高校核心课程学习指导丛书

微分几何学习指导

WEIFEN JIHE XUEXI ZHIDAO

徐森林 金亚东 胡自胜 薛春华／编著

中国科学技术大学出版社

高校核心课程学

徐森林　金亚东　胡自胜　薛春华 / 编著

微分几何学习指导

WEIFEN JIHE
XUEXI ZHIDAO

中国科学技术大学出版社

内 容 简 介

本书是中国科学技术大学出版社出版的《微分几何》的配套书，它可帮助读者熟练地掌握微分几何的内容和方法. 本书对《微分几何》一书的全部习题做了详细的解答，并增加了一些有趣的习题以及联系古典微分几何与近代微分几何的典型题目.

本书可用作综合性大学、理工科大学、师范大学数学系高年级学生、教师和研究人员的参考书.

图书在版编目(CIP)数据

微分几何学习指导/徐森林等编著. —合肥：中国科学技术大学出版社，2014.4
(高校核心课程学习指导丛书)
ISBN 978-7-312-03358-2

Ⅰ. 微… Ⅱ. 徐… Ⅲ. 微分几何—高等学校—题解 Ⅳ. O186.1-44

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2014)第 039707 号

出版 中国科学技术大学出版社
安徽省合肥市金寨路 96 号，230026
http://press.ustc.edu.cn
印刷 合肥市宏基印刷有限公司
发行 中国科学技术大学出版社
经销 全国新华书店
开本 710 mm×960 mm 1/16
印张 23.5
字数 447 千
版次 2014 年 4 月第 1 版
印次 2014 年 4 月第 1 次印刷
印数 1 — 4000 册
定价 39.00 元

前　言

微分几何是一门历史悠久的学科.近一个世纪以来,许多著名数学家如陈省身、丘成桐等都在这一研究方向上作出了极其重要的贡献.这一学科的生命至今仍很旺盛,并渗透到各个科学研究领域.

古典微分几何以数学分析为主要工具,研究空间中光滑曲线与光滑曲面的各种性质.徐森林等编写的《微分几何》共分 3 章.第 1 章讨论了曲线的曲率、挠率、Frenet 公式、Bouquet 公式等局部性质;证明了曲线论的基本定理,也讨论了曲线的整体性质:4 顶点定理、Minkowski 定理与 Fenchel 定理以及 Fary-Milnor 关于纽结的全曲率不等式.第 2 章引进了第 1 基本形式、第 2 基本形式、Gauss(总)曲率、平面曲率、Weingarten 映射、主曲率、曲率线、测地线等重要概念,给出了曲面的基本公式和基本方程、曲面论的基本定理,以及著名的 Gauss 绝妙定理等曲面的局部性质,还应用正交活动标架与外微分运算研究了第 1、第 2、第 3 基本形式,Weingarten 映射以及第 1、第 2 结构方程.第 3 章详细论述了曲面的整体性质,得到了全脐超曲面定理、球面的刚性定理、极小曲面的 Bernstein 定理、著名的 Gauss-Bonnet 公式及 Poincaré 指标定理.

《微分几何》[21]尽可能对 $\mathbf{R}^n$ 中 $n-1$ 维超曲面采用 g_{ij},L_{ij},…表示,是为了克服 $\mathbf{R}^3$ 中 E,F,G,L,M,N 不能推广到高维的困境和障碍,也是为了能顺利地将古典微分几何从 $\mathbf{R}^3$ 推广到 $\mathbf{R}^n$,再搬到 Riemann 流形上.2.10 节介绍 Riemann 流形上的 Levi-Civita 联络、向量场的平移及测地线,是为了使读者逐渐摆脱古典方法(坐标观点)而进入近代方法(映射观点或不变观点).因此,它为读者从古典微分几何到近代微分几何之间架设了一座桥梁.当 $n=3$ 时,作为特例,我们得到 $\mathbf{R}^3$ 中的 1 维曲线、2 维曲面的一些古典结果,它们是读者研究微分几何不可缺少的几何直观背景.熟读该书后,读者一定会感到离进入近代微分几何的学习与研究只差一步之遥.

本书是《微分几何》的配套书,它可帮助读者熟练地掌握微分几何的基本内容和基本方法.我们对《微分几何》中全部习题作了详细的解答,并增加了一些有趣的习题以及联系古典与近代微分几何的典型题目(以星号 * 标出).它可增加读者的

几何背景，有助于古典微分几何的实际应用，也有助于读者能力的提高；它也可开阔读者的视野，有助于近代微分几何的学习和研究.

早在20世纪60年代，作者徐森林、薛春华跟随著名数学家吴文俊教授攻读微分几何，得到恩师的栽培. 在几十年中，作者在中国科学技术大学数学系、少年班及统计系讲授古典微分几何，使得一大批大学生顺利进入研究生阶段，并使他们对近代微分几何产生了浓厚兴趣，其中有七八人次在全国研究生暑期班中获了奖，还培养了许多几何拓扑专业的年轻数学家.

感谢中国科学技术大学数学系领导和老师对我们的大力支持，感谢著名数学家吴文俊教授的鼓励和教导.

徐森林

2014 年 2 月于北京

目　　录

第 1 章　曲　线　论

这一章将引进空间 $\mathbf{R}^n$ 中的 C^r 曲线、C^r 正则曲线（$r \geqslant 1$）. 在 $\mathbf{R}^3$ 中给出曲率 κ 与挠率 τ 的概念. 曲率表示曲线弯曲的程度，曲率为零的连通曲线就是直线段. 挠率表示曲线离开密切平面的程度，挠率为零的连通曲线就是平面曲线. 平面 $\mathbf{R}^2$ 中给出的相对曲率 κ_r，其绝对值表示曲线弯曲的程度，而它的正负号表示曲线弯到哪一侧，正号表示弯向 V_{2r} 一侧，负号表示弯向 V_{2r} 的另一侧. 接着详细介绍了重要的 Frenet 公式，研究了圆柱螺线、一般螺线以及 Bertrand 曲线. 应用 Taylor 公式，在曲线点邻近建立了 Bouquet 公式（局部规范形式），由此可研究该点处曲线的局部性质. 1.5 节证明了曲线论的基本定理与曲线的刚性定理. 除一个刚性运动外，空间曲线完全由它的曲率与挠率所决定. 在 $\mathbf{R}^2$ 中，曲线除一个平面刚性运动外，它完全由相对曲率所决定. 1.6 节仔细论述了曲率圆、渐缩线和渐伸线，以及它们之间的关系. 1.7 节研究了曲线的整体性质，即大范围性质. 证明了 4 顶点定理、Minkowski 定理（等宽 b 曲线的周长为 πb）、旋转指标定理、Fenchel 定理以及 Fary-Milnor 纽结不等式.

1.1　C^r 正则曲线、切向量、弧长参数

1. 知识要点

定义 1.1.1* 　设 $\boldsymbol{x}:(a,b) \to \mathbf{R}^n$，$t \mapsto \boldsymbol{x}(t) = (x^1(t), x^2(t), \cdots, x^n(t)) = \sum_{i=1}^{n} x^i(t)\boldsymbol{e}_i$ 是以 t 为**参数的参数曲线**，其中 $x^i(t)$ 为点 $\boldsymbol{x}(t)$ 在 $\mathbf{R}^n$ 中的**第 i 个分量**（$i = 1, 2, \cdots, n$）；$\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \cdots, \boldsymbol{e}_n\}$ 为 $\mathbf{R}^n$ 中的规范正交基，或单位正交基，或 ON 基.

---

* 本书中定义、定理、引理等的序号均与《微分几何》中的序号对应.

如果 $\boldsymbol{x}(t)$ 连续($\Leftrightarrow x^i(t), i=1,2,\cdots,n$ 连续),C^r 可导(具有 r 阶连续导数,其中 $r\in\mathbf{N}^*=\{1,2,\cdots\}$(正整数集)),$C^\infty$ 可导(具有各阶连续导数),C^ω(每个 $x^i(t), i=1,2,\cdots,n$ 在每个 $t\in(a,b)$ 处可展开为收敛的幂级数,即是实解析的),则分别称 $\boldsymbol{x}(t)$ 为 C^0 **(连续)曲线**,C^r **曲线**,C^∞ **曲线**,C^ω **(实解析)曲线**.

记 $C^r((a,b),\mathbf{R}^n)$ 为 $\mathbf{R}^n$ 中在 (a,b) 上的 C^r 参数曲线的全体.

设 $\boldsymbol{x}(t)\in C^r((a,b),\mathbf{R}^n)$ $(r\geqslant 1)$,我们称

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{x}}{\mathrm{d}t}=\boldsymbol{x}'(t)&=\sum_{i=1}^n x^{i\prime}(t)\boldsymbol{e}_i\\&=(x^{1\prime}(t),x^{2\prime}(t),\cdots,x^{n}(t))\end{aligned}$$

为曲线 $\boldsymbol{x}(t)$ 在 t 或 $\boldsymbol{x}(t)$ 处的**切向量**. 如果 $t_0\in(a,b)$, $\boldsymbol{x}'(t_0)\neq\boldsymbol{0}$,则称 t_0 或 $\boldsymbol{x}(t_0)$ 为曲线 $\boldsymbol{x}(t)$ 的**正则点**;如果 $\boldsymbol{x}'(t_0)=0$,则称 t_0 或 $\boldsymbol{x}(t_0)$ 为曲线 $\boldsymbol{x}(t)$ 的**奇点**. 如果曲线 $\boldsymbol{x}(t)$ $(a\leqslant t\leqslant b)$ 上所有点都是正则点,称 $\boldsymbol{x}(t)$ 为**正则曲线**.

按惯例,我们认为参数增加的方向(即切向量 $\boldsymbol{x}'(t)$ 所指的方向)为曲线 $\boldsymbol{x}(t)$ 的**正向**,而其相反的方向为**负向**或**反向**.

注 1.1.2 曲线 $\boldsymbol{x}(t)$ 的正则点(或奇点)与参数的选取无关,即如果 $\bar{t}=\bar{t}(t)$, $\bar{t}'(t)\neq 0$,则关于 t 为正则(奇)点$\Leftrightarrow$关于 $\bar{t}$ 为正则(奇)点.

定义 1.1.2 设 $\boldsymbol{x}(t)$ $(a<t<b)$ 为 C^r $(r\geqslant 1)$ 正则曲线,我们称

$$s(t)=\int_{t_0}^t|\boldsymbol{x}'(t)|\,\mathrm{d}t=\int_{t_0}^t\Big[\sum_{i=1}^n(x^{i\prime}(t))^2\Big]^{\frac{1}{2}}\mathrm{d}t$$

为曲线 $\boldsymbol{x}(t)$ 从参数 t_0 到 t 的**弧长**.

注 1.1.3 如果选直角坐标系 $x^1,x^2,\cdots,x^n$ 中的 x^1 为曲线的参数,则弧长

$$s(x^1)=\int_a^b[1+(x^{2\prime}(x^1))^2+\cdots+(x^{n\prime}(x^1))^2]^{\frac{1}{2}}\mathrm{d}x^1.$$

当 $n=2$ 时,如果采用极坐标,$\boldsymbol{x}(\theta)=(r(\theta)\cos\theta,r(\theta)\sin\theta)$,则

$$s(\theta)=\int_{\theta_0}^{\theta_1}[r'^2(\theta)+r^2(\theta)]^{\frac{1}{2}}\mathrm{d}\theta.$$

引理 1.1.1 弧长与同向参数的选取无关.

引理 1.1.2 设 $\boldsymbol{x}(t)$ $(a<t<b)$ 为 C^r $(r\geqslant 1)$ 正则曲线,$s=s(t)$ 为弧长,则 $s'(t)=|\boldsymbol{x}'(t)|>0$,并且 s 可作为该正则曲线的参数.

引理 1.1.3 设 $\boldsymbol{x}(t)$ 为 C^r $(r\geqslant 1)$ 正则曲线,则

$$|\boldsymbol{x}'(t)|=1\quad\Leftrightarrow\quad t=s+c,$$

其中 s 为该正则曲线的弧长,c 为常数.

例 1.1.2 曲线 $\boldsymbol{x}(t)=(a\cos t,a\sin t,bt)$ $(a>0,b>0)$ 为圆柱面 $x^2+y^2=a^2$ 上

间距为 $2\pi b$ 的一条**圆柱螺线**，它是一条 C^∞ 正则曲线，其弧长为

$$s(t)=\sqrt{a^2+b^2}\,t.$$

从而，弧长参数表示为

$$\boldsymbol{x}=\left(a\cos\frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}},a\sin\frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}},\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}s\right).$$

例 1.1.3　双曲螺线

$$\boldsymbol{x}(t)=(a\operatorname{ch}t,a\operatorname{sh}t,at)\quad(a>0)$$

的弧长为

$$s(t)=\sqrt{2}a\operatorname{sh}t.$$

从而，弧长参数表示为

$$\boldsymbol{x}=\left(a\sqrt{1+\frac{s^2}{2a^2}},\frac{s}{\sqrt{2}},a\operatorname{arsh}\frac{s}{\sqrt{2}a}\right).$$

例 1.1.4　圆柱螺线

$$\boldsymbol{x}(t)=(a\cos t,a\sin t,bt)$$

在 $t=\frac{\pi}{3}$ 处的切线方程为

$$\boldsymbol{X}=\boldsymbol{x}\left(\frac{\pi}{3}\right)+\lambda\boldsymbol{x}'\left(\frac{\pi}{3}\right)\quad(\lambda\text{ 为切线上的参数},\boldsymbol{X}\text{ 为切线上的动点}).$$

在 $t=\frac{\pi}{3}$ 处的法面方程为

$$\left[\boldsymbol{X}-\boldsymbol{x}\left(\frac{\pi}{3}\right)\right]\cdot\boldsymbol{x}'\left(\frac{\pi}{3}\right)=0\quad(\boldsymbol{X}\text{ 为法面上的动点}),$$

即

$$-3\sqrt{3}X^1+3aX^2+6bX^3-2\pi b^2=0.$$

引理 1.1.4　$\mathbf{R}^n$ 中 C^1 向量函数 $\boldsymbol{x}(t)(a<t<b)$ 具有固定长度 $\Leftrightarrow$ 对 $\forall\, t\in(a,b)$，有 $\boldsymbol{x}'(t)\perp\boldsymbol{x}(t)$，即 $\boldsymbol{x}'(t)\cdot\boldsymbol{x}(t)=0$.

定理 1.1.1　$\mathbf{R}^n$ 中 C^1 单位向量 $\boldsymbol{x}(t)$ 关于 t 的**旋转速度**

$$\lim_{\Delta t\to0}\left|\frac{\Delta\varphi}{\Delta t}\right|=|\boldsymbol{x}'(t)|,$$

其中 $\Delta\varphi$ 表示向量 $\boldsymbol{x}(t)$ 与 $\boldsymbol{x}(t+\Delta t)$ 所夹的角，而 $|\boldsymbol{x}'(t)|$ 正反映了该夹角对 Δt 的变化率.

2. 习题解答

1.1.1 求悬链线

$$x(t)=\left(t,a\mathrm{ch}\,\frac{t}{a},0\right)\quad(a\neq 0)$$

的弧长 s,并用弧长为参数表示该曲线.

解 计算得 $x'(t)=\left(1,\mathrm{sh}\,\frac{t}{a},0\right)$,弧长

$$s=\int_0^t|x'(t)|\,\mathrm{d}t=\int_0^t\sqrt{1+\mathrm{sh}^2\frac{t}{a}}\,\mathrm{d}t=\int_0^t\mathrm{ch}\,\frac{t}{a}\,\mathrm{d}t=a\mathrm{sh}\,\frac{t}{a}\Big|_0^t=a\mathrm{sh}\,\frac{t}{a},$$

所以

$$t=a\cdot\mathrm{arsh}\,\frac{s}{a},$$

$$a\mathrm{ch}\,\frac{t}{a}=a\sqrt{1+\mathrm{sh}^2\frac{t}{a}}=a\sqrt{1+\left(\frac{s}{a}\right)^2}=\sqrt{a^2+s^2}.$$

因此

$$x=\left(a\cdot\mathrm{arsh}\,\frac{s}{a},\sqrt{a^2+s^2},0\right).$$ □

1.1.2 求曳物线

$$x(t)=(a\cos t,a\ln(\sec t+\tan t)-a\sin t,0)$$

的弧长 s,其中 $a>0$,并用弧长为参数表示该曲线.

解 计算得

$$\begin{aligned}x'(t)&=\left(-a\sin t,a\cdot\frac{\sec t\cdot\tan t+\sec^2 t}{\sec t+\tan t}-a\cos t,0\right)\\&=\left(-a\sin t,a\cdot\frac{\sec t(\tan t+\sec t)}{\sec t+\tan t}-a\cos t,0\right)\\&=a\left(-\sin t,\frac{1}{\cos t}-\cos t,0\right),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}|x'(t)|^2&=a^2\left[(-\sin t)^2+\left(\frac{1}{\cos t}-\cos t\right)^2\right]\\&=a^2\left(\sin^2 t+\cos^2 t-2+\frac{1}{\cos^2 t}\right)\\&=a^2\,\frac{1-\cos^2 t}{\cos^2 t}=a^2\tan^2 t.\end{aligned}$$

弧长

$$s=\int_0^t |\boldsymbol{x}'(t)|\,\mathrm{d}t=\int_0^t a\tan t\mathrm{d}t=a\ln\frac{1}{\cos t}\Big|_0^t=a\ln\sec t.$$

因此

$$\mathrm{e}^{\frac{s}{a}}=\sec t=\frac{1}{\cos t},$$

$$\cos t=\mathrm{e}^{-\frac{s}{a}},t=\arccos \mathrm{e}^{-\frac{s}{a}}=\arccos \mathrm{e}^{-\frac{s}{a}},$$

以及

$$\boldsymbol{x}=\left(a\mathrm{e}^{-\frac{s}{a}},a\ln\left[\mathrm{e}^{\frac{s}{a}}+\frac{\sqrt{1-(\mathrm{e}^{-\frac{s}{a}})^2}}{\mathrm{e}^{-\frac{s}{a}}}\right]-a\sqrt{1-(\mathrm{e}^{-\frac{s}{a}})^2},0\right)$$
$$=\left(a\mathrm{e}^{-\frac{s}{a}},a\ln(\mathrm{e}^{\frac{s}{a}}+\sqrt{\mathrm{e}^{\frac{2s}{a}}-1})-a\sqrt{1-\mathrm{e}^{-\frac{2s}{a}}},0\right).$$ □

1.1.3 设圆柱螺线

$$\boldsymbol{x}(s)=(r\cos\omega s,r\sin\omega s,h\omega s)\quad(r>0,h>0,\omega=(r^2+h^2)^{-\frac{1}{2}}).$$

证明:s 为其弧长参数.

证明 计算得

$$\boldsymbol{x}'(s)=(-r\omega\sin\omega s,r\omega\cos\omega s,h\omega),$$

$$|\boldsymbol{x}'(s)|=\sqrt{r^2\omega^2(\sin^2\omega s+\cos^2\omega s)+h^2\omega^2}=\sqrt{\omega^2(r^2+h^2)}$$
$$=\sqrt{(r^2+h^2)^{-1}(r^2+h^2)}=1.$$

由此推得 s 为 $\boldsymbol{x}(s)$ 的弧长参数. □

1.1.4 用极坐标方程 $r=r(\theta)$ 给出曲线的弧长表达式,其中 $r(\theta)$ 为 C^1 函数.

解 解法 1 计算得

$$\boldsymbol{x}(\theta)=(r(\theta)\cos\theta,r(\theta)\sin\theta),$$

$$\boldsymbol{x}'(\theta)=(r'(\theta)\cos\theta-r(\theta)\sin\theta,r'(\theta)\sin\theta+r(\theta)\cos\theta).$$

弧长

$$s=\int_{\theta_0}^{\theta}|\boldsymbol{x}'(\theta)|\,\mathrm{d}\theta$$
$$=\int_{\theta_0}^{\theta}\sqrt{[r'(\theta)\cos\theta-r(\theta)\sin\theta]^2+[r'(\theta)\sin\theta+r(\theta)\cos\theta]^2}\mathrm{d}\theta$$
$$=\int_{\theta_0}^{\theta}\sqrt{r'^2(\theta)+r^2(\theta)}\mathrm{d}\theta.$$

解法 2 曲线极坐标方程 $r=r(\theta)$,写成复数形式为 $Z=r(\theta)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$,则有

$$\mathrm{d}Z=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\mathrm{d}r+\mathrm{i}r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\mathrm{d}\theta=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}[r'(\theta)+\mathrm{i}r(\theta)]\mathrm{d}\theta.$$

弧长元

$$\mathrm{d}s=|\mathrm{d}Z|=\sqrt{r'^2(\theta)+r^2(\theta)}\mathrm{d}\theta,$$

故弧长

$$s=\int_{\theta_0}^{\theta}\sqrt{r'^2(\theta)+r^2(\theta)}\,\mathrm{d}\theta.\qquad\square$$

1.1.5 设 $\boldsymbol{x}(t)(a<t<b)$ 为 $\mathbf{R}^n$ 中的 C^1 正则曲线，$\boldsymbol{x}(t_0)$ 为定点 P_0 到该曲线距离最近的点. 证明：切向量 $\boldsymbol{x}'(t_0)$ 与 $\boldsymbol{x}(t_0)-P_0$ 垂直.

证明 因为 $[\boldsymbol{x}(t_0)-P_0]^2$ 为 $[\boldsymbol{x}(t)-P_0]^2$ 达到的最小值，当然也是极小值. 根据 Fermat 定理，

$$0=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[\boldsymbol{x}(t)-P_0]^2\Big|_{t=t_0}=2[\boldsymbol{x}(t_0)-P_0]\cdot\boldsymbol{x}'(t_0)$$

$$\Rightarrow\quad[\boldsymbol{x}(t_0)-P_0]\cdot\boldsymbol{x}'(t_0)=0,$$

即 $\boldsymbol{x}'(t_0)$ 与 $\boldsymbol{x}(t_0)-P_0$ 垂直. $\square$

1.1.6 设 $\boldsymbol{x}(t)$ 为 C^1 参数曲线，$\boldsymbol{m}$ 为固定向量. 若对任何 t，$\boldsymbol{x}'(t)$ 正交于 $\boldsymbol{m}$，且 $\boldsymbol{x}(0)$ 正交于 $\boldsymbol{m}$，证明：对任何 t，$\boldsymbol{x}(t)$ 正交于 $\boldsymbol{m}$.

证明 由于 $\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{x}'(t)=0$ 与 $\boldsymbol{m}$ 为固定向量，所以

$$[\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{x}(t)]'=\boldsymbol{m}'\cdot\boldsymbol{x}(t)+\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{x}'(t)=\boldsymbol{0}\cdot\boldsymbol{x}(t)+0=0,$$

故 $\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{x}(t)=$ 常数. 从而 $\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{x}(t)=\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{x}(0)=0$，即 $\boldsymbol{x}(t)$ 正交于 $\boldsymbol{m}$. $\square$

1.1.7 设平面上 C^1 曲线 $\boldsymbol{x}(t)$ 在同一平面内直线 l 的同一侧，且与 l 只交于该曲线的正则点 P. 证明：直线 l 是曲线 $\boldsymbol{x}(t)$ 在点 P 处的切线.

证明 因点 P 为 $\boldsymbol{x}(t)$ 的正则点，故点 P 处的切线 $\tilde{l}$ 存在，它是点 Q 沿曲线 $\boldsymbol{x}(t)$ 趋于 P 时，割线 PQ 的极限位置.（反证）若 l 不是切线 $\tilde{l}$，由于 Q 始终在 l 的一侧，这与 PQ 无限趋近 $\tilde{l}$ 相矛盾，故 l 必为点 P 处的切线. $\square$

1.2 曲率、挠率

1. 知识要点

定义 1.2.1 设 $\boldsymbol{x}(t)$ 为 $\mathbf{R}^3$ 中的 C^2 正则曲线，s 为弧长参数. 由引理 1.1.3，$\boldsymbol{V}_1(s)=\boldsymbol{x}'(s)$ 为沿 $\boldsymbol{x}(s)$ 的单位切向量场. 我们称

$$\kappa(s)=|\boldsymbol{V}_1'(s)|=|\boldsymbol{x}''(s)|$$

为曲线 $\boldsymbol{x}(s)$ 在点 s 的**曲率**. 它反映了曲线的弯曲程度.

当 $\kappa(s)\neq0$ 时，称 $\rho(s)=\dfrac{1}{\kappa(s)}$ 为曲线 $\boldsymbol{x}(s)$ 在点 s 处的**曲率半径**.

如果 $\boldsymbol{x}''(s)\neq\boldsymbol{0}$(即 $\kappa(s)\neq 0$),记

$$\boldsymbol{V}_2(s)=\frac{\boldsymbol{V}_1'(s)}{|\boldsymbol{V}_1'(s)|}=\frac{\boldsymbol{x}''(s)}{|\boldsymbol{x}''(s)|},$$

它是单位向量,且 $\boldsymbol{V}_1(s)\perp\boldsymbol{V}_2(s)$. 称 $\boldsymbol{V}_2(s)$ 为曲线 $\boldsymbol{x}(s)$ 在点 s 处的**主法向量**. 于是

$$\boldsymbol{V}_1'(s)=\kappa(s)\boldsymbol{V}_2(s).$$

而 $\boldsymbol{V}_3(s)=\boldsymbol{V}_1(s)\times\boldsymbol{V}_2(s)$ 称为曲线 $\boldsymbol{x}(s)$ 在点 s 处的**从法向量**. $\{\boldsymbol{V}_1(s),\boldsymbol{V}_2(s),\boldsymbol{V}_3(s)\}$ 为 $\boldsymbol{x}(s)$ 点处的右旋单位正交基,它是沿曲线 $\boldsymbol{x}(s)$ 的自然活动标架,记为 $\{\boldsymbol{x}(s);\boldsymbol{V}_1(s),\boldsymbol{V}_2(s),\boldsymbol{V}_3(s)\}$.

由 $\boldsymbol{V}_1(s)$ 与 $\boldsymbol{V}_2(s)$ 所张成的平面称为点 s(或 $\boldsymbol{x}(s)$)处的**密切平面**.

由 $\boldsymbol{V}_1(s)$ 与 $\boldsymbol{V}_3(s)$ 所张成的平面称为点 s(或 $\boldsymbol{x}(s)$)处的**从切平面**.

由 $\boldsymbol{V}_2(s)$ 与 $\boldsymbol{V}_3(s)$ 所张成的平面称为点 s(或 $\boldsymbol{x}(s)$)处的**法平面**.

通过点 $\boldsymbol{x}(s)$,分别以 $\boldsymbol{V}_1(s),\boldsymbol{V}_2(s),\boldsymbol{V}_3(s)$ 为方向的直线称为曲线 $\boldsymbol{x}(s)$ 在 s 处的**切线**,**主法线**,**从法线**.

如果 $\boldsymbol{x}(s)$ 为 C^3 正则曲线,且 $\boldsymbol{x}''(s)\neq\boldsymbol{0}$(即 $\kappa(s)\neq 0$),则

$$\boldsymbol{V}_3'(s)=-\tau(s)\boldsymbol{V}_2(s)$$

确定的函数 $\tau(s)$ 称为曲线 $\boldsymbol{x}(s)$ 在点 s 处的**挠率**. 显然,

$$\tau(s)=-\boldsymbol{V}_3'(s)\cdot\boldsymbol{V}_2(s),\quad |\tau(s)|=|\boldsymbol{V}_3'(s)|.$$

定理 1.2.1 (1) 设 $\boldsymbol{x}(s)$ 为 $\mathbf{R}^3$ 中的 C^3 正则曲线,则挠率

$$\tau(s)=\frac{(\boldsymbol{x}'(s),\boldsymbol{x}''(s),\boldsymbol{x}'''(s))}{|\boldsymbol{x}''(s)|^2},$$

其中 $(\boldsymbol{x}'(s),\boldsymbol{x}''(s),\boldsymbol{x}'''(s))=[\boldsymbol{x}'(s)\times\boldsymbol{x}''(s)]\cdot\boldsymbol{x}'''(s)$ 为 $\boldsymbol{x}'(s),\boldsymbol{x}''(s),\boldsymbol{x}'''(s)$ 的混合积,s 为弧长参数,$\boldsymbol{x}''(s)\neq\boldsymbol{0}$(即 $\kappa(s)\neq 0$).

(2) 如果 t 为参数,$\boldsymbol{x}(t)$ 为 t 的 C^3 正则曲线,则曲率与挠率分别为

$$\kappa(t)=\frac{|\boldsymbol{x}'(t)\times\boldsymbol{x}''(t)|}{|\boldsymbol{x}'(t)|^3},\quad \tau(t)=\frac{(\boldsymbol{x}'(t),\boldsymbol{x}''(t),\boldsymbol{x}'''(t))}{|\boldsymbol{x}'(t)\times\boldsymbol{x}''(t)|^2}.$$

当 $t=s$ 为弧长时,$\kappa(s)=|\boldsymbol{x}'(s)\times\boldsymbol{x}''(s)|$.

引理 1.2.1 当曲线改变定向时,曲率与挠率不变.

引理 1.2.2 设 $\boldsymbol{x}(s)$ 为 C^2 正则连通曲线(s 为弧长),则

$$\boldsymbol{x}(s)\text{为直线段}\quad\Leftrightarrow\quad\text{曲率 }\kappa(s)=0.$$

定理 1.2.2 设 $\boldsymbol{x}(s)$ 为 $\mathbf{R}^3$ 中 C^3 正则连通曲线,则

$$\boldsymbol{x}(s)\text{为平面曲线,且处处 }\kappa(s)\neq 0\quad\Leftrightarrow\quad\tau(s)\equiv 0.$$

推论 1.2.1 设 $\boldsymbol{x}(s)$ 为 $\mathbf{R}^3$ 中 C^3 连通曲线,s 为弧长参数,则

$\boldsymbol{x}(s)$ 为平面曲线,且处处 $\kappa(s)\neq 0$ $\Leftrightarrow$ 曲线 $\boldsymbol{x}(s)$ 的密切平面处处平行.

定理 1.2.3 曲线的弧长、曲率与挠率都是 $\mathbf{R}^3$ 中的刚性运动($\tilde{\boldsymbol{x}}(t)=\boldsymbol{x}(t)\boldsymbol{A}+\boldsymbol{b}$,$\boldsymbol{A}$ 为行列式 $|\boldsymbol{A}|=1$ 的 3 阶正交矩阵,$\boldsymbol{b}$ 为常行向量)不变量.

推论 1.2.2 在定理 1.2.3 中,如果 $\tilde{\boldsymbol{x}}(t)=\boldsymbol{x}(t)\boldsymbol{A}+\boldsymbol{b}$ 中 $\boldsymbol{A}$ 的行列式 $|\boldsymbol{A}|=-1$,且 $\boldsymbol{A}$ 为正交矩阵,则

$$\tilde{s}(t)=s(t),\quad \tilde{\kappa}(t)=\kappa(t),\quad \tilde{\tau}(t)=-\tau(t).$$

注 1.2.1 如果两条曲线相应的弧长、曲率与挠率对应相等,它们是否可以通过一个刚性运动而叠合(参阅曲线论基本定理 1.5.2)?

例 1.2.1 圆周 $\boldsymbol{x}(s)=\left(r\cos\dfrac{s}{r},r\sin\dfrac{s}{r},0\right)$(即 $(x^1)^2+(x^2)^2=r^2,x^3=0,r>0$)的曲率 $\kappa(s)=\dfrac{1}{r}$,挠率 $\tau(s)=0$.

例 1.2.2 椭圆 $\boldsymbol{x}(t)=(a\cos t,b\sin t,0)(a>0,b>0)$的弧长,曲率与挠率分别为

$$s(t)=\int_0^t(a^2\sin^2 t+b^2\cos^2 t)^{\frac{1}{2}}\,\mathrm{d}t,$$

$$\kappa(t)=\frac{ab}{(a^2\sin^2 t+b^2\cos^2 t)^{\frac{3}{2}}},$$

$$\tau(t)=0.$$

例 1.2.3 设 r,h 及 $\omega=(r^2+h^2)^{-\frac{1}{2}}$ 均为常数,则圆柱螺线

$$\boldsymbol{x}(s)=(r\cos\omega s,r\sin\omega s,\omega hs)$$

的曲率 $\kappa(s)=\omega^2 r$,挠率 $\tau(s)=\omega^2 h$,它们也为常数,而 s 为其弧长. 进而,$\boldsymbol{x}(s)$的单位切向量 $\boldsymbol{x}'(s)$与 z 轴的夹角为定值 $\arccos\omega h$.

例 1.2.4 如果一条曲线 $\boldsymbol{x}(s)$的切向量始终与一固定方向成一个定角,则称此曲线为**一般螺线**(s 为弧长参数). 圆柱螺线为其特例.

2. 习题解答

1.2.1 求 3 次挠曲线

$$\boldsymbol{x}(t)=(at,bt^2,ct^3)\quad(a>0,b>0,c>0)$$

的切向量、切线、主法线、密切平面方程、法平面方程.

解 $\boldsymbol{x}'(t)=(a,2bt,3ct^2)$,切向量,

$\boldsymbol{x}''(t)=(0,2b,6ct)\,/\!/\,(0,b,3ct)$.

$\boldsymbol{V}_1=\dot{\boldsymbol{x}}=\boldsymbol{x}'(t)\dfrac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}s}$($s$ 为其弧长),其中 $\dot{\boldsymbol{x}}=\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{x}}{\mathrm{d}s}$.

$$\kappa \boldsymbol{V}_2 = \dot{\boldsymbol{V}}_1 = \ddot{\boldsymbol{x}} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\left[\boldsymbol{x}'(t)\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}s}\right] = \boldsymbol{x}''(t)\left(\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}s}\right)^2 + \boldsymbol{x}'(t)\frac{\mathrm{d}^2 t}{\mathrm{d}s^2},$$

$$\begin{aligned}\boldsymbol{V}_3 &= \boldsymbol{V}_1 \times \boldsymbol{V}_2 = \boldsymbol{x}'(t)\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}s} \times \left[\boldsymbol{x}''(t)\left(\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}s}\right)^2 + \boldsymbol{x}'(t)\frac{\mathrm{d}^2 t}{\mathrm{d}s^2}\right] \times \frac{1}{\kappa} \\ &= \frac{1}{\kappa}\left(\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}s}\right)^3 \boldsymbol{x}'(t) \times \boldsymbol{x}''(t),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\boldsymbol{V}_2 &= \boldsymbol{V}_3 \times \boldsymbol{V}_1 = \left[\frac{1}{\kappa}\left(\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}s}\right)^3 \boldsymbol{x}'(t) \times \boldsymbol{x}''(t)\right] \times \boldsymbol{x}'(t)\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}s} \\ &= -\frac{1}{\kappa}\left(\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}s}\right)^4 \boldsymbol{x}'(t) \times [\boldsymbol{x}'(t) \times \boldsymbol{x}''(t)].\end{aligned}$$

因为

$$(\boldsymbol{x}'(t), \boldsymbol{x}''(t), \boldsymbol{x}'''(t)) = \begin{vmatrix} a & 2bt & 3ct^2 \\ 0 & 2b & 6ct \\ 0 & 0 & 6c \end{vmatrix} = 12abc \neq 0,$$

所以

$$\tau(t) = \frac{(\boldsymbol{x}'(t), \boldsymbol{x}''(t), \boldsymbol{x}'''(t))}{|\boldsymbol{x}'(t) \times \boldsymbol{x}''(t)|} \neq 0,$$

因此 $\boldsymbol{x}(t)$ 为挠曲线.

切线方程为

$$\frac{X^1 - at}{a} = \frac{X^2 - bt^2}{2bt} = \frac{X^3 - ct^3}{3ct^2}.$$

主法线方程(由方向向量 $\boldsymbol{x}'(t) \times [\boldsymbol{x}'(t) \times \boldsymbol{x}''(t)]$确定)为

$$\frac{X^1 - at}{2ab^2 t + 9ac^2 t^3} = \frac{X^2 - bt^2}{-a^2 b + 9bc^2 t^4} = \frac{X^3 - ct^3}{-3a^2 ct - 6b^2 ct^3},$$

其中

$$\boldsymbol{x}'(t) \times \boldsymbol{x}''(t) \parallel \begin{vmatrix} \boldsymbol{e}_1 & \boldsymbol{e}_2 & \boldsymbol{e}_3 \\ a & 2bt & 3ct^2 \\ 0 & b & 3ct \end{vmatrix} = (3bct^2, -3act, ab),$$

$$\begin{aligned}\boldsymbol{x}'(t) \times [\boldsymbol{x}'(t) \times \boldsymbol{x}''(t)] &\parallel \begin{vmatrix} \boldsymbol{e}_1 & \boldsymbol{e}_2 & \boldsymbol{e}_3 \\ a & 2bt & 3ct^2 \\ 3bct^2 & -3act & ab \end{vmatrix} \\ &= (2ab^2 t + 9ac^2 t^3, -a^2 b + 9b^2 c^2 t^4, -3a^2 ct - 6b^2 ct^3).\end{aligned}$$

密切平面方程(法向为 $\boldsymbol{x}'(t) \times \boldsymbol{x}''(t)$)为

$$3bct^2(X^1 - at) - 3act(X^2 - bt^2) + ab(X^3 - ct^3) = 0,$$

即

$$3bct^2X^1-3actX^2+abX^3-abct^3=0.$$

法平面方程(平面法向为 $\boldsymbol{x}'(t)$)为

$$a(X^1-at)+2bt(X^2-bt^2)+3ct^2(X^3-ct^3)=0,$$

即

$$aX^1+2btX^2+3ct^2X^3-(a^2t+2b^2t^3+3c^2t^5)=0. \qquad \square$$

1.2.2 求圆柱螺线

$$\boldsymbol{x}(s)=(r\cos\omega s, r\sin\omega s, \omega hs) \quad (r>0, h>0, \omega=(r^2+h^2)^{-\frac{1}{2}})$$

的切向量、切线、主法线、密切平面、法平面方程.

解 由例 1.1.3,知

$$\boldsymbol{V}_1(s)=\boldsymbol{x}'(s)=\omega(-r\sin\omega s, r\cos\omega s, h) \quad (\text{切向量}, s\ \text{为弧长}),$$

且

$$\kappa(s)\boldsymbol{V}_2(s)=\boldsymbol{V}_1'(s)=\omega^2(-r\cos\omega s, -r\sin\omega s, 0),$$

$$\boldsymbol{V}_2(s)=-(\cos\omega s, \sin\omega s, 0),$$

$$\begin{aligned}\boldsymbol{V}_3(s)=\boldsymbol{V}_1(s)\times\boldsymbol{V}_2(s)&=\begin{vmatrix}\boldsymbol{e}_1 & \boldsymbol{e}_2 & \boldsymbol{e}_3\\ -r\omega\sin\omega s & r\omega\cos\omega s & h\omega\\ -\cos\omega s & -\sin\omega s & 0\end{vmatrix}\\ &=(h\omega\sin\omega s, -h\omega\cos\omega s, r\omega)\\ &=\omega(h\sin\omega s, -h\cos\omega s, r).\end{aligned}$$

切线方程(方向为 $\boldsymbol{V}_1(s)$)为

$$\frac{X^1-r\cos\omega s}{-r\sin\omega s}=\frac{X^2-r\sin\omega s}{r\cos\omega s}=\frac{X^3-\omega hs}{h}.$$

主法线方程(方向为 $\boldsymbol{V}_2(s)$)为

$$\frac{X^1-r\cos\omega s}{-\cos\omega s}=\frac{X^2-r\sin\omega s}{-\sin\omega s}=\frac{X^3-\omega hs}{0}.$$

密切平面方程(平面法向为 $\boldsymbol{V}_3(s)$)为

$$h\sin\omega s(X^1-r\cos\omega s)-h\cos\omega s(X^2-r\sin\omega s)+r(X^3-\omega hs)=0,$$

即

$$h\sin\omega sX^1-h\cos\omega sX^2+rX^3-r\omega hs=0.$$

法平面方程(平面法向为 $\boldsymbol{V}_1(s)$)为

$$-r\sin\omega s(X^1-r\cos\omega s)+r\cos\omega s(X^2-r\sin\omega s)+h(X^3-\omega hs)=0,$$

即

$$-r\sin\omega sX^1+r\cos\omega sX^2+hX^3-\omega h^2s=0. \qquad \square$$