高等学校教学用書

动力气象学

中册

В. А. 别林斯基著

高等教育出版社

高等学校教学用書

动力气象学

中册

B. A. 别林斯基著
仇永炎等譯

高等教育出版社

本書系根据苏联国立技术理論書籍出版社(Гостехиздат)出版的别林斯基(В. А. Белинский)所写的"动力气象学"(Динамическая метеорология) 1948 年版譯出。原書經苏联高等教育部审定为水文气象学院及綜合性大学物理系教学参考書。

全書共二十一章，中譯本分为三册出版。本册是中譯本的中册，內容主要包括：大气动力学基本部分及运动学。

参加本分册的譯校工作者有：仇永炎、謝义炳、陈文琦、張玉玲、王紹武(北京大学物理系气象專業)、陶詩言、顧震潮、朱永禔、瞿章、盧其堯、郑斯中(地球物理研究所)、顧鈞禧、紀乃晋(气象局)等同志。

总校工作由仇永炎同志負責。

动 力 气 象 学

中 册

B. A. 别林斯基著

仇永炎等譯

高 等 教 育 出 版 社 出 版

北京琉璃廠一七〇號

(北京市書刊出版業營業許可證出字第〇五四號)

上海勞動印製廠印刷　新華書店總經售

統一書號 13010·293　開本 850×1168 1/32　印張 9 10/16　字數 248,000

一九五七年七月第一版

一九五七年七月上海第一次印刷

印數 1—2,500　　定價(8) ¥1.10

中 册 目 录

第八章　流体力学和热力学方程式与輻射的理論

§1. 拉格朗日氏和欧拉氏方法

正如研究其他任何流体一样，可以用兩种基本的方法来研究大气的运动。兩种方法都是由欧拉氏所建立的。但是通常將其中一种称为欧拉氏方法，而另一种称为拉格朗日方法。拉格朗日方法就是把运动着的流体当作研究的对象，說得更精确一些，就是把完全充滿在某些运动着的流体体积中的物質点，当作研究的对象。当注意到每一个个别的空气質点运动的时候，就能够研究所有表征这个質点运动特性的向量或标量数值所产生的改变。而当从一个空气質点，轉到其他空气質点上的时候，就能够研究在整个大气中同一数值的改变。在拉格朗日方法中，表征运动特性的数值被当作是时間和三个参量的函数，借助于这些参量，所研究的質点就能从其余許多質点中分离出来。譬如，在起始时刻 $t=t_0$ 时，决定質点相对于静止坐标軸的位置的笛卡兒坐标 a，b，c 就可以是这样的参量。因此，按照拉格朗日方法，变量 a，b，c，t 就是这样一些宗量，这些宗量决定那些表征大气运动特性的向量及标量的数值。这就是所謂拉格朗日变量。

近代一些美国的研究工作者，当研究数量級相当于一般大气环流的大尺度的运动和运算数量級相当于对流層里空气質量的空气体积时，把三个互相独立的、最具有保守性的空气特性当作拉格朗日变量，这三个量是：有兩个是我們所熟悉的温湿特性——位温 θ 和比湿 s，第三个新的运动学的特性就是所謂位渦 ζ。

在拉格朗日变量中，运动質点的坐标，决定于等式

$$x=x(a, b, c, t);\quad y=y(a, b, c, t);\quad z=z(a, b, c, t);\qquad (1)$$

而它的动徑用下列等式来表示

$$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(a, b, c, t)。\qquad (2)$$

在 a, b, c 是不变的和 t 是可变的情形下，方程式(1)就表示被确定的質点运动的规律。在 a, b, c 是可变的而 t 是不变的情形下，上述方程式就表示所有質点在某一固定时刻，在空間的分布的規律。

被欧拉氏所闡發的另一种方法中，研究的对象，严格說起来，不是同一流体而是被运动着的流体所充滿的固定空間。在欧拉氏方法中，注意力仅集中于在空間固定点上不同的运动元量随时間的改变，以及这些要素当轉移到另一个空間点时的改变。换一句話說，在欧拉氏方法中，不同的向量或标量的运动元量是被当作坐标 x, y, z 和时間 t 的函数，也就是四个所謂欧拉氏变量的宗量的函数。例如

$$\boldsymbol{v}=\boldsymbol{v}(x, y, z, t);\quad \boldsymbol{j}=\boldsymbol{j}(x, y, z, t);\quad p=p(x, y, z, t)。\qquad (3)$$

这样一来，在欧拉氏方法中，表征流体运动特性的不同的向量場和标量場(速度場，加速度場，压力場等等)，就是研究的对象。流体質点是怎样从什么地方来到空間固定点，它將要繼續以怎样方式运动到什么地方去。所有这些問題在欧拉氏方法中都是次要的。

当比較这兩种方法时，我們看出，拉格朗日方法从整个物理运动研究的观点来看，有着肯定的优越性。然而在应用拉格朗日法时所遇到的数学上的困难，比在欧拉氏方法中严重得多。所以我們差不多只用欧拉氏方法。

讓我們来研究某一个用欧拉氏变量表示的标量数值：

$$A=F(x, y, z, t)\qquad (4)$$

变换为拉格朗日变量，就得到

$$A=F[x(a, b, c, t), y(a, b, c, t), z(a, b, c, t), t]= \\ =\Phi(a, b, c, t),\qquad (5)$$

对欧拉变量的微分，显然是

$$\frac{\partial F}{\partial x},\ \frac{\partial F}{\partial y},\ \frac{\partial F}{\partial z},\ \frac{\partial F}{\partial t}。$$

前三个微分 $\frac{\partial F}{\partial x}, \frac{\partial F}{\partial y}, \frac{\partial F}{\partial z}$，表示数值 A 在所研究的空間部分里由一点到另一点时的改变，而后者 $\frac{\partial F}{\partial t}$ 表示这个数值在空間固定点随时間的改变。

$\frac{\partial \Phi}{\partial a}, \frac{\partial \Phi}{\partial b}, \frac{\partial \Phi}{\partial c}, \frac{\partial \Phi}{\partial t}$ 是这个数值对拉格朗日变量的微分。前三个微分表示数值 A 从一个空气質点到相距無穷小的另一个空气質点时的改变，而后一个 $\frac{\partial \Phi}{\partial t}$，表示这个数值对个别空气質点所發生的随时間的改变。

在对欧拉变量的微分和对拉格朗日变量的微分之間有着下列明显的关系，这关系是由复杂函数微分法則得到的

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\partial \Phi}{\partial a} &= \frac{\partial F}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial a}+\frac{\partial F}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial a}+\frac{\partial F}{\partial z}\cdot\frac{\partial z}{\partial a};\\
\frac{\partial \Phi}{\partial b} &= \frac{\partial F}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial b}+\frac{\partial F}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial b}+\frac{\partial F}{\partial z}\cdot\frac{\partial z}{\partial b};\\
\frac{\partial \Phi}{\partial c} &= \frac{\partial F}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial c}+\frac{\partial F}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial c}+\frac{\partial F}{\partial z}\cdot\frac{\partial z}{\partial c};\\
\frac{\partial \Phi}{\partial t} &= \frac{\partial F}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial t}+\frac{\partial F}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial t}+\frac{\partial F}{\partial z}\cdot\frac{\partial z}{\partial t}+\frac{\partial F}{\partial t}。
\end{aligned}\right\}\quad(6)$$

§2. 个别微分、局地微分和对流微分

§1 的公式（6）中最后一个式子是利用欧拉变量所表示的函数 F 的个别微分 $\frac{dF}{dt}$。考虑到 $\frac{\partial \Phi}{\partial t}=\frac{dF}{dt}$ 就得到

$$\frac{dF}{dt}=\frac{\partial F}{\partial t}+v_x\frac{\partial F}{\partial x}+v_y\frac{\partial F}{\partial y}+v_z\frac{\partial F}{\partial z}。\quad(1)$$

偏微分 $\frac{\partial F}{\partial t}$ 表示函数 F 在空間固定点上随时間所产生的改变，称为局地微分或地方性微分。式子

$$v_x\frac{\partial F}{\partial x}+v_y\frac{\partial F}{\partial y}+v_z\frac{\partial F}{\partial z}=(\boldsymbol{r},\ \mathrm{grad}\,F) \qquad (2)$$

表示函数 F 由于个别質点在空間的位移所产生的改变，在物理学或流体力学中被称为对流微分。在气象学中，对流微分常常只是指公式(1)中最后一項 $v_z\frac{\partial F}{\partial z}$，而前兩項的总和 $v_x\frac{\partial F}{\partial x}+v_y\frac{\partial F}{\partial y}$ 称为平流微分。偏微分 $\frac{\partial F}{\partial x}$，$\frac{\partial F}{\partial y}$，$\frac{\partial F}{\partial z}$，有时称为空間微分或几何微分。

公式(1)具有預报上的意义。从这公式中把 $\frac{\partial F}{\partial t}$ 項分解出来，我們就得到

$$\frac{\partial F}{\partial t}=\frac{dF}{dt}-v_x\frac{\partial F}{\partial x}+v_y\frac{\partial F}{\partial y}-v_z\frac{\partial F}{\partial z}。 \qquad (3)$$

这个式子表示：为了預报在这个点上函数 F 的改变，就必須知道：个别空气質点随时間所产生的用微分 $\frac{dF}{dt}$ 表征出来的改变，以及函数 F 和速度 $\boldsymbol{v}$ 在空間的分布。

式子

$$\frac{d}{dt}=\frac{\partial}{\partial t}+v_x\frac{\partial}{\partial x}+v_y\frac{\partial}{\partial y}+v_z\frac{\partial}{\partial z} \qquad (4)$$

称为欧拉算符。

注意，在气象实际应用中不能是微分的关系而是有限增加的关系。另一方面，不是所有在欧拉算符中数值，都可以同样容易地从观測中得到的。

从气象站自記仪器的記录中，可以得到数值 $\frac{\partial F}{\partial t}$。从测站網的观測和天气圖上可以取得数值 $\frac{\partial F}{\partial x}$，$\frac{\partial F}{\partial y}$ 以及 v_x，v_y。为了决定 $\frac{dF}{dz}$，v_z 是需要高空观測的，这种观測为了决定 F 及表征自由大气特性的其

他数值，必然是需要的。决定 v_z 和 $\frac{dF}{dt}$ 是很困难的。任何地方也沒有进行过这些数值的定期測量。到現在为止已被提出的測量鉛直速度的方法(滑翔机，平衡的測風气球等等)，都沒有得出多少可靠的結果。v_z 的近似值可以从連續方程式得到。最后，假如进行平衡的自由气球观測，$\frac{dF}{dt}$ 的数值就可以决定。

在球極坐标 r, φ, λ 中，欧拉算符具有这样的形式

$$\frac{d}{dt}=\frac{\partial}{\partial t}+\dot{r}\frac{\partial}{\partial r}+\dot{\varphi}\frac{\partial}{\partial\varphi}+\dot{\lambda}\frac{\partial}{\partial\lambda}=$$

$$=\frac{\partial}{\partial t}+v_r\frac{\partial}{\partial r}+v_\varphi\frac{\partial}{r\partial\varphi}+v_\lambda\frac{\partial}{r\cos\varphi\partial\lambda}, \tag{5}$$

而在园柱坐标 r, θ, z 中具有这样的形式：

$$\frac{d}{dt}=\frac{\partial}{\partial t}+\dot{r}\frac{\partial}{\partial r}+\dot{\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}+\dot{z}\frac{\partial}{\partial z}=$$

$$=\frac{\partial}{\partial t}+v\frac{\partial}{r\partial r}+v_\theta\frac{\partial}{r\partial\theta}+v_z\frac{\partial}{\partial z}。 \tag{6}$$

§3. 空气質点的变形

从理論力学知道，在每一个时刻絕对固体的物体中每一点的速度 $\boldsymbol{v}$ 能够用下列公式来表示

$$\boldsymbol{v}=\boldsymbol{v}_0+[\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{r}], \tag{1}$$

式中 $\boldsymbol{v}_0$ 是物体上所有的点所共有的前进速度，它是由一个称为極的点的运动所表征出来的，而 $[\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{r}]$ 是某一被研究的点的綫速度，它是由于固体圍繞通过極的瞬时軸轉动而增長起来的。在公式(1)中 $\boldsymbol{\omega}$ 表示物体的角速度，而 $\boldsymbol{r}$ 表示物体中某一被研究的点的动徑，它决定了这点相对于極的位置。

运动着的空气質点中任何一个物質点参加更复杂的运动。当研究流体介質的运动时，赫姆霍茲(Гельмгольц, Helmholtz)証明了一个原理，它仅仅是上述关于固体物体运动的原理的綜合。赫姆霍茲理論表

述如下。

在任一瞬时内流体無穷小的質点中任一点 M' 的速度 $\boldsymbol{v}$ 可以看成是三个运动的速度的几何和；这三个运动速度是：(1)随所有質点一起的平移运动，它可以用所有質点中的任何一点 M 的速度来表征；(2)由于被研究的質点圍繞着通过 M 点的瞬时軸的旋轉所引起的旋轉运动，它有着等于在 M 点速度 $\boldsymbol{v}$ 的旋度一半的角速度。(3)由于在 M 点变形的狀态所引起的运动表現成延伸和剪切形式。

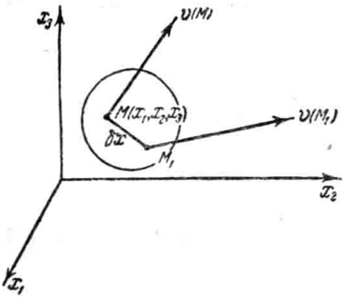

圖 70. 任一流体質点的运动是由前进运动、旋轉运动及变形运动所組成的。

讓我們在大气中取一个極小的空气質点(圖 70)同时研究在这質点中兩个相近的点 M 和 M'。

用 (x_1, x_2, x_3) 表示 M 点的坐标，而用 $(x_1+\delta x_1, x_2+\delta x_2, x_3+\delta x_3)$ 表示 M' 点的坐标。

令在 M 点处的速度等于 $\boldsymbol{v}(x_1, x_2, x_3)$ 而在 M' 点的速度就等于

$$\boldsymbol{v}'=\boldsymbol{v}(x_1+\delta x_1, x_2+\delta x_2, x_3+\delta x_3)$$

我們把速度場認为是連續的。

讓我們把在 M' 点每一个分速度展开成在 M 点附近的泰勒級数，同时在这些展式中是限于只含有第一級坐标增加的各項。

$$\begin{aligned}
v_1' &= v_1+\frac{\partial v_1}{\partial x_1}\delta x_1+\frac{\partial v_1}{\partial x_2}\delta x_2+\frac{\partial v_1}{\partial x_3}\delta x_3,\\
v_2' &= v_2+\frac{\partial v_2}{\partial x_1}\delta x_1+\frac{\partial v_2}{\partial x_2}\delta x_2+\frac{\partial v_2}{\partial x_3}\delta x_3,\\
v_3' &= v_3+\frac{\partial v_3}{\partial x_1}\delta x_1+\frac{\partial v_3}{\partial x_2}\delta x_2+\frac{\partial v_3}{\partial x_3}\delta x_3。
\end{aligned} \tag{2}$$

(2)式的三个关系可以簡写成向量形式

$$\boldsymbol{v}'=\boldsymbol{v}+\left(\frac{\partial v_j}{\partial x_k}\right)\delta\boldsymbol{x}, \tag{3}$$

式中 $\frac{\partial v_j}{\partial x_k}$ 是移动速度的張量，也就是一种物理量，它表征着在这一点上流体移动速度的特性，而且决定于如下九个分量：

$$\left(\frac{\partial v_j}{\partial x_k}\right)=\begin{pmatrix}\frac{\partial v_1}{\partial x_1}, & \frac{\partial v_1}{\partial x_2}, & \frac{\partial v_1}{\partial x_3}\\ \frac{\partial v_2}{\partial x_1}, & \frac{\partial v_2}{\partial x_2}, & \frac{\partial v_2}{\partial x_3}\\ \frac{\partial v_3}{\partial x_1}, & \frac{\partial v_3}{\partial x_2}, & \frac{\partial v_3}{\partial x_3}\end{pmatrix}。\tag{4}$$

我們把張量$\left(\frac{\partial v_j}{\partial x_k}\right)$分解成对称和不对称的兩个張量。

大家知道，如果張量的分量滿足下列条件

$$a_{jk}=a_{kj},\tag{5}$$

它就被称为对称的張量，也就是对称張量中对称地位于主对角綫兩边的分量是相同的。显而易見，对称張量已經不是由九个不同的数值来决定而仅仅只由六个数值来决定。

張量的分量滿足于下列条件时

$$a_{jk}=-a_{kj},\tag{6}$$

它就被称为反对称的張量。因此反对称張量中对称地位于主对角綫兩边的分量，彼此数値相等，但是符号相反。条件(6)引导出等式：

$$a_{jj}=0\tag{7}$$

也就是反对称張量在主对角綫上的所有分量等于零。这样，反对称張量仅仅由三个不同的分量来决定。

任何一个張量能够分解成对称和反对称的兩个張量之和。为了要相信这个，讓我們引进兩个張量和的观念。

这样的張量是被称为兩个張量(a_{jk})与(b_{jk})的和，如果它的張量等于被合并的張量相对应的分量的总和

$$(a_{jk})+(b_{jk})=(a_{jk}+b_{jk})。\tag{8}$$

因此任意的張量(a_{jk})能够写成兩个張量和的形式：

$$(a_{jk})=\frac{1}{2}(a_{jk}+a_{kj})+\frac{1}{2}(a_{jk}-a_{kj})。\tag{9}$$

或者写成展开的形式

$$(a_{jk})=\begin{pmatrix} a_{11}, & \frac{1}{2}(a_{12}+a_{21}), & \frac{1}{2}(a_{13}+a_{31}) \\ \frac{1}{2}(a_{21}+a_{12}), & a_{22}, & \frac{1}{2}(a_{23}+a_{32}) \\ \frac{1}{2}(a_{31}+a_{13}), & \frac{1}{2}(a_{32}+a_{23}), & a_{33} \end{pmatrix}+$$

$$+\begin{pmatrix} 0, & \frac{1}{2}(a_{12}-a_{21}), & \frac{1}{2}(a_{13}-a_{31}) \\ \frac{1}{2}(a_{21}-a_{12}), & 0, & \frac{1}{2}(a_{23}-a_{32}) \\ \frac{1}{2}(a_{31}-a_{13}), & \frac{1}{2}(a_{32}-a_{23}), & 0 \end{pmatrix}。\tag{10}$$

这样一来：

$$\frac{\partial v_j}{\partial x_k}=\frac{1}{2}(S_{jk})+\frac{1}{2}(A_{jk}),$$

其中

$$(S_{jk})=\begin{pmatrix} 2\frac{\partial v_1}{\partial x_1}, & \frac{\partial v_1}{\partial x_2}+\frac{\partial v_2}{\partial x_1}, & \frac{\partial v_1}{\partial x_3}+\frac{\partial v_3}{\partial x_1} \\ \frac{\partial v_1}{\partial x_2}+\frac{\partial v_2}{\partial x_1}, & 2\frac{\partial v_2}{\partial x_2}, & \frac{\partial v_2}{\partial x_3}+\frac{\partial v_3}{\partial x_2} \\ \frac{\partial v_1}{\partial x_3}+\frac{\partial v_3}{\partial x_1}, & \frac{\partial v_2}{\partial x_3}+\frac{\partial v_3}{\partial x_2}, & 2\frac{\partial v_3}{\partial x_3} \end{pmatrix},\tag{11}$$

$$(A_{jk})=\begin{pmatrix} 0, & -\left(\frac{\partial v_2}{\partial x_1}-\frac{\partial v_1}{\partial x_2}\right), & -\left(\frac{\partial v_3}{\partial x_1}-\frac{\partial v_1}{\partial x_3}\right) \\ \left(\frac{\partial v_2}{\partial x_1}-\frac{\partial v_1}{\partial x_2}\right), & 0, & -\left(\frac{\partial v_2}{\partial x_3}-\frac{\partial v_3}{\partial x_2}\right) \\ \left(\frac{\partial v_3}{\partial x_1}-\frac{\partial v_1}{\partial x_3}\right), & \left(\frac{\partial v_2}{\partial x_3}-\frac{\partial v_3}{\partial x_2}\right), & 0 \end{pmatrix}。\tag{12}$$

因此，等式（3）现在可以再写成这样

$$\boldsymbol{v}'=\boldsymbol{v}+\frac{1}{2}(A_{jk})\delta\boldsymbol{x}+\frac{1}{2}(S_{jk})\delta\boldsymbol{x}\text{。} \tag{13}$$

在張量的計算中表现出来：由于应用反对称張量的矢量，我們得到了具有向量乘积形式的新矢量。其实，反对称張量是由下列三个組成所决定的：

$$\left.\begin{aligned}A_{12}&=-\left(\frac{\partial v_2}{\partial x_1}-\frac{\partial v_1}{\partial x_2}\right),\\A_{23}&=-\left(\frac{\partial v_3}{\partial x_2}-\frac{\partial v_2}{\partial x_3}\right),\\A_{31}&=-\left(\frac{\partial v_1}{\partial x_3}-\frac{\partial v_3}{\partial x_1}\right)\text{。}\end{aligned}\right\} \tag{14}$$

但是等式(14)右边部分是速度旋度的下列三个分量：

$$\left.\begin{aligned}A_{23}&=-\operatorname{rot}_1\boldsymbol{v},\\A_{31}&=-\operatorname{rot}_2\boldsymbol{v},\\A_{12}&=-\operatorname{rot}_3\boldsymbol{v}\text{。}\end{aligned}\right\} \tag{15}$$

因此

$$\frac{1}{2}(A_{jk})\cdot\delta\boldsymbol{x}=\frac{1}{2}[\operatorname{rot}\boldsymbol{v}\,\delta\boldsymbol{x}], \tag{16}$$

同时，通过 M 点的速度無穷近的点 M' 的速度是由下面公式表示出来：

$$\boldsymbol{v}'=\boldsymbol{v}+\frac{1}{2}[\operatorname{rot}\boldsymbol{v},\delta\boldsymbol{x}]+\frac{1}{2}(S_{jk})\cdot\delta\boldsymbol{x}\text{。} \tag{17}$$

把(17)式与(1)式相比較，我們看到：在兩个式子中第一項都是質点前进运动的速度；兩个式子中的第二項在精确到一定程度时也是有着相同的意义，它們都表示点的速度，这速度是因为質点圍繞某一个通过它的軸的旋轉而产生的，而且，角速度是决定于矢量 $\operatorname{rot}\boldsymbol{v}$ 并等于它的一半。然而必須注意到，公式(1)适用于絕对固体上的任何一点，不管它离極多远，可是公式(17)只是对無穷近的点才是正确的。流体中彼此远离的点的速度，在运动学上相互之間無論如何也沒有关系的。显然在(1)式中沒有第三項，因为(17)式中最后一項是空气質点变形

的速度，固体物体当然不会有这种速度。因此張量

$$\frac{1}{2}(S_{jk})=\begin{pmatrix}\frac{\partial v_1}{\partial x_1}, & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_1}{\partial x_2}+\frac{\partial v_2}{\partial x_1}\right), & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_1}{\partial x_3}+\frac{\partial v_3}{\partial x_1}\right),\\ \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_1}{\partial x_2}+\frac{\partial v_2}{\partial x_1}\right), & \frac{\partial v_2}{\partial x_2}, & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_2}{\partial x_3}+\frac{\partial v_3}{\partial x_2}\right),\\ \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_1}{\partial x_3}+\frac{\partial v_3}{\partial x_1}\right), & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_2}{\partial x_3}+\frac{\partial v_3}{\partial x_2}\right), & \frac{\partial v_3}{\partial x_3}\end{pmatrix} \qquad (18)$$

称为变形速度的張量。

容易使人信服，在主对角綫上变形速度張量的分量指出質点沿适当的坐标軸膨脹或收縮的相对速度。不在对角綫上的項則指出了切变速度，換句話說，就是原来直角改变的速度。

§4. 連續方程式

在大气运动学中我們忽視了与大气分子結構有关的因素譬如水汽的扩散等等的影响。我們也忽視了水汽从一个狀态到另一个狀态的轉換和降水等等。这些現象对于大气热力学是具有重大的意义的，但是从运动学的观点，它們是不重要的，因为在这种情况下产生的質量傳遞与由于大气运动的質量傳遞相比較是極小的。因而，我們把質量守恒的条件加在每一个大气元量上，也就是認为，每一个运动着的大气質点具有不变的質量。对于它，又加上一个附加的条件，就是大气填滿空間，也就是說大气中沒有眞空。

在描述瞬时运动狀态时，可以利用兩个矢量場即速度場和比动量場。介質的物質性和連續性的条件，不受这些矢量場的共同性的限制，而能引出它們和質量的基本关系。因为如連續地充滿在空間的不变質量發生移动，那么瞬时运动場的意义就包括了未来質量場的意义。这样一来，上述兩种情况引出預报性質的內部联系。这种內部联系的数学式子被称为連續方程。在某些情况下从这个式子中去掉时間的关系，于是这个式子只有判断的意义，因为运动是从屬于一定約制着的条

件的。

我們在运动着的流体中分出某些体积元量，这些体积元量具有每个面与坐标面平行的長方形六面体的形狀，同时我們認为在时間 dt 內，在这体积中質量是平衡的。

当用 u, v, w 表示速度分量时，我們可以不用特別解釋地写出下列的表。

通过的面	那面的坐标	进　入　的　質　量
$dy\,dz$	x	$\rho u\,dy\,dz\,dt$
$dy\,dz$	$x+dx$	$-\left(\rho u+\frac{\partial \rho u}{\partial x}dx\right)dy\,dz\,dt$
$dz\,dx$	y	$\rho v\,dz\,dx\,dt$
$dz\,dx$	$y+dy$	$-\left(\rho v+\frac{\partial \rho v}{\partial y}dy\right)dz\,dx\,dt$
$dx\,dy$	z	$-\rho w\,dx\,dy\,dt$
$dx\,dy$	$z+dz$	$-\left(\rho w+\frac{\partial \rho w}{\partial z}dz\right)dx\,dy\,dt$

那么，在所研究的体积中，質量总增加將等于

$$-\left(\frac{\partial \rho u}{\partial x}+\frac{\partial \rho v}{\partial y}+\frac{\partial \rho w}{\partial z}\right)dx\,dy\,dz\,dt。$$

这个質量的改变使得密度从 ρ 改变成 $\rho+\frac{\partial \rho}{\partial t}dt$，同时質量的增加也可以表示成这个形式

$$\frac{\partial \rho}{dt}dt\,dx\,dy\,dz。$$

使这些式子相等，同时用体积 $dx\,dy\,dz$ 和时間 dt 来除就得到連續方程

$$\frac{\partial \rho}{\partial t}+\frac{\partial \rho u}{\partial x}+\frac{\partial \rho v}{\partial y}+\frac{\partial \rho w}{\partial z}=0 \tag{1}$$

或