

奥数 题库



澳大利亚数学能力检测 试题解析与评注

中学高级卷

〔澳〕 W. J. 阿特金斯 P. J. 泰勒 M. G. 克拉珀 编著
朱华伟 孙文先 编译



科学出版社

奥数 题库



澳大利亚数学能力检测 试题解析与评注

中学高级卷

2006—2013

〔澳〕 W. J. 阿特金斯 P. J. 泰勒 M. G. 克拉珀 编著
朱华伟 孙文先 编译

科学出版社
北京

内 容 简 介

本书收录了 2006—2013 年澳大利亚数学能力检测中学高级卷的全部试题,对每一道试题均给出详解,有些题目还给出了多种解法与评注,以使读者加深对问题的理解并能开拓思路,培养举一反三的能力。

本书可供高中数学资优生,准备参加高中数学竞赛、高考及大学自主招生的学生,中学数学教师、数学爱好者、高等师范院校数学教育专业师生参考。

图书在版编目(CIP)数据

澳大利亚数学能力检测试题解析与评注. 中学高级卷: 2006—2013 / (澳)阿特金斯(Atkins, W. J.), (澳)泰勒(Taylor, P. J.), (澳)克拉珀(Clapper, M. G.) 编著; 朱华伟, 孙文先编译. —北京: 科学出版社, 2014.3
(奥数题库)

ISBN 978-7-03-040019-2

I. ①澳… II. ①阿…②泰…③克…④朱…⑤孙… III. ①中学数学课—高中—题解 IV. ① G634.605

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2014) 第 045154 号

责任编辑: 李 敏 周 杰 / 责任校对: 郭瑞芝

责任印制: 赵德静 / 封面设计: 黄华斌

科学出版社出版

北京东黄城根北街 16 号

邮政编码: 100717

<http://www.sciencep.com>

中国科学院印刷厂印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2014 年 4 月第 一 版 开本: 720 × 1000 1/16

2014 年 4 月第一次印刷 印张: 14

字数: 300 000

定价: 58.00 元

(如有印装质量问题, 我社负责调换)

张景中谈奥数

华伟教授认为，竞赛数学是教育数学的一部分。这个看法是言之成理的。数学要解题，要发现问题、创造方法。年复一年进行的数学竞赛活动，不断地为数学问题的宝库注入新鲜血液，常常把学术形态的数学成果转化为可能用于教学的形态。早期的国际数学奥林匹克试题，有不少进入了数学教材，成为例题和习题。竞赛数学与教育数学的关系，于此可见一斑。

写到这里，忍不住要为数学竞赛说几句话。有一阵子，媒体上面出现不少讨伐数学竞赛的声音，有的教育专家甚至认为数学竞赛之害甚于黄、赌、毒。我看了有关报道后第一个想法是，中国现在值得反对的事情不少，论轻重缓急还远远轮不到反对数学竞赛吧。再仔细读这些反对数学竞赛的意见，可以看出来，他们反对的实际上是某些为牟利而又误人子弟的数学竞赛培训。就数学竞赛本身而言，是面向青少年中很小一部分数学爱好者而组织的活动。这些热心参与数学竞赛的数学爱好者（还有不少数学爱好者参与其他活动，例如青少年创新发明活动、数学建模活动、近年来设立的丘成桐中学数学奖），估计不超过约两亿中小学生的百分之五。从一方面讲，数学竞赛培训活动过热产生的消极影响，和升学考试体制以及教育资源分配过分集中等多种因素有关，这笔账不能算在数学竞赛头上；从另一方面看，大学招生和数学竞赛挂钩，也正说明了数学竞赛活动的成功因而得到认可。

对于青少年的课外兴趣活动，积极的对策不应当是限制堵塞，而是开源分流，发展多种课外活动，让更多的青少年各得其所，把各种活动都办得像数学竞赛这样成功并且被认可，数学竞赛培训活动过热的问题自然就化解或缓解了。

摘自《走进教育数学》丛书总序

前 言

澳大利亚数学竞赛 (Australian Mathematics Competition) 于 1978 年开始正式举办, 在此之前曾在澳大利亚一些地区进行小规模试验性的竞赛. 目前它是世界上规模最大的数学竞赛之一, 每年都吸引几十万名学生参赛, 其中部分参赛者是来自邻近国家或地区, 人数较多者有新加坡、新西兰、马来西亚、中国台湾、中国香港与菲律宾, 成绩表现优异的国家有中国、印度尼西亚、泰国、印度与保加利亚, 在澳大利亚几乎所有的学校都参加此竞赛.

澳大利亚数学竞赛中学试题依难易分为中学初级卷 (适用于小学六年级、初中一年级)、中学中级卷 (适用于初中二、三年级)、中学高级卷 (适用于高中) 三种. 试题共有 30 题, 其中第 1—25 题是五个选择项的单选题, 第 26—30 题则深具挑战性, 其答案设计为 000~999 的正整数. 答题时间 75 分钟, 不得使用任何辅助计算器具.

试题的难度是经过精心分级的, 前面的一些试题, 通常是与课堂上数学基本技能高度相关的, 我们假定所有的学生应该有能能力答对这些题目. 从第 11 题以后, 试题难度逐渐加深, 特别是最后五题, 则是非常具有挑战性的.

命题委员会的组成包括来自澳大利亚与世界各地的专家, 他们全心投入拟订试题与审查试题的工作, 以确保试题的质量, 并控制试题所涉及的知识以免超出中学生的能力所及. 特别具有难

度的试题,考生必须熟悉如何运用课堂知识与细心尝试各种可能性,才能够求出答案的。

澳大利亚数学信托基金会 (Australian Mathematics Trust) 原出版了一系列有关澳大利亚数学竞赛中学试题的解析,但因为是根据试题所属数学知识之分支编排,将中学初级卷、中级卷、高级卷的试题都融合在一起,知识面跨度较大,对于中学低年级学生阅读产生一定的困难度。于是我们改变了编排的形式,本书收录 2006—2013 年澳大利亚数学竞赛中学高级卷的全部试题,将英文版原试题与中文翻译版试题并列,以方便学生顺便了解数学语句与词汇的英文说法。对于每一道试题均给出了详细解答,有些题目还给出了多种解法与评注,目的是使读者加深对问题的理解与开拓思路,从中得到有益的启发。本书英文版的所有打字编排工作全由命题委员会主席 Warren Atkins 与澳大利亚数学信托基金会执行董事 Peter Taylor 亲自操办,书中运用许多生动的图案与表格来体现一些概念,让学生易于了解。本书非常适合喜爱数学的中学生自修。

在本书编译与撰写评注过程中,我们参阅了许多中外文文献资料,在此向原作者表示衷心的感谢。财团法人台北市九章数学教育基金会研究员李政霖、广州大学博士研究生付云皓对本书的编写提供了很大的帮助,在此向他们表示真诚的感谢。对于本书存在的问题,诚挚希望读者不吝赐教。



2013 年 11 月于广州大学城

目 录

张景中谈奥数

前言

第 1 章 2006—2013 年英文试题、中文试题	1
1.1 2006 年中学高级卷英文试题	1
1.2 2006 年中学高级卷中文试题	6
1.3 2007 年中学高级卷英文试题	10
1.4 2007 年中学高级卷中文试题	15
1.5 2008 年中学高级卷英文试题	20
1.6 2008 年中学高级卷中文试题	25
1.7 2009 年中学高级卷英文试题	30
1.8 2009 年中学高级卷中文试题	37
1.9 2010 年中学高级卷英文试题	43
1.10 2010 年中学高级卷中文试题	48
1.11 2011 年中学高级卷英文试题	53
1.12 2011 年中学高级卷中文试题	58
1.13 2012 年中学高级卷英文试题	63
1.14 2012 年中学高级卷中文试题	68
1.15 2013 年中学高级卷英文试题	73
1.16 2013 年中学高级卷中文试题	79
第 2 章 2006—2013 年试题简答	86
2.1 2006 年中学高级卷试题简答	86
2.2 2007 年中学高级卷试题简答	86
2.3 2008 年中学高级卷试题简答	87
2.4 2009 年中学高级卷试题简答	87

2.5	2010 年中学高级卷试题简答	88
2.6	2011 年中学高级卷试题简答	88
2.7	2012 年中学高级卷试题简答	89
2.8	2013 年中学高级卷试题简答	89
第 3 章	2006—2013 年试题解析与评注	90
3.1	2006 年中学高级卷试题解析与评注	90
3.2	2007 年中学高级卷试题解析与评注	102
3.3	2008 年中学高级卷试题解析与评注	121
3.4	2009 年中学高级卷试题解析与评注	133
3.5	2010 年中学高级卷试题解析与评注	147
3.6	2011 年中学高级卷试题解析与评注	167
3.7	2012 年中学高级卷试题解析与评注	185
3.8	2013 年中学高级卷试题解析与评注	197

第 1 章 2006—2013 年英文试题、中文试题

1.1 2006 年中学高级卷英文试题

Australian Mathematics Competition 2006 Senior Division Competition Paper

Questions 1 to 10, 3 marks each

1. The value of $\frac{6 \times 25}{3 \times 5 \times 2}$ is

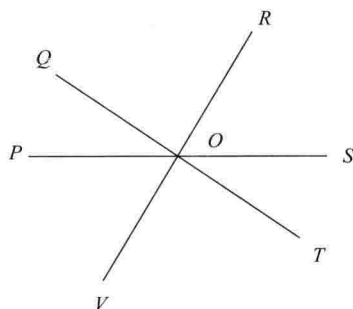
- (A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 5 (E) 6

2. If $a = 2b - 5$, then b equals

- (A) $\frac{a}{2}$ (B) $\frac{a}{2} + 5$ (C) $\frac{a-5}{2}$ (D) $\frac{a+5}{2}$ (E) $2a + 5$

3. In the diagram, $\angle POR = 120^\circ$ and $\angle QOS = 145^\circ$. The size of $\angle TOV$ is

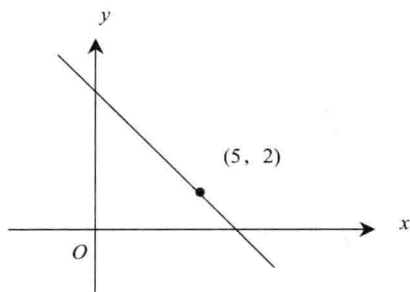
- (A) 45° (B) 60° (C) 85° (D) 90° (E) 95°



4. Which of the following is equal to $\frac{7}{x^2}$?

- (A) $(7x)^{-2}$ (B) $\frac{1}{7x}$ (C) $\frac{1}{7x^2}$ (D) $\frac{x^2}{7}$ (E) $7x^{-2}$

5. In the figure, if the line has gradient -1 , what is the y -intercept?



- (A) 4 (B) 2 (C) 6 (D) 7 (E) 5

6. The page numbers of a book are consecutive whole numbers. If you begin reading at the top of page x and stop reading at the bottom of page y , the number of pages you have read is

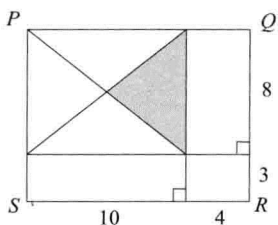
- (A) $x - y$ (B) $y - x$ (C) $x + y$
(D) $y - x + 1$ (E) $y - x - 1$

7. A rectangular box has faces with areas of 35, 60 and 84 square centimetres. The volume of the box, in cubic centimetres, is

- (A) 420 (B) 480 (C) 512 (D) 563 (E) 635

8. If $x = 3^n + 3^n + 3^n$, which of the following is equal to x^2 ?

- (A) 9^{3n} (B) 3^{2n+2} (C) 27^{2n} (D) 3^{2n} (E) 3^{n^2+6n+9}



9. What fraction of the rectangle $PQRS$ in the diagram is shaded?

- (A) $\frac{1}{16}$ (B) $\frac{3}{5}$ (C) $\frac{1}{8}$
(D) $\frac{1}{10}$ (E) $\frac{10}{77}$

10. A train travelling at constant speed takes a quarter of a minute to pass a signpost and takes three-quarters of a minute to pass completely through a tunnel which is 600 m in length. The speed of the train, in kilometres per hour, is

- (A) 50 (B) 56 (C) 64 (D) 72 (E) 80

Questions 11 to 20, 4 marks each

11. In a container are 8 red, 3 white and 9 blue balls. If 3 balls are selected at

random, the probability of getting 2 red balls and 1 white ball is

- (A) $\frac{1}{12}$ (B) $\frac{1}{4}$ (C) $\frac{7}{285}$ (D) $\frac{2}{3}$ (E) $\frac{7}{95}$

12. The number of digits in the answer to the product $16^8 \times 5^{25}$ is

- (A) 24 (B) 25 (C) 26 (D) 27 (E) 28

13. If $x < y < 0 < z$, which of the following must be true?

- (A) $x + y + z > 0$ (B) $(x + y)^2 - z > 0$ (C) $x + y + z^2 > 0$
(D) $x + y - z > 0$ (E) $x + y - z < 0$

14. In a triangle PQR , $\sin \angle P = \frac{1}{3}$ and $\sin \angle Q = \frac{1}{4}$. How many different

values can the size of $\angle R$ have?

- (A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) 3 (E) 4

15. How many different pairs of 2-digit numbers multiply to give a 3-digit number with all digits the same?

- (A) 5 (B) 6 (C) 7 (D) 8 (E) 9

16. I have 450 grams of salt and flour mix. How many grams of flour should I add to reduce the percentage of salt in the mixture to 90% of what it was?

- (A) 50 (B) 10 (C) 30 (D) 45 (E) 60

17. Five bales of hay are weighed two at a time in all possible combinations. The weights, in kilograms, are:

110, 112, 113, 114, 115, 116, 117, 118, 120 and 121.

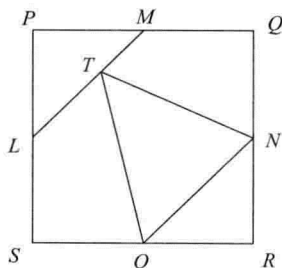
What is the weight, in kilograms, of the heaviest bale?

- (A) 58 (B) 59 (C) 60 (D) 61 (E) 62

18. In the diagram, $PQRS$ is a square of side 2 units. M , N , O and L are the midpoints of PQ , QR , RS and SP respectively, and T is a point on LM .

The area, in square units, of $\triangle TNO$ is

- (A) 2 (B) 1 (C) $\sqrt{2}$
(D) $\frac{4}{5}$ (E) $\frac{\sqrt{3}}{2}$



19. If $7^{x+1} - 7^{x-1} = 336\sqrt{7}$, then the value of x is

- (A) $\frac{5}{2}$ (B) $\frac{3}{2}$ (C) $\frac{-3}{2}$ (D) $\frac{7}{2}$ (E) $\frac{1}{2}$

20. The nine squares of a 3×3 grid painted on a wall are to be coloured red,

R	W	B
B	R	W
W	B	R

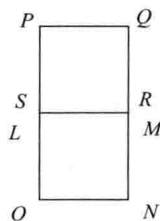
white and blue so that no row or column contains squares of the same colour. One such pattern is shown in the diagram. How many different patterns can be made?

- (A) 15 (B) 6 (C) 9 (D) 12 (E) 24

Questions 21 to 30, 5 marks each

21. The squares $PQRS$ and $LMNO$ have equal sides of 1 m and are initially placed so that the side SR touches LM as shown.

The square $PQRS$ is rotated about R until Q coincides with N . The square is then rotated about Q until P coincides with O . It is then rotated about P until S coincides with L and then finally rotated about S until R coincides with M and the square is now back to its original position. The length, in metres, of the path traced out by the point P in these rotations is



- (A) $\pi(2 + \sqrt{2})$ (B) 4π (C) $2\pi(2 + \sqrt{2})$
(D) 2π (E) $\pi(3 + \sqrt{2})$

22. The vertices of a cube are each labelled with one of the integers $1, 2, 3, \dots, 8$. A face-sum is the sum of the labels of the four vertices on a face of the cube. What is the maximum number of equal face-sums in any of these labellings?

- (A) 2 (B) 3 (C) 4 (D) 5 (E) 6

23. In a tetrahedron $PQRS$, $\angle PSR = 30^\circ$ and $\angle QSR = 40^\circ$. If the size of $\angle PSQ$ is an integral number of degrees, how many possible values can it have?

- (A) 9 (B) 59 (C) 69 (D) 90 (E) 180

24. For how many positive integer values of a does the equation

$$\sqrt{a+x} + \sqrt{a-x} = a$$

have a real solution for x ?

- (A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) 3 (E) 4

25. Eight points lie on the circumference of a circle. One of them is labelled P . Chords join some or all of the pairs of these points so that the seven points other

than P lie on different numbers of chords. What is the minimum number of chords on which P lies?

- (A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4 (E) 5

For questions 26 to 30, shade the answer as a whole number from 000 to 999 in the space provided on the answer sheet.

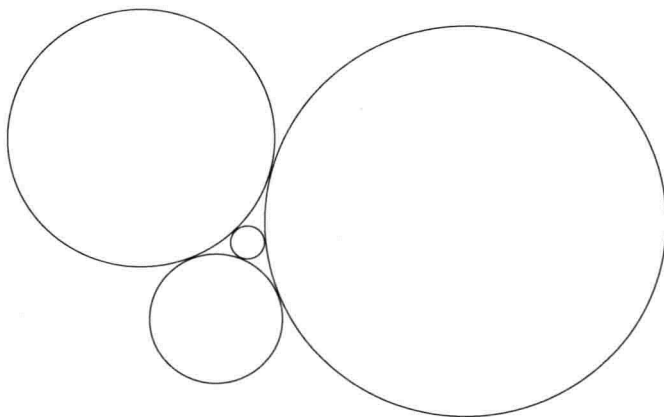
26. Each of the students in a class writes a different 2-digit number on the whiteboard. The teacher claims that no matter what the students write, there will be at least three numbers on the whiteboard whose digits have the same sum. What is the smallest number of students in the class for the teacher to be correct?

27. The sum of three numbers is 4, the sum of their squares is 10 and the sum of their cubes is 22. What is the sum of their fourth powers?

28. In a regular polygon there are two diagonals such that the angle between them is 50° . What is the smallest number of sides of the polygon for which this is possible?

29. The sum of n positive integers is 19. What is the maximum possible product of these n numbers?

30. Three circles of radius 1, 2 and 3 centimetres just touch each other as shown. A smaller circle lies in the space between them, just touching each one.



The radius of the smallest circle is, in centimetres, $\frac{p}{q}$, where p and q are integers with no common factors. What is the value of $p + q$?

1.2 2006年中学高级卷中文试题

2006年澳大利亚数学能力检测中学高级卷

1—10题，每题3分

1. 算式 $\frac{6 \times 25}{3 \times 5 \times 2}$ 等于

- (A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 5 (E) 6

2. 若 $a = 2b - 5$ ，则 b 等于

- (A) $\frac{a}{2}$ (B) $\frac{a}{2} + 5$ (C) $\frac{a-5}{2}$ (D) $\frac{a+5}{2}$ (E) $2a+5$

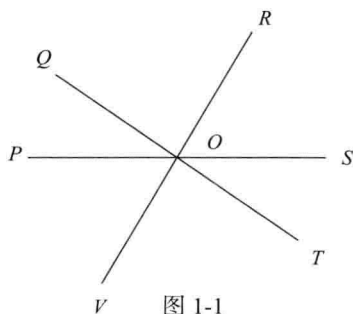


图 1-1

3. 在图 1-1 中，已知 $\angle POR = 120^\circ$ 且 $\angle QOS = 145^\circ$ ，请问 $\angle TOV$ 等于什么？

- (A) 45° (B) 60° (C) 85°
(D) 90° (E) 95°

4. 请问 $\frac{7}{x^2}$ 等于下列哪一项？

- (A) $(7x)^{-2}$ (B) $\frac{1}{7x}$ (C) $\frac{1}{7x^2}$
(D) $\frac{x^2}{7}$ (E) $7x^{-2}$

5. 如图 1-2 所示，若直线的斜率为 -1 ，则此直线在 y 轴上的截距为多少？

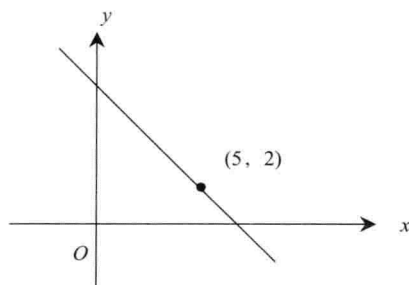


图 1-2

- (A) 4 (B) 2 (C) 6 (D) 7 (E) 5

6. 书本的页数为连续的正整数. 已知您从第 x 页第一行开始阅读, 直到第 y 页最后一行为止, 请问您共阅读了多少页?

- (A) $x - y$ (B) $y - x$ (C) $x + y$
(D) $y - x + 1$ (E) $y - x - 1$

7. 有一个长方形纸盒, 其中三个面的面积为 35 cm^2 、 60 cm^2 及 84 cm^2 . 请问这个纸盒的体积为多少立方厘米?

- (A) 420 (B) 480 (C) 512 (D) 563 (E) 635

8. 若 $x = 3^n + 3^n + 3^n$, 请问下列哪一项的值等于 x^2 ?

- (A) 9^{3n} (B) 3^{2n+2} (C) 27^{2n} (D) 3^{2n} (E) 3^{n^2+6n+9}

9. 图 1-3 中, 请问矩形 $PQRS$ 的几分之几被涂上阴影?

- (A) $\frac{1}{16}$ (B) $\frac{3}{5}$ (C) $\frac{1}{8}$
(D) $\frac{1}{10}$ (E) $\frac{10}{77}$

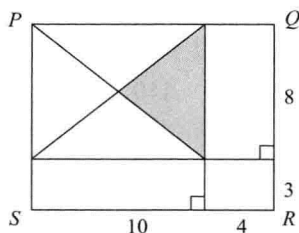


图 1-3

10. 一列火车以匀速行驶, 这列火车通过一个信号灯耗时四分之一分钟, 它从进入一座 600 m 长的隧道开始到完全离开为止耗时四分之三分钟. 请问这列火车的时速为多少千米每小时?

- (A) 50 (B) 56 (C) 64 (D) 72 (E) 80

11—20题, 每题4分

11. 有一个箱子内有 8 颗红色球、3 颗白色球以及 9 颗蓝色球. 从箱子中随机取出 3 颗球, 请问取出的球中有 2 颗红色球与 1 颗白色球的概率是多少?

- (A) $\frac{1}{12}$ (B) $\frac{1}{4}$ (C) $\frac{7}{285}$ (D) $\frac{2}{3}$ (E) $\frac{7}{95}$

12. 将 $16^8 \times 5^{25}$ 乘开, 请问所得的乘积共有几位数字?

- (A) 24 (B) 25 (C) 26 (D) 27 (E) 28

13. 已知 $x < y < 0 < z$, 请问下列哪一项恒为真?

- (A) $x + y + z > 0$ (B) $(x + y)^2 - z > 0$ (C) $-x + y + z^2 > 0$
(D) $x + y - z > 0$ (E) $x + y - z < 0$

14. 在 $\triangle PQR$ 中, 已知 $\sin \angle P = \frac{1}{3}$ 且 $\sin \angle Q = \frac{1}{4}$. 请问满足此条件的 $\angle R$ 有多少种不同的值?

- (A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) 3 (E) 4

15. 将两个两位数相乘, 得到一个每位数码都相同的三位数, 请问这样的两位数共有多少对?

- (A) 5 (B) 6 (C) 7 (D) 8 (E) 9

16. 现有面粉及食盐的混合物 450 g. 若欲使此混合物中的食盐所占的比例降低为原来的 90%, 请问应再加入多少克的面粉?

- (A) 50 (B) 10 (C) 30 (D) 45 (E) 60

17. 有五捆干草, 每次任取两捆称重, 将所有可能的组合都各称一次. 其重量 (以千克计) 分别为

110, 112, 113, 114, 115, 116, 117, 118, 120 与 121.

请问最重的一捆干草的重量为多少千克?

- (A) 58 (B) 59 (C) 60
(D) 61 (E) 62

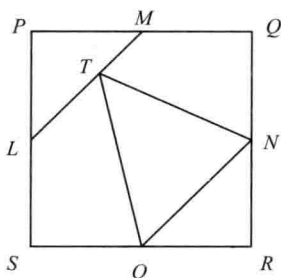


图 1-4

18. 图 1-4 中, 正方形 $PQRS$ 边长为 2 单位. 点 M 、 N 、 O 及 L 分别为边 PQ 、 QR 、 RS 及 SP 的中点, 且 T 为 LM 上的一点.

请问 $\triangle TNO$ 的面积为多少平方单位?

- (A) 2 (B) 1 (C) $\sqrt{2}$
(D) $\frac{4}{5}$ (E) $\frac{\sqrt{3}}{2}$

19. 已知 $7^{x+1} - 7^{x-1} = 336\sqrt{7}$, 则 x 之值等于

- (A) $\frac{5}{2}$ (B) $\frac{3}{2}$ (C) $\frac{-3}{2}$ (D) $\frac{7}{2}$ (E) $\frac{1}{2}$

20. 将画在墙壁上的 3×3 方格表的九个方格内分别涂上红、白或蓝色, 使得每一列、每一行的小方格内所涂的颜色都互不相同. 如图 1-5 所示是其中一种涂法的例子. 请问共可涂出多少种不同的图案?

- (A) 15 (B) 6 (C) 9
(D) 12 (E) 24

红	白	蓝
蓝	红	白
白	蓝	红

图 1-5