

数学模型在矿冶工程中的应用

上 册

阳 昌 明 编

冶金工业部长沙矿冶研究院

一九八四年九月

序

数学模型及生产过程的最佳化控制，是本世纪四十年代出现电子计算机后发展起来的。五十年代主要在军事及电子工业等部门推广。六十年代在化工、石油、材料等部门陆续取得进展。而引入矿冶工程部门，不过是近二十年的事情，在近十年才具体实用并见效。

近年来，我们自己也结合国内的矿山实际情况，在微型机应用于矿冶工程方面，开展了一些初步的研究工作。在这过程中，发现广大科学技术工程人员对《数学模型》及其具体应用发生了浓厚的兴趣。今年，我院接受湖南省金属学会的委托举办了数期《PC—1500袖珍电子计算机应用训练班》，为了教学中的需要，我们根据国内外的资料，并结合自己的研究工作编写了这本讲义，以满足广大工程技术人员的迫切需要。

在编写本讲义的过程中得到了冶金部长沙矿冶研究院学术委员会的支持以及不少同志的帮助，在此表示衷心的感谢。

由于我们水平有限，经验不足，这本讲义一定会有不少的缺点和错误，请使用者批评指正。

编 者

1984年9月

绪 论	1
第一章 什么叫建立模型	3
§ 1. 模型与现实	3
§ 2. 模型的性质	4
§ 3. 模型的种类	7
§ 4. 建立模型的技巧	10
§ 5. 模型的作用和用途	11
§ 6. 建立模型的方法	12
第二章 模型算法	24
§ 1. 理论模型简化求解法	25
§ 2. 数值算法	31
§ 3. 响应面拟合法	37
第三章 经验模型	45
§ 1. 模型建立步骤	46
§ 2. 线性模型	49
第四章 综合模型	60
§ 1. 总体平衡模型	61
§ 2. 分批模型	65
§ 3. 连续模型	69

模型是生产过程的简化描述或实体。用实际物体模拟的名为“实物模型”，如展览用的原子弹模型或小型试验设备，半工业试验厂等。“抽象模型”是用数学、物理学、化学等科学规律或试验研究结果建立起来的抽象描述。其中最常用的是“数学模型”。

“数学模型”是客观过程中变量关系的数学抽象。也就是描述过程运行规律的数学式，其形式可以是方程式、统计图表等。

建立数学模型并进行试验、测定、运算（计算机处理）的目的：在于分析和改善过程的操作性能及条件，找出最佳工作状况，得出最佳效果。换言之，数学模型的用途是过程的试验、设计、最佳化和自动化控制。数学模型及其运算方法，是生产过程自动化控制的核心。

过程的最佳化控制步骤：

- (1) 深入了解过程的操作参数、性能、以及运行规律；
- (2) 调查、检测、试验设计，对数据进行处理，建立起数学模型；
- (3) 数学模型对实际过程拟合程度及优劣的评价；
- (4) 应用模型进行预测或控制，达到最佳化的目的。

模型的分类

由于过程的多样化和建立模型的目的要求不同，模型的分类也随之变化。

从过程的时间因素考虑，为达到过程控制目的而建立的模型，常分为稳（静）态和动态两类。

稳（静）态模型是认为过程运行平稳、波动变化较少。稳态模型不仅数学方程式中不包含“时间”变量，并且假定其他变量也不随时间变化。

动态模型是认为过程状态随时间而波动变化，因而数学方程式中不仅包括“时间”变量，并且常假定其他变量也随时间变化。

从过程的数学抽象入手，为了对过程进行分析和预测而建立的模型，常分为确定和随机两类。

确定模型是指模型式中的变量和参数的关系是确切和肯定的。

随机模型是指模型所描述的过程变量和参数的关系是不确定的，而是随机变化的。

从数学模型建立的根据来分类，可分为经验和理论的两大类，尚有介于两者之间的综合模型。

理论模型的形式和常数主要根据理论，这些理论来自物理学、化学的规律，以及过程的机理。例如热力学或动力学分析。下表列出一些理论模型的分类。

理论模型按物理化学基层分类

物理化学基层	课题名称	供分析的典型参数
宏观的	过程工程学， 单元作业， 古典动力学与热力学	相间传递系数， 宏观动力学常数 摩擦因素
微观的	层流传递现象， 湍流的统计理论	现象学系数 粘性，扩散，热传播系数
分子的 或原子的	离散单元 量子力学 统计力学 动力学	分配函数 碰撞积分

经验模型的根据是对生产过程的实际检测数据或试验结果。过程中的变量关系，一般通过数理统计或微分方程等表述。模型方程式中的常数通过试验设计或实测数据求出。

综合模型是介于上述两者之间，综合理论与经验模型形式来自理论，而常数利用经验数据。综合模型有时又称为现象学模型（Phenomenological Model，有时译为物理逻辑模型）。半分析模型，准理论模型等。由于综合模型常常根据一般工程的最普遍的现象，如质量、能量、动量的守恒和平衡，过程输入与输出间的平衡等。通过这些整个体系的平衡现象，通过物理学的逻辑推理，可建立起模型。这类模型称为“总体平衡模型”（Population Balance Model，简写PBM）。

在一般工程过程分析控制时，理论模型常归专门学科论述。本讲义主要论述最常用的经验模型及综合模型，并具体应用于采矿、选矿和冶金工程中。

第一章 什么叫建立模型

§ 1 模型与现实

对某一情况所作的理论的和科学的研究，是集中在一个所谓模型上进行的，模型就是所研究情况的有关性质的模拟物，例如公路图、地质图和植物收集品都是模型，它们分别模拟一部份地球表面的不同侧面。

检验一个模型，最根本的是看它用在所要处理的问题上时，它的作用如何。（如果一张地质图没有标出一条主要公路，你没有理由去批评它；但如果是发生在一张公路图上，这就是一个严重的缺陷了。）在使用模型时，它可能导致不正确的预测。模型常常被修改，被废弃，有时被马马虎虎地用，因为有总比没有好。这是科学发展的途径。

在这里，我们只关心数学模型，这就是那些利用数学语言来模拟

现实的模型。今后每当我们使用“模型”这个词而不加修饰语时，我们总是指“数学模型”。是什么原因使得数学模型这样有用呢？如果“从数学的角度来讲”，就是：

1. 我们必须精确地用公式表示我们的想法，这样可以较少地漏掉某些暗含的假定。

2. 我们有能促进问题处理的精炼“语言”。

3. 我们有大量的定理可供使用。

4. 我们可以用高速计算机进行计算

第3项和第4项往往交替使用：理论对于从简单模型作出普遍结论是有用的，而计算机则对于从复杂模型作出特殊结论有用处。

§ 2 模型的性质

我们首先给出模型的定义：“数学模型是关于部份现实世界和为一种特殊目的而作的一个抽象的、简化的数学结构”。可是，因为十个人就大概会给出十个不同的定义，所以你不必对这定义过于认真，不妨把它当作原始的出发点，由此形成你自己对于数学模型的理解。

就一个模型而论，现实世界的事物可划分为三部份：

1. 其影响微不足道的事物；

2. 可以影响模型，但其性状不是该模型所要研究的那些事物；

3. 其性状是这模型打算研究的那些事物。

数学模型完全不考虑第一种事物。对于第二类以常数、函数等表达，是外部的，称作局外变量（也称参数、输入或自变量）。对于第三类即模型要解释的事物称作局内变量（也称输出或因变量）。在模型的某些领域中使用局外—局内变量这一术语。当把模型看作一个箱子，向它馈入信息并从中获得信息时，我们就在模型范围里使用术语

“输入—输出”。术语“参数—自变量—因变量”则是标准的数学用语。

假定我们受雇于一个公司，要我们去决定怎样的生产水平才能获得最大利润。我们就应该构造一个模型，用生产水平、市场情况以及其他我们认为有关的因素（自变量）来表示利润（因变量）。然后测定除生产水平以外的所有自变量，并用模型去确定给出最大利润的生产水平的值。

现在让我们从力图解释各公司生产货物总量的经济学家的观点来观察事物。我们可以构造出一个分为两部份的模型：各公司追求最大的利润，而利润可象前段所概述的那样来确定。在这模型中利润成为局内变量（除了用于构成模型外我们对它别无兴趣），而生产水平则由自变量变为因变量。

在设计模型时，可忽略的，输入和输出这三种类型的量是重要的。如果不应忽略的事物被忽略了，这模型就无用。如果考虑的事物太多，得到的模型将会复杂使人失望，并可能需要多得难以置信的数据。有时模型设计者担着风险忽略掉一些事物，那并非因为他认为这些事物无足轻重，而是因为他不能处理它们，并希望略去之后不会使结果失败。

恰当地选择因变量（即输出）是很重要的，我们必须力图解释我们所能解释的事物。通常这样的选择是比较清楚的，就象在经济学家要去解释一家公司生产水平的例子中那样。但有时必须小心，举例来说，我们可借助于生产水平来说明利润，但不能反过来天真地想用利润去解释生产水平，因为要求我们做的是去确定最佳生产水平。

因为不同的模型作了不同类型的简化假设，所以描述一种情况的最佳模型通常不止一个。在社会科学中，只要能断言某些东西将会增

加，通常就很满足了，这时为了现实性和普遍性就牺牲了精确性。模拟模型则往往力求精确和现实，宁可不要普遍性。当你研究过一些实际模型以后，就会更明白这三者的取舍。

变量的定义及其相互关系构成了模型的假设，然后我们利用模型作出结论（也就是作出预测）。这是演绎过程：如果假设正确，结论必定也是正确的。所以，一项错误的预测意味着这模型在某些方面是不正确的。遗憾的是事情往往不是这么界限分明。我们知道，模型仅仅是一种近似，所以我们不能期望完美的预测。在这情况下我们如何评价一个模型呢？

从粗糙的模型得出的结论是不太可信的，尤其是当别的模型作出相反的预测时。如果从同一情况的不同模型可以作出同样的结论，或者结论是从一个比较普遍的模型推出的，那么这结论是可靠的。如果一项预测要在非常特殊假设下才有效，那么它是脆弱的。模型愈粗糙，它那脆弱的预测愈不可信。

你也许注意到，我们一直是说结论，而不是说的解释。模型能够提供解释吗？这是一个有点哲学味道的问题，一项解释是由什么东西构成的，不同的人有着不同的见解。我们假定在某些意义下，模型能够提供解释。对一个模型有效性的判定，通常是以它所作预测的精确程度为根据的。很遗憾，两个不同的模型可能作出相同的预测，但却给出不同的解释。这是怎么一回事呢？

我们可以把我们模拟的情况当作一个“黑箱”，对于每一个输入，它都输出某些东西。（“某些东西”也可以是没有输出）。如果每当等价于黑箱输入的模拟物被馈入时，它都会输出等价于黑箱输出的模拟物，那么这模型就作出了正确的预测。讨论预测时是不涉及机理的，但机理的性质却是解释的核心。常有一种情况是两种不同的模型

导致不同的预测，而我们不能确定哪种预测是正确的。举例来说，一位政治家的模型可以通过对他的行为作下述两种假设来构成，(1) 出于关心他的同伴，或者(2) 出于公众事务的需要。在许多情况下这两种模型导致相同的或十分相似的预测。要作出可被检验的相反的预测也许是困难的。对于熟悉简单电路的人来说，另一个例子是在理想弹簧和理想 LC 电路之间的数学等价性。虽然作为基础的数学原理相同，但没有人会真的建议用弹簧的虎克 (Hooke) 定律去“解释”电路的性状。

我们已谈到的是理想的模型设计者。任何人研究问题时，总带有局限性与偏见。我们越是思想开阔，越是广泛交流和富于创造性，我们的模型就越是符合实际。

§ 3 模型的种类

1. 形象模型 (Iconic Model)

把现实物体的尺寸加以改变 (缩小或放大)，看起来和实际的东西基本相似的模型叫形象模型。例如：儿童玩具、像片、教学用的原子模型、飞机模型等。

2. 抽象模型 (Abstract Model)

就是用符号、图表等来描述客观事物所建立起来的模型，它又分三类：

(1) 模拟模型 (Analog Model)

就是用便于控制的一组条件来代表真实事物的特征，通过模仿性的试验来了解实体的规律。例如地图上利用等高线或不同颜色来代表实际地势的高低，用线路图来代表真正的电路，用电路系统去模拟一个力学系统等。

(2) 数学模型 (Math Model)

用字母、数字及其他数学符号建立起来的等式或不等式以及图表、图象及框图等来描述客观事物的特征及其内在联系的模型叫数学模型。它是现实世界的一个抽象。例如，在力学中描述力、质量与加速度之间关系的牛顿第二定律， $F=ma$ ；匀速运动中的速度、路程及时间的关系， $S=vt$ ；在电学中电压、电流、电阻之间的关系（欧姆定律） $V=RI$ ；经济学中的单价、销售金额及销售量之间的关系， $C=PQ$ 等。它们具有相同的数学模型为：

$$Y = Kx$$

(3) 概念模型 (Phenomenological Model)

这是一类最抽象的模型，即在建立模型时缺乏资料，就只能去构想一些资料，建立初始模型后，再逐渐扩展。

以上几种不同形式的模型之间的利弊关系可参看图：

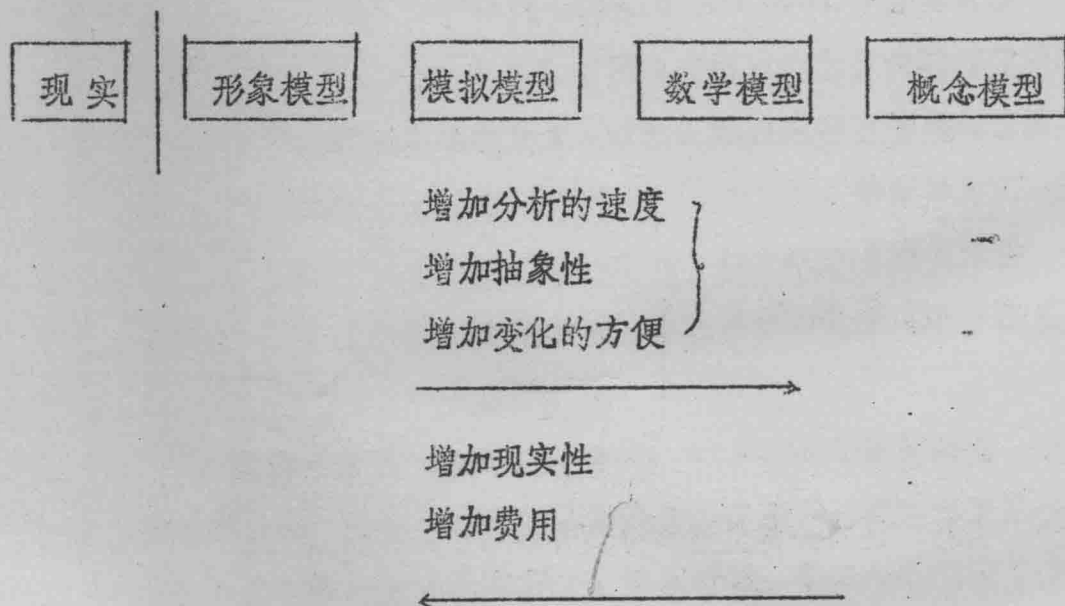
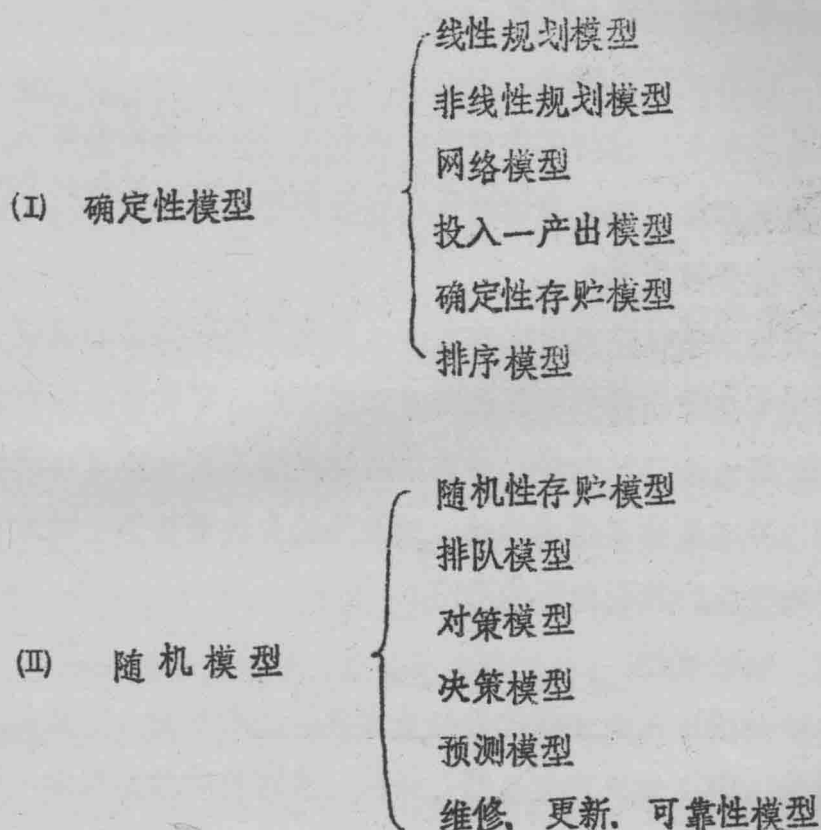


图 1-1

这三种形式的模型在实际使用时，经常交替使用，以发挥各自的长处和克服自己的缺点。同时这三种模型之间也还有些其它类型的模型，或者还有其它模型的分类法。

以上几类模型，我们感兴趣的是抽象模型，特别是数学模型，而且以经济管理中的数学模型（即运筹学模型）为讨论的重点。按其用途又可分为国民经济模型、地区模型、能源模型，以及管理方面的模型等。

在运筹模型中，以变量的性质来分，主要有两大类：



当然，还有其他类型和分类方法。

§ 4 建立模型的技巧

建立模型需要想象力和技巧。给出建立模型的法则，就象列出做一名艺术家的准则一样，充其量只能提供一个获得技巧和发展想象力的纲要。要教会人想象，是不可能的事。我不去做这样的尝试，但我希望本讲义能提供你们一个增进技巧和想象力的机会。在作了这些预先的说明之后，下面介绍一个模型建立过程的梗概。

1. 阐述问题

你想知道的是什麼？你所选择的模型的性质，高度依赖于你想要利用这个模型解决什么问题。

2. 提出模型的要点

在这阶段中，你必须将周围的种种事物区分为不重要的、局外的和局内的三部份。还必须详细说明变量间的相互关系。

3. 模型可用吗？

现在掉头来检查已建立的东西。你能取得所必需的数据吗？能在模型中用它来作出你要的预测吗？如果不能，那么你必须重新提出模型的要点（第2步），也许还要重新阐述问题（第1步）。请注意，“可用”并不是指合理或精确，那是第四步的事情了，而是指，如果模型符合情况，我们能否使用它？

4. 检验模型

用这模型作出能经得起数据或常识检验的预测。完全依赖常识是不妥当的，因为常识可能恰好是错的。从容易的预测做起——不要把时间花费在对一个也许不太好的模型作繁杂的计算上。如果这些预测不好，而又没有数学上的错误，退回到第2步或第一步。如果这些预测还可以接受，那么它们应该给你一些关于这模型的精确度和适用范围的感性知识。要是它们不如你预期的那样精确，最好试看去弄清原因，

因为这样可以揭露出隐蔽的或者错误的假设。

到此，这模型就可以备用了，可是别走得太远，要是盲目地把这模型用于同检验时所用的迥然不同的问题上，那是危险的。每一次应用都应看作是对模型的一次检验。

你也许不能立即进行第2步，因为还不清楚什么因素是可以忽略的。其次，也许还弄不清局外变量应该被精确地确定到什么程度。通常的习惯是从粗糙的模型和粗略的数据估计出发，以便知道在这模型中需要考虑什么因素，以及局外变量必须被确定到什么样的精确度。

某些模型可能不需要数据。要是有一个模型不需要数据也同样能作出预测，我们也并不是得到一些无用的东西，因为这预测还是在模型的假设下做出的，在某种程度上，数据与假设之间的区别只是人为的。在极端情形中，一个模型可以如此特殊，以致它的数据都放进假设中了。

有时第4步实际上是不可能进行的。例如，我们怎样去检验一次核战争的模型呢？如果我们有二个核战争模型，它们作出不同的预测，我们该怎么办？在研究物理科学中那些没有精确列成公式的定律时，这种情况是很容易发生的。在这种时候经验是基本的一不是数学上的经验，而是在被模拟的领域内的经验。有时即使预测是可以检验的，但是进行检验花费昂贵，而且也许还需要有某种实验科学领域的训练。因为缺乏实验的验证会使模型建立过程不完整，所以只要是能取得的验证结果，总把它给出。

§ 5 模型的作用和用途

模型的作用和用途有下列几个方面：

1. 模型比现实容易操作，尤其一些参数值的改变在模型中操作

比在现实问题中操作要容易。

2. 有时在现实上很难，或不能作试验，通过建立模型就可以解决这个困难，而且模型比现实容易理解一些。

3. 有些变量在现实情况中要很长时间才能看出变化情况，但用模型研究时可以很快看出变化规律，从而最迅速地抓住其本质特征。

4. 主要是用模型研究变量（可控的和不可控的）之间的关系，用可控变量得出一定的结果。

5. 通过灵敏度分析，可看出那些因素对系统影响更大。

例1 战略核武器杀伤力模型。

当苏联赫鲁晓夫鼓吹亿吨级的氢弹时，美国却走提高导弹精度的道路，当时有争论，这个争论通过构造战略核武器杀伤力模型就可以得出结构，杀伤力 K 不仅与威力 Y 有关，而且与精度 C 有关，经过大量试验表明 K 与 Y ， C 的关系为：

$$K = Y^{\frac{2}{3}} / C^2$$

由这个模型出发，易见，当 $Y^* = 8Y$ 时，

$$K^* = 4K$$

当 $C^* = C/8$ 时， $K^* = 64K$

这说明提高精度合理。

§ 6 建立模型的方法

（一）建立模型的一般要求

建立模型一般有如下的要求：

1. 有足够的精确度

就是把本质的东西和关系反映进去，把非本质的东西去掉（又不影

响反映现实的真实程度)。精确度不仅与研究对象有关,而且与它所处时间,状态和条件等有关。所以有时同一个对象在不同情况下可以提出不同精确度的要求。

2. 简单

模型既要精确,又要求它简单。因为有时太复杂的模型难以求解,这时就只好降低一些精确度。此外,如果一个简单的模型能使某些实际问题得到满意的解决,那我们就不一定非要去搞一个复杂模型,因为要构造一个复杂模型及求解复杂模型都要付出较高的代价。

3. 依据要充分

就是要依据科学规律、经济规律来建立式子和图表。

4. 尽量借鉴标准形式

在模拟某些实际对象时,如果已经有些标准形式的模型可借鉴,不妨先试用一下,因为它们已经有一些现有的数学方法或其它方法可用,所以尽量往标准形式靠拢。

5. 模型中所表示的系统要能操纵和控制,否则,建立的模型毫无意义。

(二) 建立模型的几个常用分析方法

由于客观事物的复杂性,因此建立模型的方法也千变万化,它不仅是一种创造性的劳动,而且有人认为它是一种艺术,不能用一些条条框框规定死,为此提供几个分析方法供参考。但真正解决问题还靠在实践中去利用已有的模型,改造已有的模型,创造出更适用的新模型。

一、直接分析法

当问题比较简单或比较明显时,按问题的性质和范围直接作出模型。

例 正方形模型

面积为定值的长方形中，周长 L 为最小值时是正方形。

这个结论很多人都熟悉，它可以化为下述数学模型。设长方形的一边长为 X ，另一边长为 Y 。则周长 L 为

$$L = 2(X + Y)$$

求使 L 为最小值的 X 与 Y 。由假定长方形面积为定值（设为 C ），则有

$$XY = C \quad \text{或} \quad Y = \frac{C}{X}$$

这时 L 化为

$$L = 2\left(X + \frac{C}{X}\right)$$

式中只有一个可控变量 X ， C 为不可控变量。

利用

$$\frac{dL}{dX} = 2\left(1 - \frac{C}{X^2}\right) = 0$$

可解得

$$X = \sqrt{C}$$

代入 Y 有

$$Y = \frac{C}{\sqrt{C}} = \sqrt{C}$$

故使长度总和 L 为最小时，四边相等，且边长为 $\sqrt{C}$ 。

2. 模拟法

有些模型的结构性质虽已清楚，但对这个模型数量描述及求解却很困难。如果有另一种系统其结构性质与之相同，构造出的模型也类似，处理时却简单得多，这时用后一种模型来模拟前一种模型，对后一种模型进行试验和求其解，就叫模拟法。

例 最佳场址选择问题

要确定一个新仓库的位置 P ，使它供应处于不同地点 P_i （ $i = 1,$