非线性微分方程Sturm-Liouville边值问题研究

杨景保　韦忠礼◎著

RESEARCH ON STURM-LIOUVILLE BOUNDARY VALUE PROBLEMS FOR NONLINEAR DIFFERENTIAL EQUATIONS

合肥工业大学出版社
HEFEI UNIVERSITY OF TECHNOLOGY PRESS

非线性微分方程 Sturm－Liouville 边值问题研究

杨景保　韦忠礼　著

合肥工业大学出版社

内 容 简 介

本书在简要介绍Sturm-Liouville型微分方程边值问题的基本概念和泛函分析中重要的不动点定理的基础上，结合作者近年来的研究成果，对二阶、四阶和含有p-Laplacian算子的微分方程满足Sturm-Liouville边值条件或广义Sturm-Liouville边值条件下，给出了其解或正解存在的判断依据，充分展示了边值问题的研究技巧和方法。

本书适用于数学专业非线性泛函分析方向的研究生及对微分方程边值问题有研究兴趣的人员。

图书在版编目(CIP)数据

非线性微分方程Sturm-Liouville边值问题研究/杨景保，韦忠礼著．—合肥：合肥工业大学出版社，2014.5

ISBN 978-7-5650-1851-0

Ⅰ.①非…　Ⅱ.①杨…②韦…　Ⅲ.①非线性—微分方程—边值问题—研究　Ⅳ.①O175.8

中国版本图书馆CIP数据核字(2014)第108804号

非线性微分方程Sturm-Liouville边值问题研究

杨景保　韦忠礼　著　　　　责任编辑　权　怡

出　版	合肥工业大学出版社	版　次	2014年5月第1版
地　址	合肥市屯溪路193号	印　次	2014年5月第1次印刷
邮　编	230009	开　本	710毫米×1010毫米　1/16
电　话	总　编　室：0551-62903038	印　张	9.25
	市场营销部：0551-62903198	字　数	161千字
网　址	www.hfutpress.com.cn	印　刷	合肥星光印务有限责任公司
E-mail	hfutpress@163.com	发　行	全国新华书店

ISBN 978-7-5650-1851-0　　　　定价：20.00元

序　言

非线性微分方程边值问题作为有实际应用背景的数学研究领域，一直处于微分方程理论和非线性泛函分析的结合点上，在研究气体湍流、弹性梁理论和宇宙物理等应用科学中起到非常重要的作用．近年来非线性微分方程 Sturm－Liouville 边值问题已受到广泛关注，并取得了一些研究成果．为了学术交流与发展，作者把近年来的研究成果系统地整理出来，编撰完成了本书．

本书共分 4 章．第 1 章首先介绍了 Sturm－Liouville 型微分方程边值问题的基本概念、性质和定理，然后介绍了泛函分析中重要的不动点定理．第 2 章研究了二阶微分方程满足 Sturm－Liouville 边值条件或广义 Sturm－Liouville 边值条件，给出了其解或正解存在的判断依据，展示了二阶微分方程边值问题的研究技巧和方法．第 3 章研究了四阶微分方程满足 Sturm－Liouville 边值条件或广义 Sturm－Liouville 边值条件，给出了其正解存在的判断依据，展示了四阶微分方程边值问题的研究技巧和方法．第 4 章研究了 p－Laplacian 算子微分方程边值问题，给出了其正解存在的判断依据．

本书第 2、3、4 章的全部内容都已在国内外学术刊物上发表。尽管如此，错漏之处在所难免，敬请读者批评指正．

本书的出版得到了安徽省高职高专专业带头人项目的资助，本人在此表示感谢！对于在学业和工作上给予我帮助的学友、老师和领导表示由衷的谢意！

杨景保

2014 年 4 月于亳州师范高等专科学校

目　录

第 1 章　Sturm - Liouville 型边值问题和不动点定理概要

本章简要介绍了微分方程边值问题的背景,Sturm - Liouville 型微分方程边值问题的基本概念及性质,以及泛函分析中重要的不动点定理.

1.1　Sturm - Liouville 型边值问题概要

牛顿和莱布尼茨在 17 世纪后期所创立的微积分在人类科学史上具有划时代的伟大意义.微积分的产生和发展,使得 17 世纪末发展起来的微分方程理论很快成了研究自然现象的强有力工具,在力学、天文、物理和其他技术科学中,人们借助于微分方程取得了巨大成就.微分方程理论中的一个核心而又基本的问题,就是如何确定微分方程解的存在性,即确定一个微分方程满足定解条件的解是否存在,称为微分方程理论的定解问题.定解问题中除初值问题之外,还有一类同数学物理问题密切相关的所谓边值问题.该问题起源于 1690 年瑞士数学家 Jacob Bernoulli 提出的悬链线问题:一根柔软但不能伸长的绳子自由悬挂于两定点 $A(a,\alpha)$ 和 $B(b,\beta)$,求绳子在重力作用下形成的曲线.1691 年,莱布尼茨给出了解答,通过对绳子上各点受力情况的分析,建立了常微分方程

$$\frac{d^2 y}{dx^2}=\frac{1}{\lambda}\sqrt{1+y^2}\quad (\lambda \text{ 与绳子有关}),$$

此微分方程所满足的定解条件是

$$y(a)=\alpha,\quad y(b)=\beta,$$

这是一个二阶微分方程的两点边值问题.Sturm - Liouville 边值问题的研究始于 19

世纪 30 年代. 当时,由法国巴黎大学教授 Charles Sturm 和法兰西大学教授 Joseph Liouville 在共同研究二阶常微分方程的两点边值问题的基础上,将二阶线性微分方程化为

$$(p(t)x')'+\lambda q(t)x=0,\quad p(t)>0,q(t)>0,$$

变换后的方程所满足的边界条件写成一般形式

$$x'(a)-\alpha x(a)=x'(b)+\beta x(b)=0,\quad \alpha\geqslant 0,\beta\geqslant 0,$$

他们的研究得到了一系列结果,形成了 Sturm - Liouville 理论[1~2].

下面简要介绍一下 Sturm - Liouville 型边值问题.

为了方便,我们设

$$Lu\equiv(p(x)u')'+q(x)u=f(x),\tag{1.1.1}$$

$$\begin{cases}R_1(u)\equiv\alpha_1u(a)+\alpha_2p(a)u'(a)=\eta_1,\\R_2(u)\equiv\beta_1u(b)+\beta_2p(b)u'(b)=\eta_2,\end{cases}\tag{1.1.2}$$

$$\begin{cases}R_1(u)\equiv\alpha_1u(a)+\alpha_2p(a)u'(a)=\sum\limits_{i=1}^{m-2}a_iu'(\xi_i),\\R_2(u)\equiv\beta_1u(b)+\beta_2p(b)u'(b)=\sum\limits_{i=1}^{m-2}b_iu'(\xi_i),\end{cases}\tag{1.1.3}$$

其中 $x\in J\equiv[a,b]$,而 $p(x)$、$q(x)$、$f(x)$、α_j、β_j、η_j、a_i、b_i、$\xi_i(j=1,2;i=1,2,\cdots,m-2)$ 满足:$p(x)>0(x\in J)$、$p(x)\in C^1(J)$、$q(x)$、$f(x)\in C(J)$ 均为实函数,且 $\alpha_1{}^2+\alpha_2{}^2>0,\beta_1{}^2+\beta_2{}^2>0,\alpha_j\in\mathbb{R},\beta_j\in\mathbb{R}(j=1,2),\xi_i\in(0,1)(i=1,2,\cdots,m-2)$ 满足 $\xi_1<\xi_2<\cdots<\xi_{m-2}$.

我们把式(1.1.1) 满足条件式(1.1.2) 的问题,通常称作 Sturm - Liouville 型边值问题[3].

特别的,若 $f(x)\equiv 0,\eta_1=0,\eta_2=0$,则相应的边值问题

$$Lu=0,\quad R_1(u)=R_2(u)=0,\tag{1.1.4}$$

称为 Sturm - Liouville 齐次边值问题.

特别的,若 $\eta_1=0,\eta_2=0$,则相应的边值问题

$$Lu=f(x),\quad R_1(u)=R_2(u)=0,\tag{1.1.5}$$

称为 Sturm - Liouville 半齐次边值问题.

我们把式(1.1.1)满足条件式(1.1.3)的问题，通常称作广义 Sturm - Liouville 型边值问题. 下面几个引理和定理引用于文献[3]，为了方便读者，我们对部分内容给出了证明.

引理 1.1.1 设 $u(x)$、$v(x)\in C^2(J)$，则有 Lagrange 恒等式

$$vLu-uLv=[p(x)(u'v-v'u)]'$$

成立.

事实上，只要对上述等式右边直接求微分即可得到左边的结果.

性质 1.1.1 设 $u(x)$、$v(x)\in C^2(J)$ 且满足齐次边界条件，即

$$R_i(u)=R_i(v)=0\quad(i=1,2),$$

则

$$\int_a^b(vLu-uLv)\mathrm{d}x=0.$$

证明: 根据条件 $R_i(u)=R_i(v)=0(i=1,2)$.

若 $\alpha_2=0$，则有 $u(a)=v(a)=0$.

若 $\alpha_2\neq 0$，则有 $u'(a)=\dfrac{-\alpha_1u(a)}{\alpha_2p(a)}$，$v'(a)=\dfrac{-\alpha_1v(a)}{\alpha_2p(a)}$.

总之，不论 $\alpha_2=0$ 还是 $\alpha_2\neq 0$，总有

$$(u'v-uv')\mid_{x=a}=0.$$

类似地，可得

$$(u'v-uv')\mid_{x=b}=0.$$

因此，由引理 1.1.1 可得

$$\int_a^b(vLu-uLv)\mathrm{d}x=[p(x)(u'v-uv')]\mid_a^b=0.$$

引理 1.1.2 设 u、u_1、u_2 是齐次边值问题式(1.1.4)的解；v、v_1、v_2 是非齐次边值问题式(1.1.1) ~ 式(1.1.2)的解；则 $c_1u_1+c_2u_2$、v_1-v_2 都是边值问题式(1.1.4)的解，而

$$v=u+v^*,$$

这里 v^* 是边值问题式(1.1.1) ~ 式(1.1.2)的解.

引理 1.1.2 成立是显然的.

定理 1.1.1 设 $u_1(x)$ 和 $u_2(x)$ 是齐次微分方程 $Lu=0$ 之任一基本解组，则边值问题式(1.1.1)～式(1.1.2)存在唯一解的充要条件是

$$\Delta=\begin{vmatrix} R_1(u_1) & R_1(u_2) \\ R_2(u_1) & R_2(u_2) \end{vmatrix}\neq 0$$

或齐次边值问题式(1.1.4)仅有零解.

证明：设方程 $Lu=f(x)$ 之一特解为 u^*，由引理 1.1.2 可知它的一般解是

$$u=u^*+c_1u_1+c_2u_2\quad(c_i\in\mathbb{R},i=1,2).$$

显然，要使 u 满足边界条件 $R_i(u)=\eta_i(i=1,2)$，则 c_1、c_2 必须且只需满足

$$R_i(u^*)+c_1R_i(u_1)+c_2R_i(u_2)=\eta_i\quad(i=1,2),$$

这是关于 c_1、c_2 的线性方程组，而这个方程组存在唯一解 c_1、c_2 的充要条件是 $\Delta\neq 0$ 成立.

根据引理 1.1.2，边值问题式(1.1.4)的解显然是

$$u=c_1u_1+c_2u_2,$$

其中 c_1、c_2 由方程组

$$c_1R_i(u_1)+c_2R_i(u_2)=0\quad(i=1,2)$$

来确定. 由此不难看出：边值问题式(1.1.4)仅有零解的充要条件是 $\Delta\neq 0$ 成立.

引理 1.1.3 在条件 $p(x)>0(x\in J)$、$p(x)\in C^1(J)$、$q(x)$、$f(x)\in C(J)$、$\alpha_1{}^2+\alpha_2{}^2>0$、$\beta_1{}^2+\beta_2{}^2>0$、$\alpha_i\in\mathbb{R}$、$\beta_i\in\mathbb{R}$、$i=1,2$ 下，若齐次边值问题式(1.1.4)仅有零解，则必存在两个函数 $u(x)$ 和 $v(x)$，它们满足条件：

(1) $u(x)$、$v(x)\in C^2(J)$，$J=[a,b]$；

(2) $Lu(x)=0$，$R_1(u)=0$；

(3) $Lv(x)=0$，$R_2(v)=0$；

(4) u 与 v 线性无关；

(5) $p(x)(uv'-u'v)=1$.

证明：设 $u_1(x)$ 和 $u_2(x)$ 是方程 $Lu=0$ 之一基本解组. 显然，函数

$$u(x)=u_1(x)R_1(u_2)-u_2(x)R_1(u_1),$$

$$v(x)=u_1(x)R_2(u_2)-u_2(x)R_2(u_1)$$

满足条件(1)、(2)、(3). 又因为式(1.1.4)仅有零解，所以由定理 1.1.1 可知

$R_1(u_2)$ 与 $R_1(u_1)$ 必不同时为零，而 $u_1(x)$ 与 $u_2(x)$ 是线性无关的，从而 $u \neq 0$. 同理：$v \neq 0$.

下面往证：$u(x)$ 和 $v(x)$ 是线性无关的. 假如不然，则必存在常数 $c \neq 0$ 使 $v(x) = cu(x)$，但已知 $u(x)$ 满足(2)，故

$$R_1(v) = cR_1(u) = 0,$$

又 $R_2(v) = 0$，结合定理 1.1.1，这与式(1.1.4) 仅有零解相矛盾. 故函数 $u(x)$ 和 $v(x)$ 是线性无关的.

由条件(2)、(3) 结合引理 1.1.1 得

$$[p(x)(u'(x)v(x) - u(x)v'(x))]' = 0,$$

从而

$$p(x)(u'(x)v(x) - u(x)v'(x)) = c(\text{常数}).$$

但 $p(x) > 0$ 且 $u'v - uv' \neq 0$(因为它恰好是 u、v 的 Wronsky 行列式)，于是常数 $c \neq 0$；从而$\dfrac{u(x)}{c}$、$v(x)$ 满足条件(1) ～ (5). 因此引理 1.1.3 得证.

为了方便，下面令 $Q = J \times J, J = [a,b]$，

$$Q_1 = \{(x,y) \in Q \mid a \leqslant x \leqslant y \leqslant b\},$$

$$Q_2 = \{(x,y) \in Q \mid a \leqslant y \leqslant x \leqslant b\}.$$

定理 1.1.2　在条件 $p(x) > 0(x \in J)$、$p(x) \in C^1(J)$、$q(x)$、$f(x) \in C(J)$、$\alpha_1{}^2 + \alpha_2{}^2 > 0$、$\beta_1{}^2 + \beta_2{}^2 > 0$、$a_j \in \mathbb{R}$、$b_j \in \mathbb{R}(j=1,2)$ 下，若齐次边值问题式(1.1.4) 仅有零解，则存在唯一的具备下列性质的函数 $G(x,y)$：

(1)$G(x,y)$ 在 Q 上有定义且连续；

(2) 在 Q_1 和 Q_2 上有连续的偏导数 G_x、G_{xx}；

(3) 对固定的 $y \in J$，$G(x,y)$ 满足

$$LG(x,y) = 0, \quad \text{当 } x \neq y \text{ 且 } x \in J \text{ 时},$$

$$R_1(G) = R_2(G) = 0, \quad \text{当 } y \in (a,b) \text{ 时};$$

(4) 在正方形 Q 的对角线上，即 $y = x$ 时，G_x 有第一类间断点，它的跃度等于 $\dfrac{1}{p(y)}$，即

$$G_x(y+0,y) - G_x(y-0,y) = \frac{1}{p(y)}, \quad y \in (a,b).$$

证明：设 $u(x)$、$v(x)$ 是满足引理 1.1.3 要求的两个函数. 下面利用函数 u、v 具体构造一个满足定理要求的函数 $G(x,y)$.

首先为使 G 具备条件(3) 中的 $LG(x,y)=0(x\neq y)$，我们设

$$G(x,y)=\begin{cases}A_1(y)u(x)+B_1(y)v(x), & \text{当 } a\leqslant x\leqslant y \text{ 时},\\ A_2(y)u(x)+B_2(y)v(x), & \text{当 } y\leqslant x\leqslant b \text{ 时},\end{cases}\tag{1.1.6}$$

其中 $A_i(y)$、$B_i(y)(i=1,2)$ 是待定的系数.

其次，为使 G 具备条件(3) 中的 $R_i(G)=0(i=1,2)$，必须有

$$R_1(G)\equiv A_1(y)R_1(u)+B_1(y)R_1(v)=0,$$

$$R_2(G)\equiv A_2(y)R_2(u)+B_2(y)R_2(v)=0.$$

由引理 1.1.3 可知，$R_1(u)=0$，$R_2(v)=0$；于是由定理 1.1.1 可知 $R_1(v)\neq 0$，$R_2(u)\neq 0$，从而必须有

$$B_1(y)=0,\quad A_2(y)=0,$$

即

$$G(x,y)=\begin{cases}A_1(y)u(x), & \text{当 } a\leqslant x\leqslant y \text{ 时},\\ B_2(y)v(x), & \text{当 } y\leqslant x\leqslant b \text{ 时}.\end{cases}$$

进一步，为使 G 具备条件(1) 和(4)，则 $A_1(y)$ 与 $B_2(y)$ 必须满足

$$A_1(y)u(y)-B_2(y)v(y)=0,$$

$$A_1(y)u'(y)-B_2(y)v'(y)=-\frac{1}{p(y)}.$$

由此可唯一确定出

$$A_1(y)=\frac{v(y)}{(u(y)v'(y)-u'(y)v(y))p(y)}=v(y),$$

$$B_2(y)=\frac{u(y)}{(u(y)v'(y)-u'(y)v(y))p(y)}=u(y),$$

因为 u 和 v 满足引理 1.1.3 中的条件(5). 显然 G 是满足条件(2) 的，因此

$$G(x,y)=\begin{cases}u(x)v(y), & \text{当 } a\leqslant x\leqslant y \text{ 时},\\ u(y)v(x), & \text{当 } y\leqslant x\leqslant b \text{ 时}.\end{cases}$$

以上说明，凡满足条件(1)～(4)的函数 $G(x,y)$ 必具有式(1.1.6)的形式；而具有式(1.1.6)形式的函数如果满足条件(1)～(4)，则它的系数必唯一确定. 故定理得证.

定义 满足定理1.1.2中性质(1)～(4)的函数 $G(x,y)$ 称为从属于边值问题式(1.1.4)的 Green 函数.

定理 1.1.3 在定理1.1.2的条件下，若 $G(x,t)$ 是从属于边值问题式(1.1.4)的 Green 函数，则函数

$$v(x)=\int_a^b G(x,t)f(t)\mathrm{d}t \tag{1.1.7}$$

必属于 $C^2(J)$ 类且为半齐次边值问题式(1.1.5)的唯一解，即

$$Lv(x)=f(x),\quad R_1(v)=R_2(v)=0.$$

证明：由于 $G_x(x,t)$ 在 $x=t$ 处是间断的，故将积分式(1.1.7)分成 a 到 x 与 x 到 b 两个积分，然后分别微分，得

$$\begin{aligned} v'(x)&=G(x,x)f(x)+\int_a^x G_x(x,t)f(t)\mathrm{d}t-\\ &\quad G(x,x)f(x)+\int_x^b G_x(x,t)f(t)\mathrm{d}t\\ &=\int_a^b G_x(x,t)f(t)\mathrm{d}t. \end{aligned}$$

再用同样的方法处理上式右端的积分，并且根据 $G(x,t)$ 所满足的定理1.1.2中的条件(4)，得

$$\begin{aligned} v''(x)&=G_x(x+0,x)f(x)+\int_a^x G_{xx}(x,t)f(t)\mathrm{d}t-\\ &\quad G_x(x-0,x)f(x)+\int_x^b G_{xx}(x,t)f(t)\mathrm{d}t\\ &=\int_a^b G_{xx}(x,t)f(t)\mathrm{d}t+\frac{f(x)}{p(x)}. \end{aligned}$$

于是，再根据 $G(x,t)$ 所满足的定理1.1.2中的条件(3)，得

$$Lv=pv''+p'v'+qv=\int_a^b LG(x,t)f(t)\mathrm{d}t+f(x)=f(x).$$

又由 $R_i(G(x,t))=0(t\in(a,b))$，得

$$R_1(v)=\alpha_1\int_a^b G(a,t)f(t)\mathrm{d}t+\alpha_2 p(a)\int_a^b G_x(a,t)f(t)\mathrm{d}t$$

$$=\int_a^b R_1(G(x,t))f(t)\mathrm{d}t=0.$$

同理 $R_2(v)=0$. 故 $v(x)$ 是半齐次边值问题式(1.1.5)的解,结合定理1.1.1可知它是式(1.1.5)的唯一解. 定理1.1.3证完.

推论 1.1.1 在定理1.1.3的条件下,若 $u(t)$ 是边值问题

$$Lu+\lambda ru=0,\quad R_i(u)=0(i=1,2)$$

的解,则它必满足

$$u(x)=-\lambda\int_a^b G(x,t)r(t)u(t)\mathrm{d}t,\quad x\in J.$$

推论 1.1.2 在定理1.1.3的条件下,若 $u(t)\in C(J)$ 且满足

$$u(x)=-\lambda\int_a^b G(x,t)r(t)u(t)\mathrm{d}t,\quad x\in J,$$

则 u 必两次连续可微,且满足

$$Lu+\lambda ru=0,\quad R_i(u)=0(i=1,2).$$

在下面的一些章节中,考虑的 Sturm - Liouville 边值问题主要是式(1.1.1)中 $p(x)\equiv 1$ 的情形,我们把齐次和半齐次 Sturm - Liouville 边值问题也称为 Sturm - Liouville 边值问题. 我们在研究 Sturm - Liouville 边值问题时,若使用上述有关性质和定理,则不再特别强调.

1.2 不动点定理简介

在解决微分方程边值问题时,比较常用的工具是泛函分析中的不动点定理. 现向读者简要介绍一下常用的不动点定理. 下文的引理和定理主要来自文献[4].

下面设 E_1 和 E_2 是两个 Banach 空间,$D\subset E_1$,算子 $A:D\to E_2$.

定义 1.2.1 设 $x_0\in D$. 若 $\forall\varepsilon>0$,$\exists\delta=\delta(x_0,\varepsilon)>0$,使当 $x\in D$ 且 $\|x-x_0\|<\delta$ 时,恒有 $\|Ax-Ax_0\|<\varepsilon$,则称 A 在 x_0 处连续;若 A 在 D 中每一点都连续,则称 A 在 D 上连续.

定义 1.2.2 若 A 将 D 中任何有界集 S 映成 E_2 中的列紧集 $A(S)$(即 $A(S)$ 是

相对紧集，亦即它的闭包$\overline{A(S)}$是 E_2 中的紧集)，则称 A 是映 D 入 E_2 的紧算子.

定义 1.2.3 若算子 $A:D\rightarrow E_2$ 是连续的，而且又是紧的，则称 A 是映 D 入 E_2 的全连续算子.

定理 1.2.1 (Schauder 不动点定理) 设 E 是 Banach 空间，D 是 E 中有界凸闭集(D 不一定有内点)，$A:D\rightarrow D$ 全连续，则 A 在 D 中必有不动点.

证明: 取球 $T=\{x\mid \|x\|<R,R>0\}$，使 $D\subset T$. 由全连续算子的延拓定理，可将 A 延拓为映 $\overline{T}$ 入 $\overline{co}A(D)\subset D$ 的全连续算子，于是 $A(\partial T)\subset D\subset \overline{T}$，从而根据 Rothe 定理知：$A$ 在 $\overline{T}$ 中具有不动点 x^*. 由于 $A(\overline{T})\subset D$，故必有 $x^*\in D$. 定理 1.2.1 证完.

定义 1.2.4 设 E 是实 Banach 空间，如果 P 是 E 中某非空凸闭集，并且满足下面两个条件：

(1) $x\in P,\lambda\geqslant 0\Rightarrow \lambda x\in P$;

(2) $x\in P,-x\in P\Rightarrow x=\theta$，$\theta$ 表示 E 中零元素，

则称 P 是 E 中的一个锥.

定义 1.2.5 设 E 是一个拓扑空间，$X\subset E$. 若存在连续算子 $T:E\rightarrow X$ 使得当 $x\in X$ 时，恒有 $Tx=x$，则称 X 是 E 的一个收缩核. 算子 T 称为是一个保核收缩.

能够验证：若 P 是实 Banach 空间 E 中一个锥，则 P 是 E 的一个收缩核，也是 E 的一个星形凸闭集.

引理 1.2.1 设 E 是实 Banach 空间，P 是 E 中的一个锥，Ω 是 E 的有界开集，E 中的零元素 $\theta\in\Omega$，$A:P\cap\overline{\Omega}\rightarrow P$ 是凝聚映像，并且满足

$$Ax=\mu x,\quad x\in P\cap\partial\Omega\Rightarrow\mu<1,$$

那么必有

$$i(A,P\cap\Omega,P)=1.$$

证明: 令 $H(t,x)=tAx$，则 $H:[0,1]\times(P\cap\overline{\Omega})\rightarrow P$ 连续. 显然，对每个 $t\in[0,1]$，$H(t,\cdot):P\cap\overline{\Omega}\rightarrow P$ 是凝聚映像，并且 $H(t,x)$ 对于 t 的连续性关于 $x\in P\cap\overline{\Omega}$ 是一致的. 于是由条件

$$Ax=\mu x,\quad x\in P\cap\partial\Omega\Rightarrow\mu<1,$$

及 $\theta\in\Omega$ 可知 $H(t,x)\neq x$，$\forall x\in P\cap\partial\Omega$，$0\leqslant t\leqslant 1$. 因此，根据凝聚映像不动点指数的同伦不变性与正规性可知：

$$i(A,P\cap\Omega,P)=i(\theta,P\cap\Omega,P)=1.$$

引理 1.2.2 设 E 是实 Banach 空间，P 是 E 中的一个锥，Ω 是 E 的有界开集，$A:P\cap\overline{\Omega}\rightarrow P$ 全连续，$B:P\cap\partial\Omega\rightarrow P$ 全连续. 如果满足：

(1) $\inf\limits_{x\in P\cap\partial\Omega}\|Bx\|>0$；

(2) $x-Ax\neq tBx,\forall x\in P\cap\partial\Omega,t\geqslant 0$，

那么必有

$$i(A,P\cap\Omega,P)=0.$$

具体证明见文献[4,5].

推论 1.2.1 设 E 是实 Banach 空间，P 是 E 中的一个锥，Ω 是 E 的有界开集，$A:P\cap\overline{\Omega}\rightarrow P$ 全连续. 若 $\exists u_0\in P,u_0\neq\theta$，使

$$x-Ax\neq tu_0,\quad\forall x\in P\cap\partial\Omega,\quad t\geqslant 0,$$

那么，$i(A,P\cap\Omega,P)=0$ 必然成立.

引理 1.2.3 设 E 是实 Banach 空间，P 是 E 中的一个锥，Ω 是 E 的有界开集，θ 是 E 中的零元素，$A:P\cap\overline{\Omega}\rightarrow P$ 全连续，那么

(1) 设 $\theta\in\Omega$，若 $x\in P\cap\partial\Omega\Rightarrow Ax\not\geqslant x$，则 $i(A,P\cap\Omega,P)=1$；

(2) 若 $x\in P\cap\partial\Omega\Rightarrow Ax\not\leqslant x$，则 $i(A,P\cap\Omega,P)=0$.

证明(1)：若 $x\in P\cap\partial\Omega\Rightarrow Ax\not\geqslant x$，则

$$Ax=\mu x,\quad x\in P\cap\partial\Omega\Rightarrow\mu<1$$

必然成立. 这是因为若有 $x_0\in P\cap\partial\Omega,\mu_0\geqslant 1$ 存在，使 $Ax_0=\mu_0x_0$，则 $Ax_0=\mu_0x_0\geqslant x_0$，这与假定相矛盾. 因此，根据引理 1.2.1 可知

$$i(A,P\cap\Omega,P)=1.$$

证明(2)：若 $x\in P\cap\partial\Omega\Rightarrow Ax\not\leqslant x$，则 $\exists u_0\in P,u_0\neq\theta$，使

$$x-Ax\neq tu_0,\quad\forall x\in P\cap\partial\Omega,t\geqslant 0$$

成立. 否则，存在 $x_1\in P\cap\partial\Omega$ 及 $t_1\geqslant 0$，使 $x_1-Ax_1=t_1u_0$，则必有 $x_1=t_1u_0+Ax_1\geqslant Ax_1$，这与假定相矛盾. 因此，根据推论 1.2.1 可知 $i(A,P\cap\Omega,P)=0$ 必然成立.

定理 1.2.2 (锥拉伸与压缩不动点定理) 设 E 是实 Banach 空间，P 是 E 中的一个锥，Ω_1 和 Ω_2 是 E 中有界开集，θ 是 E 中的零元素，$\theta\in\Omega_1$，$\overline{\Omega}_1\subset\Omega_2$，$A:P\cap(\overline{\Omega}_2\backslash\Omega_1)\rightarrow P$ 全连续. 如果下面条件：

(1) $Ax \not\geq x, \forall x \in P \cap \partial\Omega_1$； $Ax \not\leq x, \forall x \in P \cap \partial\Omega_2$

或

(2) $Ax \not\geq x, \forall x \in P \cap \partial\Omega_2$； $Ax \not\leq x, \forall x \in P \cap \partial\Omega_1$

之一成立，那么 A 在 $P \cap (\overline{\Omega}_2 \backslash \Omega_1)$ 中必具有不动点.

证明: 首先，将 A 延拓成映 $P \cap \overline{\Omega}_2$ 入 P 的全连续算子(仍记为 A). 在条件(1)满足的条件下，由引理 1.2.3 可知

$$i(A, P \cap \Omega_1, P) = 1, \quad i(A, P \cap \Omega_2, P) = 0,$$

从而根据不动点指数的可加性，得

$$\begin{aligned}&i(A, P \cap (\Omega_2 \backslash \overline{\Omega}_1), P)\\&= i(A, P \cap \Omega_2, P) - i(A, P \cap \Omega_1, P) = 0 - 1 = -1.\end{aligned}$$

同理可知，在条件(2)满足的条件下，有

$$i(A, P \cap (\Omega_2 \backslash \overline{\Omega}_1), P) = 1 - 0 = 1.$$

总之，$i(A, P \cap (\Omega_2 \backslash \overline{\Omega}_1), P) \neq 0$，从而根据不动点指数的可解性定理可知：$A$ 在 $P \cap (\overline{\Omega}_2 \backslash \Omega_1)$ 中必有不动点.

定理 1.2.3 (范数形式的锥拉伸与压缩不动点定理) 设 E 是实 Banach 空间，P 是 E 中的一个锥，Ω_1、Ω_2 是 E 中的有界开集，θ 是 E 中的零元素，$\theta \in \Omega_1$，$\overline{\Omega}_1 \subset \Omega_2$，$A: P \cap (\overline{\Omega}_2 \backslash \Omega_1) \to P$ 全连续. 如果下面两个条件:

$$\begin{aligned}(\mathrm{H}_1)\ &\|Ax\| \leq \|x\|, \quad \forall x \in P \cap \partial\Omega_1;\\ &\|Ax\| \geq \|x\|, \quad \forall x \in P \cap \partial\Omega_2\end{aligned}$$

或

$$\begin{aligned}(\mathrm{H}_2)\ &\|Ax\| \leq \|x\|, \quad \forall x \in P \cap \partial\Omega_2;\\ &\|Ax\| \geq \|x\|, \quad \forall x \in P \cap \partial\Omega_1\end{aligned}$$

之一成立，那么 A 在 $P \cap (\overline{\Omega}_2 \backslash \Omega_1)$ 中必有不动点.

证明: 不妨设条件(H_1)满足(当(H_2)满足时证明类似). 将 A 延拓成映 $P \cap \overline{\Omega}_2$ 入 P 的全连续算子(仍记为 A). 可设 A 在 $P \cap \partial\Omega_1$ 与 $P \cap \partial\Omega_2$ 上均没有不动点(否则定理获证). 下证

$$Ax = \mu x, \quad x \in P \cap \partial\Omega_1 \Rightarrow \mu < 1. \tag{1.2.1}$$