线性代数

Linear Algebra

代瑞香　刘　超◎主编

ZHEJIANG UNIVERSITY PRESS
浙江大学出版社

线性代数

主　编　代瑞香　刘　超
副主编　张福娥　姜　琦
　　　　马志辉　王　涛

ZHEJIANG UNIVERSITY PRESS
浙江大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

线性代数 / 代瑞香,刘超主编. —杭州:浙江大学出版社,2014.5
ISBN 978-7-308-13155-1

Ⅰ.①线… Ⅱ.①代…②刘… Ⅲ.①线性代数—高等学校—教材 Ⅳ.①O151.2

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2014)第 087156 号

线性代数

代瑞香　刘　超　主编

责任编辑	伍秀芳(wxfwt@zju.edu.cn)
封面设计	续设计
出版发行	浙江大学出版社 (杭州市天目山路 148 号　邮政编码 310007) (网址:http://www.zjupress.com)
排　　版	浙江时代出版服务有限公司
印　　刷	富阳市育才印刷有限公司
开　　本	710mm×1000mm　1/16
印　　张	10.75
字　　数	188 千
版 印 次	2014 年 5 月第 1 版　2014 年 5 月第 1 次印刷
书　　号	ISBN 978-7-308-13155-1
定　　价	23.80 元

浙江大学出版社发行部联系方式:(0571) 88925591;http://zjdxcbs.tmall.com

前　言

线性代数是高等学校理工科各专业的必修课程，是学习现代科学技术的重要理论基础，已成为自然科学和工程技术领域中应用广泛的数学工具。通过该课程的学习，能使学生掌握该课程的基本理论和基本方法，且对学生其他能力的培养和数学素养的提高也有着重要作用。

线性代数是代数学的一个分支，其基本概念、理论和方法具有较强的逻辑性、抽象性和广泛的实用性。它的核心内容是向量空间和线性变换，所使用的研究工具则是矩阵和行列式。本书由代瑞香等负责编写，基本内容有：行列式、矩阵、向量空间、线性方程组和矩阵特征值问题。

本书参照教育部颁布的高等学校数学课程教学基本要求，在总结多年的教学实践经验的基础上编写而成。在编写过程中，参阅了大量的相关教材和资料，并借鉴了部分相关内容，在此谨向有关编者和作者表示由衷的感谢。

由于编者水平所限，书中难免有不妥之处，欢迎广大师生及同行专家批评指正。

目　录

第 1 章　行列式

在线性代数中，行列式是一个重要的概念，也是一个基本工具，在数学的许多问题中都有着广泛应用，尤其在线性方程组解的理论中更是不可或缺。本章主要介绍行列式的定义、性质、计算方法；行列式的直接应用以克莱姆法则(Cramer)为例。

1.1　排列及其逆系数

为定义 n 阶行列式，首先讨论一下排列及其性质。

从 n 个不同的元素中任选 m 个按一定次序排成一列，称为一个排列。当 $m<n$ 时，所组成的排列为选排列，种数共有 P_n^m 种；当 $m=n$ 时，所组成的排列为全排列，种数共有 $n!$ 种。

定义 1.1　由 $1,2,\cdots,n$ 这 n 个数码所组成的一个全排列称为一个 n 级排列。

由定义 1.1 可知，n 级排列是特殊的全排列，它必须是 $1,2,\cdots,n$ 这 n 个数码的全排列。例如：由自然数 1,2,3 构成的 6 种不同的 3 级排列：123,231,312,132,213,321。

显然，$1,2,\cdots,n$ 是一个 n 级排列，它具有标准次序，即按递增顺序排列，其他任何排列都破坏了标准次序。

定义 1.2　在一个 n 级排列中，若有一个大数排列在一个小数之前，则这两个数构成一个逆序。一个排列中逆序的总数称为这个排列的逆序数。

例 1.1　计算排列 3142 的逆序数。

解　在排列中，31,32,42 构成逆序，该排列的逆序数为 3。

排列 $j_1j_2\cdots j_n$ 的逆序数可记为 $\tau(j_1j_2\cdots j_n)$。逆序数为偶数的排列称为偶排列，逆序数为奇数的排列称为奇排列。

逆序数的性质：

(i)$\tau(1,2,\cdots,n)=0$；

(ii)$\tau(n,n-1,\cdots,2,1)=\dfrac{n(n-1)}{2}$；

(iii)$0\leqslant\tau(j_1j_2\cdots j_n)\leqslant\dfrac{n(n-1)}{2}$；

(iv)n 级排列中奇排列和偶排列的个数相等，均为$\dfrac{n!}{2}$个。

定理 1.1 在一个排列中，把其中两个数交换位置，其余数保持不变，得到一个新的排列，这样的一个变换称为一个对换。对换改变排列的奇偶性。

推论 奇排列调整为标准次序排列的对换次数为奇数；偶排列调整为标准次序排列的对换次数为偶数。

1.2 二阶、三阶行列式

行列式的概念起源于解线性方程组。对于一个二元线性方程组：

$$\begin{cases}a_{11}x_1+a_{12}x_2=b_1\\a_{21}x_1+a_{22}x_2=b_2\end{cases}\tag{1.1}$$

通过消元法(当 $a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}\neq0$ 时)，可得方程组的解：

$$x_1=\frac{a_{22}b_1-a_{12}b_2}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}},\quad x_2=\frac{a_{11}b_2-a_{21}b_1}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}}$$

为便于记忆解的公式，以下引入新的符号。

定义 1.3 令$\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}\\a_{21}&a_{22}\end{vmatrix}$表示 $a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$，称为一个二阶行列式，即

$$\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}\\a_{21}&a_{22}\end{vmatrix}=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$$

注(1) 二阶行列式由四个元素排成两行两列组成，位于第 i 行第 j 列的元素 a_{ij} 称为(i,j)元($i,j=1,2$，i 为行标，j 为列标)。a_{11}，a_{22} 为主对角线上的元素，a_{12}，a_{21} 为副对角线上的元素。二阶行列式计算方法：主对角线元素之积减去副对角线元素之积。

注(2) 行列式一般用大写字母 D 或 D_i $(i=1,2,\cdots,n)$表示。

令 $D=\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}\\a_{21}&a_{22}\end{vmatrix}$，$D_1=\begin{vmatrix}b_1&a_{12}\\b_2&a_{22}\end{vmatrix}$，$D_2=\begin{vmatrix}a_{11}&b_1\\a_{21}&b_2\end{vmatrix}$，方程组(1.1)的解可

记为

$$x_1=\frac{D_1}{D},\quad x_2=\frac{D_2}{D}$$

例 1.2 解方程组$\begin{cases}2x_1-x_2=-3\\4x_1+3x_2=8\end{cases}$。

解 $D=\begin{vmatrix}2 & -1\\4 & 3\end{vmatrix}=10\neq 0$，$D_1=\begin{vmatrix}-3 & -1\\8 & 3\end{vmatrix}=-1$，

$D_2=\begin{vmatrix}2 & -3\\4 & 8\end{vmatrix}=28$

$x_1=\dfrac{D_1}{D}=-\dfrac{1}{10}$，$x_2=\dfrac{D_2}{D}=\dfrac{14}{5}$

定义 1.4 由九个元素 $a_{ij}\,(i,j=1,2,3)$ 排成三行三列的式子定义为

$$\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\a_{21} & a_{22} & a_{23}\\a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{vmatrix}=a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}$$
$$-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{13}a_{22}a_{31}$$

称$\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\a_{21} & a_{22} & a_{23}\\a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{vmatrix}$为三阶行列式。

1.3 n 阶行列式的定义

由上节内容可知二、三阶行列式分别为

$$\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12}\\a_{21} & a_{22}\end{vmatrix}=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21},$$

$$\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\a_{21} & a_{22} & a_{23}\\a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{vmatrix}=a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}$$
$$-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{13}a_{22}a_{31}$$

可以发现二、三阶行列式有如下规律：

(1)二阶行列式等于 2！项代数和，三阶行列式等于 3！项代数和。

(2)二阶行列式中每一项为两个不同行不同列元素的乘积，三阶行列式中

每一项为三个不同行不同列元素的乘积。

(3)每一项符号的确定:当这一项中元素的行标按标准次序排列时,列标的排列为偶排列时,取正号;反之,取负号。例如:$a_{11}a_{23}a_{32}$,行标排列为123,列标排列为132,则$\tau(132)=1$,这一项前面为负号。

因此,二、三阶行列式也可改写为

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \sum_{(j_1j_2)} (-1)^{\tau(j_1j_2)} a_{1j_1}a_{2j_2}$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \sum_{(j_1j_2j_3)} (-1)^{\tau(j_1j_2j_3)} a_{1j_1}a_{2j_2}a_{3j_3}$$

定义 1.5 由排成 n 行 n 列的 n^2 个元素组成的符号 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$ 称为 n 阶行列式。

$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum\limits_{(j_1j_2\cdots j_n)} (-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)} a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}$,简记为 $\det(a_{ij})$ 或 $|a_{ij}|$ $(i,j=1,2,\cdots,n)$。特别地,当 $n=1$ 时,一阶行列式 $|a|=a$。

注 n 阶行列式为 $n!$ 项代数和,每一项由来自不同行不同列的 n 个元素之积构成,每一项前面的符号由元素列标排列的逆序数决定(元素行标为标准次序)。

例 1.3 判断6阶行列式中 $a_{12}a_{33}a_{41}a_{25}a_{64}a_{56}$ 这一项前面的符号。

解 $a_{12}a_{33}a_{41}a_{25}a_{64}a_{56}$ 与 $a_{12}a_{25}a_{33}a_{41}a_{56}a_{64}$ 相同,在 $a_{12}a_{25}a_{33}a_{41}a_{56}a_{64}$ 中,元素行标排列为标准次序,列标排列为253164,则 $\tau(253164)=6$,取正号。

例 1.4 计算4阶行列式 $\begin{vmatrix} 0 & c & e & 0 \\ a & 0 & 0 & g \\ b & 0 & 0 & h \\ 0 & d & f & 0 \end{vmatrix}$。

解 $D=\sum\limits_{(j_1j_2j_3j_4)} (-1)^{\tau(j_1j_2j_3j_4)} a_{1j_1}a_{2j_2}a_{3j_3}a_{4j_4}$,只需对不为零的项 $(-1)^{\tau(j_1j_2j_3j_4)} a_{1j_1}a_{2j_2}a_{3j_3}a_{4j_4}$ 求和。由行列式的特点可知:只有四项不为零,即

$$
\begin{aligned}
D &= (-1)^{\tau(2143)}a_{12}a_{21}a_{34}a_{43}+(-1)^{\tau(2413)}a_{12}a_{24}a_{31}a_{43} \\
&\quad +(-1)^{\tau(3142)}a_{13}a_{21}a_{34}a_{42}+(-1)^{\tau(3412)}a_{13}a_{24}a_{31}a_{42} \\
&= cahf-cgbf-eahd+egbd
\end{aligned}
$$

例 1.5 计算行列式 $D=\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$。

解 称上述行列式为下三角行列式，特点是在 a_{11} 到 a_{nn} 所形成的主对角线以上的元素全部为零，即当 $i<j$ 时，$a_{ij}=0$。

$D=\sum\limits_{(j_1j_2\cdots j_n)}(-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)}a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}$。第一行中，只有 a_{11} 不为零，故 $j_1=1$。第二行中，a_{21}，a_{22} 不为零，但 $j_1=1$，所以只能取 $j_2=2$。同理，$j_3=3,4,\cdots$，$j_n=n$，这样才能保证来自不同行不同列的 n 个元素相乘不为零，即 $D=(-1)^{\tau(n,n-1,\cdots,1)}a_{1n}a_{2,n-1}\cdots a_{n1}=(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}a_{1n}a_{2,n-1}\cdots a_{n1}$。

例 1.6 计算行列式 $D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$。

解 称上述行列式为上三角行列式，即当 $i>j$ 时，$a_{ij}=0$。由例 1.5 可知，$D=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$。

例 1.7 计算下面两个行列式的值。

$$(1)D=\begin{vmatrix} a_{11} & & & \\ & a_{22} & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_{nn} \end{vmatrix};\quad (2)D=\begin{vmatrix} & & & a_{1n} \\ & & a_{2,n-1} & \\ & \iddots & & \\ a_{n1} & & & \end{vmatrix}$$

解 (1)该行列式为主对角行列式，即除主对角线外的元素都为零。由行列式的定义可知，$D=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$。

(2)该行列式为副对角行列式，即除副对角线外的元素都为零。由行列式的定义可知，

$$D=(-1)^{\tau(n,n-1,\cdots,1)}a_{1n}a_{2,n-1}\cdots a_{n1}=(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}a_{1n}a_{2,n-1}\cdots a_{n1}$$

例 1.8 用行列式的定义计算 $D_n=\begin{vmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 2 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ n-1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & n \end{vmatrix}$。

解
$$\begin{aligned} D_n &=(-1)^{\tau(n-1,n-2,\cdots,1,n)}a_{1,n-1}a_{2,n-2}\cdots a_{n-1,1}a_{nn} \\ &=(-1)^{\frac{(n-1)(n-2)}{2}}a_{1,n-1}a_{2,n-2}\cdots a_{n-1,1}a_{nn} \\ &=(-1)^{\frac{(n-1)(n-2)}{2}}n! \end{aligned}$$

注 行列式的等价定义

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{j_1j_2\cdots j_n}(-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)}a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}$$
$$= \sum_{i_1i_2\cdots i_n}(-1)^{\tau(i_1i_2\cdots i_n)}a_{i_11}a_{i_22}\cdots a_{i_nn}$$

1.4 行列式的性质

上节我们给出了行列式的定义，并用定义计算几个特殊行列式的值，不难发现，利用定义计算普通的行列式，尤其是高阶行列式是非常困难的。因此，有必要引入行列式的性质来简化行列式的计算。

记 $D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}, D'=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$

称行列式D'（也可记为 D^{T}）为行列式 D 的转置行列式。

性质 1.1 行列式与它的转置行列式相等。

证明 令

$$D'=\begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{vmatrix}$$

即 $b_{ij}=a_{ji}(i,j=1,2,\cdots,n)$。由行列式的定义，

$$\begin{aligned}D'&=\sum_{j_1j_2\dots j_n}(-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)}b_{1j_1}b_{2j_2}\cdots b_{nj_n}\\&=\sum_{j_1j_2\cdots j_n}(-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)}a_{j_11}a_{j_22}\cdots a_{j_nn}=D\end{aligned}$$

证毕。

注 性质1.1表明，行列式中行与列的地位是等同的，即行列式中行具有的性质，列也具有。

性质1.2 互换行列式的两行(列)，行列式变号。

证明 设

当 $i<j$ 时，$D=\begin{vmatrix}\cdots&\cdots&\cdots\\a_{i1}&\cdots&a_{in}\\\cdots&\cdots&\cdots\\a_{j1}&\cdots&a_{jn}\\\cdots&\cdots&\cdots\end{vmatrix}$

交换 D 中第 i 行与第 j 行元素，得到

$$D_1=\begin{vmatrix}\cdots&\cdots&\cdots\\a_{j1}&\cdots&a_{jn}\\\cdots&\cdots&\cdots\\a_{i1}&\cdots&a_{in}\\\cdots&\cdots&\cdots\end{vmatrix}$$

令 $b_{ik}=a_{jk}$，$b_{jk}=a_{ik}(k=1,2,\cdots,n)$；

$l\neq i,j$：$b_{lk}=a_{lk}(k=1,2,\cdots,n)$。则

$$\begin{aligned}D_1&=\begin{vmatrix}\cdots&\cdots&\cdots\\b_{i1}&\cdots&b_{in}\\\cdots&\cdots&\cdots\\b_{j1}&\cdots&b_{jn}\\\cdots&\cdots&\cdots\end{vmatrix}=\sum(-1)^{\tau(\cdots p_i\cdots p_j\cdots)}(\cdots b_{ip_i}\cdots b_{jp_j}\cdots)\\&=\sum(-1)^{\tau(\cdots p_j\cdots p_i\cdots)}(-1)(\cdots b_{jp_j}\cdots b_{ip_i}\cdots)\\&=(-1)\sum(-1)^{\tau(\cdots p_j\cdots p_i\cdots)}(\cdots a_{ip_j}\cdots a_{jp_i}\cdots)\begin{pmatrix}q_i=p_j,\ q_j=p_i;\\l\neq i,j:\ q_l=p_l\end{pmatrix}\\&=(-1)\sum(-1)^{\tau(\cdots q_i\cdots q_j\cdots)}(\cdots a_{iq_i}\cdots a_{jq_j}\cdots)\\&=-D\end{aligned}$$

证毕。

注 交换行列式 i, j 两行，记为 $r_i \leftrightarrow r_j$；交换行列式 i, j 两列，记为 $c_i \leftrightarrow c_j$。

推论 若行列式有两行(列)元素对应相等，则行列式为零。

性质 1.3 行列式中某一行(列)所有元素都乘以同一数 k，等于用 k 乘此行列式。

注 第 i 行(列)乘以数 k，记为 $k \times r_i (k \times r_j)$。

推论 行列式中某一行(列)所有元素的公因数可以提到行列式符号外面。

性质 1.4 行列式中若有两行(列)元素对应成比例，则此行列式为零。

性质 1.5 若行列式某行(列)所有元素都是两个数之和，则行列式等于相应的两个行列式之和。

例如

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{i1}+c_{i1} & \cdots & b_{in}+c_{in} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{i1} & \cdots & b_{in} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ c_{i1} & \cdots & c_{in} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

注 性质 1.5 可推广到某行(列)为多个数之和的情况。

性质 1.6 把行列式中某一行(列)元素乘以数 k，加到另一行(列)对应元素上去，行列式的值不变。

例如

$$\begin{vmatrix} \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{j1} & \cdots & a_{jn} \\ \cdots & \cdots & \cdots \end{vmatrix} \xlongequal{r_i + kr_j} \begin{vmatrix} \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1}+ka_{j1} & \cdots & a_{in}+ka_{jn} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{j1} & \cdots & a_{jn} \\ \cdots & \cdots & \cdots \end{vmatrix} \quad (i \neq j)$$

注 第 j 行(列)元素乘以数 k 加到第 i 行(列)对应元素上去，记为 $r_i + kr_j$ $(r_i + cr_j)$，行列式中第 i 行(列)元素发生变化。

利用行列式的性质，可简化行列式的计算，下面举例说明。

例 1.9 计算行列式

$$D=\begin{vmatrix}1&3&2&4\\3&1&2&4\\3&1&4&2\\1&3&4&2\end{vmatrix}$$

解 $D\xlongequal{r_4+(-1)r_1}\begin{vmatrix}1&3&2&4\\3&1&2&4\\3&1&4&2\\0&0&2&-2\end{vmatrix}\xlongequal{r_3+(-1)r_2}\begin{vmatrix}1&3&2&4\\3&1&2&4\\0&0&2&-2\\0&0&2&-2\end{vmatrix}=0$

例 1.10 计算行列式

$$D=\begin{vmatrix}1&1&-1&2\\-1&-1&-4&1\\2&4&-6&1\\1&2&2&2\end{vmatrix}$$

解

$$D=\begin{vmatrix}1&1&-1&2\\-1&-1&-4&1\\2&4&-6&1\\1&2&2&2\end{vmatrix}\xlongequal[\substack{r_3+(-2)r_1\\r_4+(-1)r_1}]{r_2+r_1}\begin{vmatrix}1&1&-1&2\\0&0&-5&3\\0&2&-4&-3\\0&1&3&0\end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{r_2\leftrightarrow r_4}-\begin{vmatrix}1&1&-1&2\\0&1&3&0\\0&2&-4&-3\\0&0&-5&3\end{vmatrix}\xlongequal{r_3+(-2)r_2}-\begin{vmatrix}1&1&-1&2\\0&1&5&0\\0&0&-10&-3\\0&0&-5&3\end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{r_3\leftrightarrow r_4}\begin{vmatrix}1&1&-1&2\\0&1&5&0\\0&0&-5&3\\0&0&-10&-3\end{vmatrix}\xlongequal{r_4+(-2)r_3}\begin{vmatrix}1&1&-1&2\\0&1&5&0\\0&0&-5&3\\0&0&0&-9\end{vmatrix}$$

$=45$

注 例 1.10 中,我们利用行列式的性质将行列式转化为一个三角行列式后进行计算,这种方法称为化三角形法。

例 1.11 计算 n 阶行列式

$$D=\begin{vmatrix} a_1 & b & b & \cdots & b \\ b & a_2 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ b & 0 & 0 & \cdots & a_n \end{vmatrix} \quad (a_1a_2\cdots a_n \neq 0)$$

解

$$D \xlongequal{r_1+\left(-\frac{b}{a_2}\right)r_2} \begin{vmatrix} a_1-\dfrac{b^2}{a_2} & 0 & b & \cdots & b \\ b & a_2 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ b & 0 & 0 & \cdots & a_n \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{r_1+\left(-\frac{b}{a_3}\right)r_3} \begin{vmatrix} a_1-b^2\left(\dfrac{1}{a_2}+\dfrac{1}{a_3}\right) & 0 & 0 & \cdots & b \\ b & a_2 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ b & 0 & 0 & \cdots & a_n \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[(i=4,5,\cdots,n)]{r_1+\left(-\frac{b}{a_i}\right)r_i} \begin{vmatrix} a_1-b^2\sum\limits_{i=2}^{n}\dfrac{1}{a_i} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ b & a_2 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ b & 0 & 0 & \cdots & a_n \end{vmatrix}$$

$$= a_2\cdots a_n\left(a_1-b^2\sum_{i=2}^{n}\frac{1}{a_i}\right)$$

1.5 行列式按行(列)展开

一般而言,行列式阶数越高,计算越复杂;行列式阶数越低,计算过程越简单。因此,如果可以把高阶行列式用低阶行列式来表示,就可以起到简化运算的作用。下面,首先引入余子式和代数余子式的概念。

定义 1.6 把 n 阶行列式

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

中的元素 a_{ij} 所在的第 i 行第 j 列元素划去后，剩余 $(n-1)^2$ 个元素按原来的排法构成一个 $n-1$ 阶行列式 $\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,j-1} & a_{1,j+1} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i-1,1} & \cdots & a_{i-1,j-1} & a_{i-1,j+1} & \cdots & a_{i-1,n} \\ a_{i+1,1} & \cdots & a_{i+1,j-1} & a_{i+1,j+1} & \cdots & a_{i+1,n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,j-1} & a_{n,j+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$，称为元素 a_{ij} 的余子式，记作 M_{ij}；称 $A_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij}$ 为元素 a_{ij} 的代数余子数，记作 A_{ij}。

注 M_{ij}，A_{ij} 与原行列式中第 i 行第 j 列元素无关。

例如，四阶行列式

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}$$

中，元素 a_{34} 的余子式 $M_{34}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} \end{vmatrix}$，代数余子式 $A_{34}=(-1)^{3+4}M_{34}=-M_{34}$。

引理 一个 n 阶行列式，如果第 i 行元素除 a_{ij} 外全部为零，那么该行列式等于 a_{ij} 与它的代数余子式的乘积，即 $D_n=a_{ij}A_{ij}$。

证明 首先证明 a_{ij} 位于第一行第一列的情况：

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=\sum_{j_2\cdots j_n}(-1)^{\tau(1j_2\cdots j_n)}a_{11}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}$$

$$=a_{11}\sum_{j_2\cdots j_n}(-1)^{\tau(j_2\cdots j_n)}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}$$