文登教育

Wendeng Education

理工社®

2015

文登教育集团课堂用书

（经济类）

考研数学核心题型

网络增值版

增值服务网址 www.wendengonline.com

陈文灯 主 编

- 本书涵盖必考**170个题型**，精心研读是**顺利通关**的保障。
- 本书可**在线答疑**并提供**增值服务**，请扫微信二维码。

北京理工大学出版社
BEIJING INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

文登教育
Wendeng Education

2015

文登教育集团课堂用书

（经济类）

考研数学核心题型

网络增值版

陈文灯　主　编

北京理工大学出版社
BEIJING INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

图书在版编目(CIP)数据

考研数学核心题型. 经济类 / 陈文灯主编. —北京:北京理工大学出版社,2014. 6
ISBN 978 - 7 - 5640 - 9135 - 4

Ⅰ. ①考… Ⅱ. ①陈… Ⅲ. ①高等数学 - 研究生 - 入学考试 - 解题 Ⅳ. ①O13 - 44

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2014)第 081012 号

出版发行 / 北京理工大学出版社有限责任公司
社　　址 / 北京市海淀区中关村南大街 5 号
邮　　编 / 100081
电　　话 / (010)68914775(总编室)
82562903(教材售后服务热线)
68948351(其他图书服务热线)
网　　址 / http://www. bitpress. com. cn
经　　销 / 全国各地新华书店
印　　刷 / 北京文良精锐印刷有限责任公司
开　　本 / 787 毫米×1092 毫米　1/16
印　　张 / 24
字　　数 / 615 千字
版　　次 / 2014 年 6 月第 1 版　2014 年 6 月第 1 次印刷
定　　价 / 40.00 元

责任编辑/ 钟　博
文案编辑/ 钟　博
责任校对/ 孟祥敬
责任印制/ 边心超

前　言

在考研的几门课中，数学是考生公认的最难复习、最难考的一门课. 为此，不少学生不得不放弃钟爱的专业，报考不考数学的专业；多数人硬着头皮抱着试试看的态度参加复习考试. 数学果真那么可怕，那么难吗？对于原来数学基础不好，又想考高分(135 分以上)的考生来说，只要具备两个条件：① 比较强的记忆力；② 比较强的模仿能力，即可圆“高分梦”.

记忆的作用在于记住重要的概念、理论与定理公式，以及记住计算方法与技巧. 没有记住的东西就无模仿可言，可见记忆之重要. 一般人都知道学英语需要记忆，需要背诵单词，其实学数学也需要记忆，要在理解的基础上背重要的定理、公式和概念，背核心的题型.

模仿是指对解题方法和技巧的一种描摹或仿效. 数学题千千万，如果都用东施效颦的方法，姑且不说做不到，也不会有什么效果. 要模仿就应该抓住常考题型进行相似或变异题的训练. 无论是以题型为纲进行的数学实践(考研辅导班)还是出版书籍的反馈信息，它们都证明：抓题型就是抓解题方法和技巧的根本和关键. 就是基于这样的考虑，我们才编写了这样一套与《考研数学复习指南》相配套的，复习起来省时、省力的考研数学核心题型教材. 希望书中的方法和技巧能够在较短的时间里大大提高学生的复习效率，化难为简，使考生从容过关.

本书的特点如下：

① 严格按照《考研数学大纲》的要求，对国内外文献资料，尤其是对 20 多年来的考研试题进行了归纳总结，精选出 170 个题型.

② 对每个题型进行详尽分析，指出其特点和易混、易错的地方.

③ 书中有许多题型的解题方法和技巧是我们苦心孤诣、冥思苦想出来的，绝非市面上其他书籍所有.

④ 有些题解后有评注，虽然寥寥数语，却可起到画龙点睛、开拓思

路的作用.

⑤ 本书的编写属上课讲义的形式,更贴近考生.

本书适合参加研究生入学考试的同学在复习时自学研读,也可作为考研辅导机构的强化班指定讲义.高等数学的普通学习者和爱好者亦可以阅读本书,并从中领略数学科学的简约之美和数字运算技巧的奇妙.

书中若有不当之处,敬请读者批评指正.

陈文灯

2014 年 4 月

目　录

第 1 篇　高等数学题型

第 2 篇 线性代数题型

第 3 篇 概率论与数理统计题型

第1篇 高等数学题型

第1章 极限和连续

●重要定理、公式和结论

1.1 重要定理

定理1 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)=A \Leftrightarrow f_-(x_0)=f_+(x_0)=A$.

定理2 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)=A \Leftrightarrow f(x)=A+\alpha(x)$，其中 $\alpha(x)$ 为 $x \to 0$ 时的无穷小量，即 $\lim\limits_{x \to x_0} \alpha(x)=0$.

定理3(极限的保号性) 如果 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)=A$，而且 $A>0$(或 $A<0$)，那么存在常数 $\delta>0$，使得当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时，恒有 $f(x)>0$[或 $f(x)<0$].

定理4 如果 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)=A$，$f(x)>0$[或 $f(x)<0$]，则 $A \geqslant 0$(或 $A \leqslant 0$).

定理5(单调有界定理) 单调增加有上界(或单调减少有下界)数列一定有极限.

定理6*(夹逼定理) 设在 x_0 的邻域内恒有 $\varphi(x) \leqslant f(x) \leqslant \psi(x)$，且

$$\lim_{x \to x_0} \varphi(x)=\lim_{x \to x_0} \psi(x)=A, \qquad \text{则} \lim_{x \to x_0} f(x)=A$$

定理7(无穷大和无穷小的关系) 无穷大的倒数为无穷小；非零的无穷小的倒数为无穷大.

定理8(无穷小的运算性质)

(1) 有限个无穷小的代数和为无穷小；

(2) 有限个无穷小的乘积为无穷小；

(3) 无穷小乘以有界变量为无穷小.

定理9 设有函数 $f(x)$，$g(x)$，如果在自变量的同一变化过程中，有 $\lim f(x)=A$，$\lim g(x)=B$，则

(1) $\lim[f(x) \pm g(x)]=\lim f(x) \pm \lim g(x)=A \pm B$；

上式第二个式子中的两个极限若有一个不存在，则代数和的极限必不存在；若两个极限都不存在，则代数和的极限不一定存在.

加法运算可推广到有限个中去.

(2) $\lim[f(x) \cdot g(x)]=\lim f(x) \cdot \lim g(x)=AB$；

(3) $\lim \dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{\lim f(x)}{\lim g(x)}=\dfrac{A}{B}(B \neq 0)$；

(4) $\lim[cf(x)]=c\lim f(x)=cA$,其中 c 为常数.

定理 10 设 $f(x)$在$[a,b]$上连续,则$|f(x)|$在$[a,b]$上连续.

定理 11 初等函数在其定义域内的区间内连续(因为初等函数中可能有孤立点,所以是在区间内连续).

推论:设 $f(x)$在 x_0 处连续,则$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(\lim\limits_{x\to x_0} x)=f(x_0)$;若没有说明 $f(x)$在 x_0 处连续,则$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)\neq f(\lim\limits_{x\to x_0} x)$,即极限符号和函数符号不能交换顺序.

定理 12 设数列$\{x_n\}$收敛于 l,那么它的任一子序列$\{x_{n_k}\}$也收敛,且极限也是 $l(n_k\to\infty)$;反之不真.

定理 13(洛必达法则)

法则Ⅰ$\left(\frac{0}{0}\text{型}\right)$ 设函数 $f(x),g(x)$满足条件

(1) $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}} f(x)=0$, $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}} g(x)=0$;

(2) $f(x),g(x)$在 x_0 的某邻域内可导,在 x_0 点可除外(在无穷远邻域内可导),且 $g'(x)\neq 0$;

(3) $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$存在(或为$\infty$),

则 $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$.

法则Ⅱ$\left(\frac{\infty}{\infty}\text{型}\right)$ 设函数 $f(x),g(x)$满足条件

(1) $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}} f(x)=\infty$, $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}} g(x)=\infty$;

(2) $f(x),g(x)$在 x_0 的邻域内可导,在 x_0 点可除外(在无穷远邻域内可导),且 $g'(x)\neq 0$;

(3) $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$存在(或为$\infty$),

则 $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$.

使用法则时需注意的事项:

(1) 只有$\dfrac{0}{0}$或$\dfrac{\infty}{\infty}$型的未定式才能使用法则;

(2) 每用完一次法则,要将式子整理化简;

(3) 为简化运算,经常将法则与等价无穷小结合使用;

(4) $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\x\to\infty}}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$不存在(或为$\infty$)不能$\Rightarrow\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\x\to\infty}}\dfrac{f(x)}{g(x)}$不存在;

(5) 当 $x\to\infty$时,极限式中含有 $\sin x,\cos x$(或 $x\to 0$ 时,极限式中含有 $\sin\dfrac{1}{x},\cos\dfrac{1}{x}$),则不能用洛必达法则.

1.2 重要公式

公式1 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$， $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x}{\sin x}=1$.

若极限式具有如下两个特点：

（1）是$\frac{0}{0}$型极限，这是首要特点，是本质；

（2）$\sin\square$与分数线对面变量$\square$形式一致，则$\lim\frac{\sin\square}{\square}=1$.

公式2 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=\mathrm{e}$或$\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=\mathrm{e}$.

特点如下：

（1）是1^∞型极限；

（2）括号中1后的变量（包括符号）与指数幂互为倒数.

公式3（抓大头准则）

$$\lim_{x\to\infty}\frac{a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x+a_n}{b_0x^m+b_1x^{m-1}+\cdots+b_{m-1}x+b_m}=\lim_{x\to\infty}\frac{a_0x^n}{b_0x^m}=\begin{cases}\frac{a_0}{b_0}, & m=n\\ 0, & n<m\\ \infty, & n>m\end{cases}$$

即求$x\to\infty$的极限时，抓住起决定性作用的x的最高次幂的项，把其余的项略掉.

公式4（函数连续的充要条件）

函数在一点x_0连续的充要条件是

$$\lim_{x\to x_0^+}f(x)=\lim_{x\to x_0^-}f(x)=f(x_0)$$

公式5

（1）当$x\to+\infty$时，函数趋于$+\infty$的速度由慢到快为$\ln x, x^\alpha(\alpha>0), a^x(a>1), x^x$.

（2）当$n\to\infty$时，通项趋于$+\infty$的速度由慢到快为$\ln n, n^\alpha(\alpha>0), a^n(a>1), n!, n^n$.

（3）常用数列极限：

$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a}=1(a>0)$，特例为$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1$；

$\lim\limits_{n\to\infty}p^n=0(|p|<1)$；$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n^k}=0(k>0)$；$\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=\mathrm{e}$.

（4）常用函数极限：

$\lim\limits_{x\to+\infty}\arctan x=\frac{\pi}{2}$；$\lim\limits_{x\to-\infty}\arctan x=-\frac{\pi}{2}$；

$\lim\limits_{x\to+\infty}\operatorname{arccot} x=0$；$\lim\limits_{x\to-\infty}\operatorname{arccot} x=\pi$；

$\lim\limits_{x\to+\infty}\mathrm{e}^x=\infty$；$\lim\limits_{x\to-\infty}\mathrm{e}^x=0$；$\lim\limits_{x\to 0^+}x^x=1$.

注：若$x\to\infty$的极限式中含有$a^x(a>0,a\neq1)$，特别是e^x，或$\arctan x$，或$\operatorname{arccot} x$，或$|x|$（或$x\to0$时，极限式中含$\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}$，或$\arctan\frac{1}{x}$，或$\operatorname{arccot}\frac{1}{x}$，或$|x|$），一定要分别求出$x\to+\infty$，$x\to-\infty$（或$x\to0^+$，$x\to0^-$）时的极限，若两者相等，则$x\to\infty$（或$x\to0$）时的极限存在，否则不存在.