在该点的极限才存在，否则在该点的极限就不存在.

三、极限的四则运算法则

定理 1-3 设 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$，$\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=B$，则

(1) $\lim\limits_{x\to x_0}[f(x)\pm g(x)]=\lim\limits_{x\to x_0}f(x)\pm\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=A\pm B$;

(2) $\lim\limits_{x\to x_0}[Cf(x)]=C[\lim\limits_{x\to x_0}f(x)]=CA$（$C$ 是常数）;

(3) $\lim\limits_{x\to x_0}[f(x)g(x)]=\lim\limits_{x\to x_0}f(x)\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=AB$;

(4) $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{\lim\limits_{x\to x_0}f(x)}{\lim\limits_{x\to x_0}g(x)}=\dfrac{A}{B}(B\neq 0)$.

注意

(1) 上述运算法则对 $x\to x_0^+, x\to x_0^-, x\to\infty, x\to+\infty, x\to-\infty$ 等其他极限过程也成立.

(2) 应用极限运算法则求极限时，必须注意每项极限都存在（对于除法，要求分母极限不为零）才能使用.

例 1-2-8 求$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2+2x-3}{x^2-1}$.

解 当 $x\to 1$ 时，分子、分母均趋于 0，因为 $x\neq 1$，约去公因子 $(x-1)$，所以

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2+2x-3}{x^2-1}=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x+3)}{(x-1)(x+1)}=\lim_{x\to 1}\frac{x+3}{x+1}=\frac{4}{2}=2.$$

例 1-2-9 求$\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{\sqrt{x-1}-2}{x-5}$.

解 当 $x\to 5$ 时，分子、分母均趋于 0，可以先进行分子有理化，消去公因式，再求极限.

所以

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 5}\frac{\sqrt{x-1}-2}{x-5}&=\lim_{x\to 5}\frac{(\sqrt{x-1}-2)(\sqrt{x-1}+2)}{(x-5)(\sqrt{x-1}+2)}\\&=\lim_{x\to 5}\frac{x-5}{(x-5)(\sqrt{x-1}+2)}\\&=\lim_{x\to 5}\frac{1}{(\sqrt{x-1}+2)}=\frac{1}{4}.\end{aligned}$$

例 1-2-10 求$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^3+3x^2+5}{7x^3+4x^2-1}$.

解 当 $x\to\infty$ 时，分子、分母极限均不存在，故不能用运算法则；要先变形，分子、分母同时除以 x 的最高次方 x^3，然后再用运算法则，

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2x^3+3x^2+5}{7x^3+4x^2-1}=\lim_{x\to\infty}\frac{2+\frac{3}{x}+\frac{5}{x^3}}{7+\frac{4}{x}-\frac{1}{x^3}}=\frac{2}{7}.$$

一般地，可以证明自变量趋于无穷时有理函数的极限为：

$$\lim_{x\to\infty}\frac{a_0x^m+a_1x^{m-1}+\cdots+a_m}{b_0x^n+b_1x^{n-1}+\cdots+b_n}=\begin{cases}a_0/b_0 & m=n\\0 & m<n\ (a_0\neq 0, b_0\neq 0, m, n\text{ 为非负整数}).\\\infty & m>n\end{cases}$$