



文登教育

Wendeng Education



理工社®

2015

文登教育集团课堂用书

(经济类)

考研数学 核心题型

网络增值版

增值服务网址 www.wendengonline.com

陈文灯 主编

- ◆ 本书涵盖必考**170个题型**，精心研读是**顺利通关**的保障。
- ◆ 本书可**在线答疑**并提供**增值服务**，请扫微信二维码。

 北京理工大学出版社
BEIJING INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

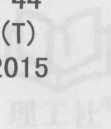
014054734

013-44
395(T)
V2 2015



文登教育

Wendeng Education



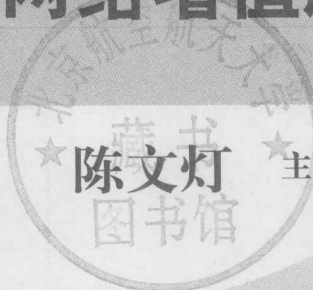
2015

文登教育集团课堂用书

(经济类)

考研数学 核心题型

网络增值版



陈文灯 主编

图书馆

013-44

395(T)

V2

2015

封面设计：陈文灯
责任编辑：陈文灯

版权所有，侵权必究



北航

C1744782

北京理工大学出版社
BEIJING INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS



010244734

育博登文
Wording Education



版权专有 侵权必究

图书在版编目(CIP)数据

考研数学核心题型. 经济类 / 陈文灯主编. —北京:北京理工大学出版社,2014.6

ISBN 978-7-5640-9135-4

I. ①考… II. ①陈… III. ①高等数学-研究生-入学考试-解题 IV. ①O13-44

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2014)第 081012 号

出版发行 / 北京理工大学出版社有限责任公司

社 址 / 北京市海淀区中关村南大街 5 号

邮 编 / 100081

电 话 / (010)68914775(总编室)

82562903(教材售后服务热线)

68948351(其他图书服务热线)

网 址 / <http://www.bitpress.com.cn>

经 销 / 全国各地新华书店

印 刷 / 北京文良精锐印刷有限责任公司

开 本 / 787 毫米×1092 毫米 1/16

印 张 / 24

字 数 / 615 千字

版 次 / 2014 年 6 月第 1 版 2014 年 6 月第 1 次印刷

定 价 / 40.00 元

责任编辑/ 钟 博

文案编辑/ 钟 博

责任校对/ 孟祥敬

责任印制/ 边心超

图书出现印装质量问题,请拨打售后服务热线,本社负责调换

前 言

在考研的几门课中,数学是考生公认的最难复习、最难考的一门课。为此,不少学生不得不放弃钟爱的专业,报考不考数学的专业;多数人硬着头皮抱着试试看的态度参加复习考试。数学果真那么可怕,那么难吗?对于原来数学基础不好,又想考高分(135分以上)的考生来说,只要具备两个条件:① 比较强的记忆力;② 比较强的模仿能力,即可圆“高分梦”。

记忆的作用在于记住重要的概念、理论与定理公式,以及记住计算方法与技巧。没有记住的东西就无模仿可言,可见记忆之重要。一般人都知道学英语需要记忆,需要背诵单词,其实学数学也需要记忆,要在理解的基础上背重要的定理、公式和概念,背核心的题型。

模仿是指对解题方法和技巧的一种描摹或仿效。数学题千千万,如果都用东施效颦的方法,姑且不说做不到,也不会有什么效果。要模仿就应该抓住常考题型进行相似或变异题的训练。无论是以题型为纲进行的数学实践(考研辅导班)还是出版书籍的反馈信息,它们都证明:抓题型就是抓解题方法和技巧的根本和关键。就是基于这样的考虑,我们才编写了这样一套与《考研数学复习指南》相配套的,复习起来省时、省力的考研数学核心题型教材。希望书中的方法和技巧能够在较短的时间里大大提高学生的复习效率,化难为简,使考生从容过关。

本书的特点如下:

① 严格按照《考研数学大纲》的要求,对国内外文献资料,尤其是对 20 多年来的考研试题进行了归纳总结,精选出 170 个题型。

② 对每个题型进行详尽分析,指出其特点和易混、易错的地方。

③ 书中有许多题型的解题方法和技巧是我们苦心孤诣、冥思苦想出来的,绝非市面上其他书籍所有。

④ 有些题解后有评注,虽然寥寥数语,却可起到画龙点睛、开拓思

路的作用。

⑤ 本书的编写属上课讲义的形式,更贴近考生。

本书适合参加研究生入学考试的同学在复习时自学研读,也可作为考研辅导机构的强化班指定讲义。高等数学的普通学习者和爱好者亦可以阅读本书,并从中领略数学科学的简约之美和数字运算技巧的奇妙。

书中若有不当之处,敬请读者批评指正。

陈文灯

2014年4月

目 录

第 1 篇 高等数学题型

第 1 章 极限和连续	1
1.1 重要定理	1
1.2 重要公式	3
1.3 函数的极限	4
题型 1 无穷小的比较或确定无穷小的阶	4
题型 2 求未定式函数极限	5
题型 3 求分段函数在分界点的极限	12
题型 4 极限式中常数的确定	13
1.4 数列的极限	15
题型 5 求各种类型(∞/∞ 型、 1^∞ 型、 $\infty-\infty$ 型)的数列极限	15
题型 6 给出数列 $\{x_n\}$ 的通项表达式, 求极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$	17
题型 7 数列 n 项和 $S_n = \sum_{i=1}^n a_i$, 当 $n \rightarrow \infty$ 时的极限	19
题型 8 n 个因子乘积, 当 $n \rightarrow \infty$ 时的极限	21
1.5 函数的连续性	22
题型 9 函数连续性的讨论	22
题型 10 确定函数的间断点及其类型	23
1.6 杂 例	25
题型 11 从含有 $f(x)$ 及 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ 的方程中求解 $f(x)$	25
题型 12 当 $x \rightarrow 0$ 时, 求含有 $e^{\frac{1}{x}}$, $\arctan \frac{1}{x}$, $\operatorname{arccot} \frac{1}{x}$, $ x $ 的极限	27
题型 13 含 $f(x+a) - f(x)$ 的非 $\frac{0}{0}$ 型极限式且 $f(x)$ 可导	28
第 2 章 导数与微分	29
2.1 导数和微分的概念	29
2.2 导数公式和运算法则	30
2.3 重要定理	31
2.4 与导数定义和性质有关的命题	31

题型 14	求含有抽象函数的 $\frac{0}{0}$ 型极限	31
题型 15	与抽象函数的导数相关的命题	34
题型 16	判断函数的可导性	36
2.5	各种函数的导数或微分	37
题型 17	求一元复合函数的导数或微分	37
题型 18	求一元隐函数的导数或微分	37
题型 19	求幂指函数的导数或微分	39
题型 20	求函数表达式为若干因子连乘积、乘方、开方或商形式的函数的导数或微分	40
题型 21	求分段函数的导数或微分	40
题型 22	求简单函数的高阶导数	43
第 3 章	不定积分	47
3.1	不定积分	47
3.2	三种基本积分方法	48
3.3	不定积分中的概念	56
题型 23	与原函数相关的命题	56
3.4	各种函数的不定积分	57
题型 24	求简单有理函数的不定积分	57
题型 25	简单无理函数的不定积分	59
题型 26	三角有理式的积分	60
题型 27	分段函数的不定积分	63
题型 28	含对数函数、反三角函数的不定积分	65
题型 29	复合函数的不定积分	66
题型 30	计算隐函数的不定积分	67
第 4 章	定积分	69
4.1	定积分的基本性质	69
4.2	重要定理	69
4.3	重要公式	70
4.4	计算定积分的方法	71
4.5	反常积分(一)	72
4.6	与定积分的定义和性质相关的命题	74
题型 31	定积分的估值	74
题型 32	变限积分的求导问题	75
4.7	各种类型定积分的计算	76
题型 33	求分段函数的定积分	76

811	题型 34	求含有绝对值符号的定积分	77
811	题型 35	求被积函数中含有变上限积分的定积分	78
131	题型 36	求对称区间 $[-l, l]$ 上的定积分	79
	题型 37	求周期函数的定积分	81
131	题型 38	求被积函数的分母为两项,分子恰为其中一项的定积分	82
131	题型 39	求由三角有理式与初等函数通过四则运算、复合运算或变量代换所得式的定积分	82
131	题型 40	定积分等式的证明	83
131	题型 41	定积分不等式的证明	87
131	4.8	反常积分(二)	91
131	题型 42	反常积分的计算及收敛	91
	第 5 章	微分中值定理	93
130	5.1	闭区间上连续函数的性质	93
131	5.2	微分中值定理	93
131	5.3	闭区间上连续函数的命题	94
131	题型 43	闭区间上连续函数命题的证明	94
131	5.4	中值定理的应用	98
131	题型 44	证明给出的函数 $f(x)$ 满足某中值定理	98
131	题型 45	证明某个函数恒等于一个常数的命题	99
131	题型 46	命题 $f^{(n)}(\xi)=0$ 的证明	100
130	题型 47	欲证结论:至少存在一点 $\xi \in (a, b)$,使得 $f^{(n)}(\xi)=k(k \neq 0)$ 或由 $a, b, f(a), f(b), \xi, f(\xi), f'(\xi), \dots, f^{(n)}(\xi)$ 所构成的代数式成立	101
141	题型 48	欲证结论:在 (a, b) 内至少存在 $\xi, \eta(\xi \neq \eta)$ 满足某个代数式	104
	第 6 章	一元微积分的应用	106
150	6.1	重要定理和结论	106
151	6.2	导数的应用	106
151	题型 49	一元函数单调增减性的判别	106
151	题型 50	一元函数极值的判定或求解	109
151	题型 51	求一元函数的最值及简单应用	110
151	题型 52	曲线的拐点或凹凸区间的判定或求解	111
151	题型 53	函数曲线的渐近线方程的计算与导数的判定	112
151	6.3	方程的根	114
151	题型 54	方程根的存在性问题	114
151	题型 55	方程根的个数的研究	115
151	题型 56	方程根的唯一性问题	116
151	6.4	定积分的应用	118

77	题型 57 利用微元法解题	118
87	题型 58 求平面图形的面积	119
97	题型 59 求旋转体体积	121
78	第 7 章 常微分方程	123
88	7.1 二阶线性微分方程解的性质	123
98	7.2 二阶线性微分方程解的结构定理	123
108	7.3 一阶微分方程的求解	124
118	题型 60 一阶可分离变量方程的求解	124
128	题型 61 一阶齐次微分方程的求解	125
138	题型 62 一阶线性微分方程的求解	127
148	7.4 二阶或二阶以上微分方程的求解	129
158	题型 63 有关二阶常系数齐次线性或非齐次线性微分方程解的结构的命题	129
168	题型 64 求二阶常系数齐次线性或非齐次线性微分方程的通解	130
178	题型 65 微分方程的应用	135
188	题型 66 求一阶线性差分方程的通解或特解	136
198	第 8 章 多元函数微分学	138
208	8.1 连续、可微和可导的关系	138
218	8.2 多元函数的极值	138
228	8.3 多元函数微分	139
238	题型 67 有关二元函数定义域、极限、连续的计算题	139
248	题型 68 简单显函数 $z=f(x,y)$ 偏导数的计算	140
258	题型 69 考查二元函数 $z=f(x,y)$ 的连续、偏导及可微性	141
268	题型 70 多元复合函数偏导数的计算	142
278	题型 71 隐函数偏导数的计算	147
288	题型 72 多元函数全微分的计算	150
298	8.4 多元函数的极值和最值	151
308	题型 73 求多元函数的极值	151
318	题型 74 求多元函数的最值	154
328	第 9 章 二重积分	156
338	9.1 二重积分的性质和定理	156
348	9.2 二重积分的计算	157
358	9.3 二重积分	159
368	题型 75 更换二重积分的积分次序	159
378	题型 76 选择积分次序	160
388	题型 77 积分区域关于坐标轴对称的二重积分	162

题型 78	分段函数的二重积分	164
题型 79	被积函数 $f(x, y)$ 中含有绝对值符号的二重积分	166
题型 80	被积函数 $f(x, y)$ 中含有最值符号 \max 或 \min 的二重积分	167
题型 81	二重积分等式的证明	168
题型 82	二重积分不等式的证明	169
第 10 章	无穷级数	171
10.1	基本性质	171
10.2	级数的判敛法	171
10.3	幂级数	173
10.4	七个常见的函数展开式(必须熟记)	174
10.5	与级数概念和性质相关的命题	175
题型 83	判别数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 的敛散性, 并附有“若收敛时, 求其和”的命题	175
题型 84	利用级数敛散性的定义及性质, 判断级数的敛散性	176
10.6	级数敛散性的判别	177
题型 85	正项级数敛散性的判别	177
题型 86	交错级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} u_n$ ($u_n > 0$) 敛散性的判别	180
题型 87	任意项级数敛散性的判别	182
题型 88	有关数项级数敛散性的证明	185
题型 89	给出函数 $f(x)$ 的某种条件, 形如 $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ 的级数的敛散性的证明	187
题型 90	利用级数证明数列 $\{a_n\}$ 极限的存在或求解某些特殊极限	188
10.7	幂级数	189
题型 91	求幂级数的收敛域或收敛半径	189
题型 92	求函数在指定点的幂级数展开式	191
题型 93	无穷级数求和	194
第 11 章	函数方程与不等式证明	199
11.1	函数方程	199
题型 94	利用函数表示法与用什么字母表示无关的特性求函数方程	199
题型 95	利用极限求函数方程	199
题型 96	已知函数在一点的导数及函数方程, 求函数方程	200
题型 97	已知函数方程中含有变上限积分, 求函数方程	200
题型 98	已知函数连续, 且函数式中含函数的定积分、极限或二重积分, 求函数方程	203
题型 99	已知函数方程中含有偏导数条件, 求函数方程	204

11.2	不等式证明	204
100	存在一个点 $\xi \in (a, b)$, 使得不等式成立或不等式通过变形, 一端可写成 $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ 或 $\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$ 的命题	204
101	在某一区间 (a, b) 不等式命题成立的证明	205
102	文字不等式的证明	207
103	函数 $f(x)$ 二阶和二阶以上可导的不等式命题的证明	208
104	杂例	209
第 12 章	微积分在经济中的应用	211
12.1	基本概念和公式	211
12.2	复利问题	212
105	与概念相关的问题	212
106	一元函数微分学在经济中的应用(利润、价格等问题)	213
107	复利问题	216
108	一元积分学在经济中的应用	216
109	二元函数微分学在经济中的应用(最值问题)	217
110	微分方程在经济中的应用	218
	第 2 篇 线性代数题型	
第 13 章	行列式	219
13.1	重要定理和性质	219
13.2	重要结论	219
111	与行列式的定义和性质相关的命题	220
112	数值型行列式的计算	221
113	行列式的余子式或代数余子式线性组合的计算	226
114	计算抽象行列式	228
第 14 章	矩阵	231
14.1	矩阵的运算性质	231
14.2	重要结论	231
14.3	逆矩阵	232
115	有关逆矩阵的计算问题	232
116	矩阵可逆的证明	235
14.4	矩阵的运算	236
117	有关矩阵运算的命题	236

878	题型 118	求矩阵的行列式	238
881	题型 119	与伴随矩阵相关的命题	240
882	14.5	初等矩阵	241
	题型 120	有关初等变换和初等矩阵的命题	241
	第 15 章	向 量	244
	15.1	重要结论	244
	15.2	内积和施密特正交化方法	245
	15.3	向量题型	245
	题型 121	讨论向量组的线性相关性	245
	题型 122	求向量组的极大线性无关组和秩	249
	题型 123	有关向量组或矩阵的秩的计算与证明	250
	题型 124	有关向量的线性表示的问题	252
	题型 125	将向量组正交化	256
	第 16 章	线性方程组	257
	16.1	重要性质和定理	257
	16.2	有关线性方程组的题型	258
	题型 126	有关线性方程组的基本概念题	258
	题型 127	有关基础解系的命题	259
	题型 128	线性方程组的求解	260
	题型 129	矩阵方程的求解	264
	题型 130	讨论两个线性方程组解之间的关系	266
	第 17 章	特征值与特征向量	269
	17.1	重要结论	269
	17.2	矩阵的特征值与特征向量	270
	题型 131	求数值型矩阵的特征值与特征向量	270
	题型 132	求抽象矩阵的特征值与特征向量	272
	题型 133	特征值与特征向量的逆问题	273
	17.3	相似矩阵及其对角化	275
	题型 134	相似矩阵的判定及其逆问题	275
	题型 135	矩阵可对角化的判定及其逆问题	276
	题型 136	有关实对称矩阵的命题	277
	第 18 章	二次型	279
	18.1	重要结论	279
	18.2	二次型题型	279

838	题型 137	二次型所对应的矩阵及其性质	279
848	题型 138	用正交变换法化二次型为标准型	281
118	题型 139	有关正定的判定	285

第 3 篇 概率论与数理统计题型

118	第 19 章	事件的概率	288
848	19.1	重要性质	288
848	19.2	常用结论	289
848	19.3	古典概型和几何概型	290
820	题型 140	古典概型的概率计算	290
828	题型 141	几何概型的概率计算	291
828	19.4	概率的概念、性质及计算	292
728	题型 142	有关事件的独立性的命题	292
728	题型 143	利用逆事件概率公式 $P(A)=1-P(\bar{A})$ 计算概率	294
728	题型 144	利用加法公式、乘法公式和条件概率公式计算概率	294
828	题型 145	利用全概率公式与贝叶斯公式计算概率	297
828	题型 146	利用事件的独立性和伯努利概型计算概率	300
828	第 20 章	随机变量及其分布	302
864	20.1	重要定理和结论	302
868	20.2	一维随机变量及其分布	302
868	题型 147	与一维随机变量概念和性质相关的命题	302
868	题型 148	求离散型随机变量的分布律或分布函数	304
868	题型 149	求连续型随机变量的概率密度或分布函数	306
870	题型 150	由已知分布求概率或由已知概率求分布	307
870	题型 151	求一维随机变量函数的概率分布	309
878	题型 152	综合题	313
878	第 21 章	多维随机变量及其分布	315
878	21.1	重要结论	315
878	21.2	二维随机变量及其分布	315
878	题型 153	与二维随机变量概念、性质有关的命题	315
878	题型 154	求二维随机变量的各种分布(分布律,边缘分布律,边缘分布密度)	317
878	题型 155	随机变量独立性的判别	323
878	题型 156	由已知分布求概率	324

题型 157 求二维随机变量函数的分布	326
题型 158 关于二维正态分布的问题	331
第 22 章 随机变量的数字特征	334
22.1 重要性质和公式	334
22.2 重要结论	335
22.3 一维随机变量的数字特征	335
题型 159 求一维随机变量的数字特征	335
题型 160 求一维随机变量函数的数字特征或逆问题	337
22.4 二维或多维随机变量的数字特征	338
题型 161 求二维随机变量及其函数的数字特征	338
题型 162 有关数字特征与独立性及相关性的关系的命题	343
题型 163 利用 0-1 分布求多维随机变量的数字特征	345
题型 164 综合应用题型	346
第 23 章 大数定律和中心极限定理	348
23.1 大数定律	348
23.2 中心极限定理	349
题型 165 估算随机事件的概率	349
题型 166 与大数定律有关的命题	353
题型 167 试验次数 n 的确定	353
第 24 章 数理统计	356
24.1 常用统计量	356
24.2 三个常见的抽样分布: χ^2 分布、 t 分布和 F 分布	356
24.3 正态总体条件下样本均值和样本方差的分布	358
24.4 数理统计中的重要结论	358
24.5 参数估计的重要结论	359
24.6 统计量的基本概念	359
题型 168 求统计量的分布及概率	359
题型 169 求统计量的数字特征	361
24.7 参数估计	364
题型 170 求参数的点估计(矩估计和最大似然估计)	364

第 1 篇 高等数学题型

第 1 章 极限和连续

● 重要定理、公式和结论

1.1 重要定理

定理 1 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A \Leftrightarrow f_-(x_0) = f_+(x_0) = A$.

定理 2 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A \Leftrightarrow f(x) = A + \alpha(x)$, 其中 $\alpha(x)$ 为 $x \rightarrow 0$ 时的无穷小量, 即 $\lim_{x \rightarrow x_0} \alpha(x) = 0$.

定理 3 (极限的保号性) 如果 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$, 而且 $A > 0$ (或 $A < 0$), 那么存在常数 $\delta > 0$, 使得当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时, 恒有 $f(x) > 0$ [或 $f(x) < 0$].

定理 4 如果 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$, $f(x) > 0$ [或 $f(x) < 0$], 则 $A \geq 0$ (或 $A \leq 0$).

定理 5 (单调有界定理) 单调增加有上界 (或单调减少有下界) 数列一定有极限.

定理 6* (夹逼定理) 设在 x_0 的邻域内恒有 $\varphi(x) \leq f(x) \leq \psi(x)$, 且

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \varphi(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} \psi(x) = A, \quad \text{则 } \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$$

定理 7 (无穷大和无穷小的关系) 无穷大的倒数为无穷小; 非零的无穷小的倒数为无穷大.

定理 8 (无穷小的运算性质)

- (1) 有限个无穷小的代数和为无穷小;
- (2) 有限个无穷小的乘积为无穷小;
- (3) 无穷小乘以有界变量为无穷小.

定理 9 设有函数 $f(x), g(x)$, 如果在自变量的同一变化过程中, 有 $\lim f(x) = A, \lim g(x) = B$, 则

$$(1) \lim [f(x) \pm g(x)] = \lim f(x) \pm \lim g(x) = A \pm B;$$

上式第二个式子中的两个极限若有一个不存在, 则代数和的极限必不存在; 若两个极限都不存在, 则代数和的极限不一定存在.

加法运算可推广到有限个中去.

$$(2) \lim [f(x) \cdot g(x)] = \lim f(x) \cdot \lim g(x) = AB;$$

$$(3) \lim \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim f(x)}{\lim g(x)} = \frac{A}{B} \quad (B \neq 0);$$

(4) $\lim [cf(x)] = c \lim f(x) = cA$, 其中 c 为常数.

定理 10 设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 则 $|f(x)|$ 在 $[a, b]$ 上连续.

定理 11 初等函数在其定义域内的区间内连续(因为初等函数中可能有孤立点, 所以是在区间内连续).

推论: 设 $f(x)$ 在 x_0 处连续, 则 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(\lim_{x \rightarrow x_0} x) = f(x_0)$; 若没有说明 $f(x)$ 在 x_0 处连续, 则 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \neq f(\lim_{x \rightarrow x_0} x)$, 即极限符号和函数符号不能交换顺序.

定理 12 设数列 $\{x_n\}$ 收敛于 l , 那么它的任一子序列 $\{x_{n_k}\}$ 也收敛, 且极限也是 $l(n_k \rightarrow \infty)$; 反之不真.

定理 13(洛必达法则)

法则 I ($\frac{0}{0}$ 型) 设函数 $f(x), g(x)$ 满足条件

$$(1) \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0, \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = 0;$$

(2) $f(x), g(x)$ 在 x_0 的某邻域内可导, 在 x_0 点可除外(在无穷远邻域内可导), 且 $g'(x) \neq 0$;

$$(3) \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} \text{ 存在 (或为 } \infty \text{),}$$

$$\text{则 } \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

法则 II ($\frac{\infty}{\infty}$ 型) 设函数 $f(x), g(x)$ 满足条件

$$(1) \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \infty, \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = \infty;$$

(2) $f(x), g(x)$ 在 x_0 的邻域内可导, 在 x_0 点可除外(在无穷远邻域内可导), 且 $g'(x) \neq 0$;

$$(3) \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} \text{ 存在 (或为 } \infty \text{),}$$

$$\text{则 } \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

使用法则时需注意的事项:

(1) 只有 $\frac{0}{0}$ 或 $\frac{\infty}{\infty}$ 型的未定式才能使用法则;

(2) 每用完一次法则, 要将式子整理化简;

(3) 为简化运算, 经常将法则与等价无穷小结合使用;

(4) $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ 不存在(或为 ∞) 不能 $\Rightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$ 不存在;

(5) 当 $x \rightarrow \infty$ 时, 极限式中含有 $\sin x, \cos x$ (或 $x \rightarrow 0$ 时, 极限式中含有 $\sin \frac{1}{x}, \cos \frac{1}{x}$), 则

不能用洛必达法则.

1.2 重要公式

$$\text{公式 1} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sin x} = 1.$$

若极限式具有如下两个特点:

(1) 是 $\frac{0}{0}$ 型极限, 这是首要特点, 是本质;

(2) $\sin \square$ 与分数线对面变量 \square 形式一致, 则 $\lim_{\square \rightarrow 0} \frac{\sin \square}{\square} = 1$.

$$\text{公式 2} \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e \quad \text{或} \quad \lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e.$$

特点如下:

(1) 是 1^∞ 型极限;

(2) 括号中 1 后的变量(包括符号)与指数幂互为倒数.

公式 3(抓大头准则)

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_{n-1} x + a_n}{b_0 x^m + b_1 x^{m-1} + \cdots + b_{m-1} x + b_m} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{a_0 x^n}{b_0 x^m} = \begin{cases} \frac{a_0}{b_0}, & m = n \\ 0, & n < m \\ \infty, & n > m \end{cases}$$

即求 $x \rightarrow \infty$ 的极限时, 抓住起决定性作用的 x 的最高次幂的项, 把其余的项略掉.

公式 4(函数连续的充要条件)

函数在一点 x_0 连续的充要条件是

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = f(x_0)$$

公式 5

(1) 当 $x \rightarrow +\infty$ 时, 函数趋于 $+\infty$ 的速度由慢到快为 $\ln x, x^a (a > 0), a^x (a > 1), x^x$.

(2) 当 $n \rightarrow \infty$ 时, 通项趋于 $+\infty$ 的速度由慢到快为 $\ln n, n^a (a > 0), a^n (a > 1), n!, n^n$.

(3) 常用数列极限:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a} = 1 (a > 0), \quad \text{特例为} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = 1;$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} p^n = 0 (|p| < 1); \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^k} = 0 (k > 0); \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e.$$

(4) 常用函数极限:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \arctan x = \frac{\pi}{2}; \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \arctan x = -\frac{\pi}{2};$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \operatorname{arccot} x = 0; \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \operatorname{arccot} x = \pi;$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = \infty; \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0; \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} x^x = 1.$$

注: 若 $x \rightarrow \infty$ 的极限式中含有 $a^x (a > 0, a \neq 1)$, 特别是 e^x , 或 $\arctan x$, 或 $\operatorname{arccot} x$, 或 $|x|$ (或 $x \rightarrow 0$ 时, 极限式中含 $e^{\frac{1}{x}}$, 或 $\arctan \frac{1}{x}$, 或 $\operatorname{arccot} \frac{1}{x}$, 或 $|x|$), 一定要分别求出 $x \rightarrow +\infty, x \rightarrow -\infty$ (或 $x \rightarrow 0^+, x \rightarrow 0^-$) 时的极限, 若两者相等, 则 $x \rightarrow \infty$ (或 $x \rightarrow 0$) 时的极限存在, 否则不存在.