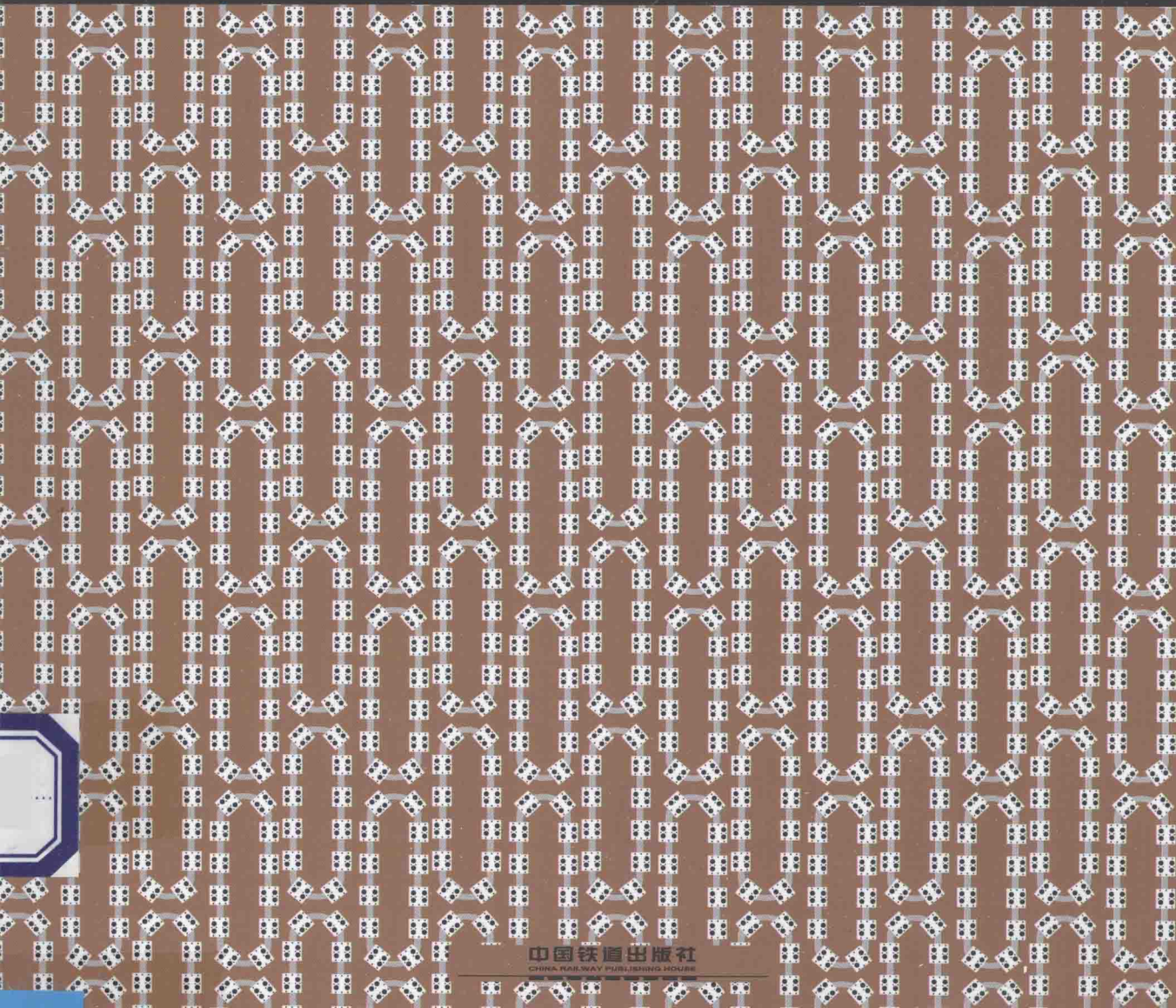
 同济大学研究生教材

轨道车辆系统动力学

Railway Vehicle System Dynamics

沈 钢 编著



中国铁道出版社

CHINA RAILWAY PUBLISHING HOUSE

轨道车辆系统动力学

沈 钢 编著

中国铁道出版社

2014年·北京

内 容 简 介

本书取材于轨道车辆工程实际的研究成果和国内外的相关教材及专著,提炼出系统化的基础理论、实用方法和前沿性的工程问题,是集基础性、专业性和实用性为一体的教材。全书共 14 章,主要内容包括车辆动力学概述,动力学分析基础,轮轨关系理论,轨道的线路结构与不平顺,车辆系统数学模型,车辆系统的稳定性,车辆系统的平稳性,车辆的曲线通过,轨道车辆的运行安全性,牵引、制动、黏着及轴重转移有关的动力学问题,轨道车辆纵向动力学,轨道车辆柔刚体动力学,轨道车辆与线桥、网、空气的耦合动力学综述,轨道车辆的主动控制等。

本书为研究生专业学位课教材,也可作为从事该方向研究人员的参考书。

图书在版编目(CIP)数据

轨道车辆系统动力学 / 沈钢编著. —北京:中国铁道出版社,2014.9
ISBN 978-7-113-19015-6

I. ①轨… II. ①沈… III. ①轻轨车辆—车辆动力学—研究生—教材 IV. ①U270.9

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2014)第 172775 号

书 名:轨道车辆系统动力学
作 者:沈 钢

策 划:徐 艳
责任编辑:张 瑜 编辑部电话:010-51873065
封面设计:张 微
责任校对:龚长江
责任印制:郭向伟

出版发行:中国铁道出版社(100054,北京市西城区右安门西街8号)
网 址:<http://www.tdpress.com>
印 刷:三河市宏盛印务有限公司
版 次:2014年9月第1版 2014年9月第1次印刷
开 本:787 mm×1 092 mm 1/16 印张:19.75 字数:494 千
书 号:ISBN 978-7-113-19015-6
定 价:54.00 元

版权所有 侵权必究

凡购买铁道版图书,如有印制质量问题,请与本社读者服务部联系调换。电话:(010)51873174(发行部)
打击盗版举报电话:市电(010)51873659,路电(021)73659,传真(010)63549480

前 言

《轨道车辆系统动力学》是车辆工程(轨道交通方向)和载运工具运用工程的研究生教学的主要课程,体现了轨道交通系统的最根本的特色——“轮与轨”的基础知识及其应用。本课程教材长期沿用具有悠久历史的《机车车辆及轨道系统动力学》(张定贤主编,1996年首版),参考教材有《现代轨道车辆动力学》(胡用生主编,2009年出版)、《Dynamics of Railway Vehicle Systems》(V.J.Garge编,1983年出版)和《Vehicle System Dynamics》(Anderson等编写的讲义)。随着铁路向高速和重载的发展、城市轨道交通的不断普及,以及人们对高速安全、环保舒适、高效经济等要求的提高,轨道车辆及轨道系统在结构设计、动力学指标方面都有新的发展,并且在历年举行的国际性学术会议上都有体现,如IAVSD国际车辆系统动力学会会议、CONTACT国际接触会议和IHHA国际重载运输大会等。学术和工程界的长足发展又为课堂教学提供了丰富的素材,在同济大学研究生院的研究生精品课程项目的支持下,决定重新根据现有的国内外专业教材和本课程的改革设想编制一套具有特色的教材,以适应研究生教学的特点。

本教材可作为研究生专业学位课教材,也可作为从事该方向的研究人员的参考书。主要内容取材于结合工程实际的研究成果和国内外的相关教材及专著,提炼出系统化的基础理论、实用方法和前沿性的工程问题,使学者既能系统了解该学科方向的成熟基础理论,掌握实用的工程处理方法,又能够获得目前的前沿性难题,引导学生向兼具工程和学术价值的研究方向努力做出创造性的成果。每章基本包含基础知识、工程案例分析、参考文献和思考题等。

本书由同济大学沈钢教授编著,陆正刚教授和周劲松教授任副主编。各章编写分工如下:沈钢负责第一~八章、第九章的第一~四节、第十章、第十一章、第十三章;陆正刚负责第十二章;周劲松负责第十四章、第七章第二节的协方差分析法;任利惠负责第九章的第五节。参与各章编写和梳理的有黎琳、王辉、毛鑫、陈国锋、张剑。本书在编写过程中得到了同济大学铁道与城市轨道交通研究院车辆工程教学团队老师的建议和支持,在此对罗湘萍副教授、应之丁副教授、王文斌副教授等表示衷心的感谢。

本书不少内容借鉴了多本国内外教材,也融入了新近的研究成果和工程热点问题。鉴于作者水平有限,书中难免存在不足之处,请广大读者批评指正。

编者

2014年7月

目 录

第一章 车辆动力学概述.....	1
第一节 轨道车辆结构的发展概况.....	1
第二节 车辆动力学的研究概况.....	5
复习思考题.....	6
研讨思考题.....	6
参考文献.....	7
第二章 动力学分析基础.....	8
第一节 简单模型分析.....	8
第二节 特征值和特征向量	12
第三节 传递函数及功率谱	15
第四节 数值积分方法	18
复习思考题	25
研讨思考题	25
参考文献	25
第三章 轮轨关系理论	26
第一节 轮轨几何接触	26
第二节 蠕滑和蠕滑力	34
第三节 非赫兹接触理论	36
第四节 轮对的运动方程	49
复习思考题	53
研讨思考题	54
参考文献	54
第四章 轨道的线路结构与不平顺	55
第一节 轨道结构及不平顺	55
第二节 轨道不平顺的测量及表达	58
第三节 轨道的功率谱反演	60
第四节 滚动线偏距	62
复习思考题	63
研讨思考题	63
参考文献	63

第五章 车辆系统数学模型	64
第一节 车辆与轨道系统建模规则	64
第二节 悬挂元件的数学模型	65
第三节 轮对轨道耦合振动模型	76
第四节 坐标系与坐标系之间的变换	79
第五节 运动方程的矩阵组装法	82
复习思考题	88
研讨思考题	89
参考文献	89
第六章 车辆系统的稳定性	90
第一节 车辆蛇行运动	90
第二节 车辆临界速度的计算方法	92
第三节 稳定性的影响因素及提高方法	107
复习思考题	111
研讨思考题	112
参考文献	112
第七章 车辆系统的平稳性	113
第一节 基本概念	113
第二节 车辆系统平稳性分析	113
第三节 车辆系统平稳性的测定及评价方法	126
复习思考题	136
研讨思考题	137
参考文献	137
第八章 车辆的曲线通过	138
第一节 概 述	138
第二节 单轮对的曲线通过数学模型	139
第三节 单转向架的曲线通过模型	148
第四节 四轴车曲线通过模型	153
第五节 独立轮对的导向问题	157
复习思考题	168
研讨思考题	169
参考文献	169
第九章 轨道车辆的运行安全性	170
第一节 脱轨的类型及机理	170
第二节 基本的脱轨安全评价指标	171

第三节	轮重减载率	174
第四节	脱轨的影响因素及防治方法	178
第五节	车辆的运行安全性试验方法	182
	复习思考题	185
	研讨思考题	186
	参考文献	186
第十章	牵引、制动、黏着及轴重转移有关的动力学问题	187
第一节	牵引、制动、黏着的基本概念	187
第二节	黏滑控制	188
第三节	牵引力作用下的机车轴重转移	194
	复习思考题	199
	研讨思考题	200
	参考文献	200
第十一章	轨道车辆纵向动力学	201
第一节	列车纵向动力学基础	201
第二节	纵向动力学元件和数学模型	206
第三节	列车碰撞仿真	216
	复习思考题	231
	研讨思考题	231
	参考文献	231
第十二章	轨道车辆柔刚体动力学	232
第一节	柔刚体系统动力学	232
第二节	采用连续系统的轨道车辆柔刚体模型	233
第三节	采用有限元的轨道车辆柔刚体模型	238
第四节	轨道车辆柔刚体系统仿真分析实例	242
	复习思考题	244
	研讨思考题	245
	参考文献	245
第十三章	轨道车辆与线桥、网、空气的耦合动力学综述	246
第一节	轨道车辆与线桥耦合动力学	246
第二节	弓网系统动力学	254
第三节	气流对轨道车辆的影响	257
	复习思考题	263
	研讨思考题	263
	参考文献	263

第十四章 轨道车辆的主动控制	264
第一节 主动控制的基本概念.....	264
第二节 倾摆控制技术.....	264
第三节 稳定性控制技术.....	266
第四节 导向及稳定性控制技术.....	281
复习思考题.....	286
研讨思考题.....	287
参考文献.....	287
附录 A 经典轮轨接触算法	288
附录 B 各国轨道不平顺功率谱	299
附录 C 车轮等效斜度的计算方法	303
附录 D 某地铁车辆动力学计算参数	307

第一章 车辆动力学概述

运行中的轨道车辆是由轮对、构架、车体等多个部件相互通过悬挂元件相连,组成的复杂机械振动系统。在运行中由于受到轨道的不平顺激励,不仅要在直线上运行,还要通过各种曲线、道岔等人为设定线型的轨道,引起车辆在较宽频率范围上的振动;也会因速度的变化使系统内部特征发生变化,产生蛇行自激振动,导致运行品质的下降,产生轮轨动力作用和轮轨磨损,甚至出现危及行车安全的脱轨事故。自铁路诞生以来,铁路运输经历了诸多磨难,宏观的有列车脱轨事故、列车倾覆,微观的有轮轨过渡磨损、悬挂元件失效等,包括轮缘磨损、曲线钢轨侧磨、钢轨顶面波浪磨耗、车轮圆周不均匀磨耗、踏面裂纹、钢轨核伤、钢轨折断、悬挂弹簧断裂、车轴疲劳开裂、构架开裂、车体开裂等。这些问题大都与车辆及轨道系统的动力性能有关。通过合理设计车辆的走行部结构及悬挂系统,优化参数使振动的烈度减弱到允许的范围内,保证在规定的轨道不平顺及运行环境条件下使车辆安全平稳运行。

随着车辆运行速度的提高、车辆轴重的增加,以及人们对乘坐舒适度要求的不断提高,车辆动力学问题显得更加突出。

多年来,在工程实践的基础上,形成了一个以轮轨关系为核心理论基础,以现代振动与控制分析方法为手段,面向车辆轨道及弓网系统优化设计为主的车辆动力学学科分支。其研究内容涵盖轮轨相互作用,车辆系统的振动模态,蛇行稳定性,对轨道不平顺的振动响应,通过曲线、道岔等非直线轨道的动态特性预测,列车与轨道、桥梁及空气的相互作用,弓网相互作用等。

20世纪60年代对轮轨接触力模型的研究基本奠定了正确表达轮轨作用力数学模型的基础。80年代的多刚体研究成果为建立整车的较复杂模型带来了方便的手段,计算机及算法技术的发展使得仿真更快捷、正确。逐步建立了以计算机仿真模型为主的机车车辆辅助设计平台,缩短了新产品的升级换代周期,大大降低了研制成本。

第一节 轨道车辆结构的发展概况

车辆动力学的研究离不开车辆结构的发展和演变,它们相互影响、相互促进。车辆轮对及支撑其运行的钢轨等组成的轨道,是车辆最关键的走行元件,决定了动力学的基本特性。看似非常简单的轮轨系统单元,实际上是一个非常复杂的机械部件。轮对由一根车轴和固结在其上面的两个带有锥度和轮缘的轮子组成,运行在两个带有轨底坡和轨头廓形的钢轨所组成的轨道上,形成了一个兼具承载、对中、导向、安全限位、通过弯道功能的基本走行单元。单个轮对在回转方向上是静态不稳定的,如图 1-1 所示。

当两个这样的单元组合后即形成了基本的车辆——两轴车,如图 1-2 所示,使得车辆有了车体,也在回转方向上约束了轮对,车辆能较稳定地向前运行,但过大的回转方向约束也带来了曲线通过的困难。因此由这种两轴结构组成的转向架单元出现了,两轴转向架一起承载一

个更长的车体,解决了曲线通过问题,体现了轨道车辆的实用价值。带有两个两轴转向架的四轴车辆,如图 1-3 所示。

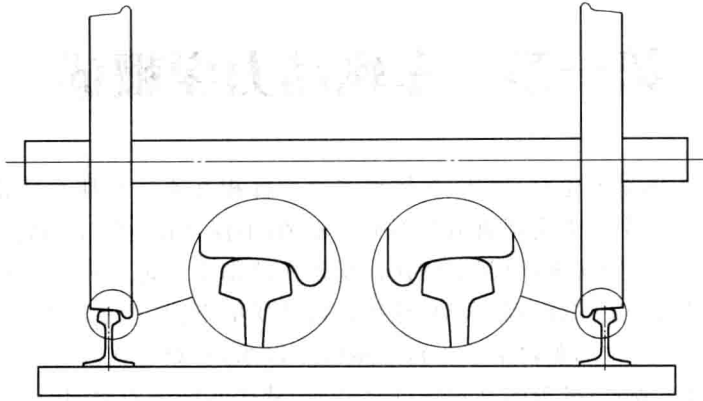


图 1-1 单轮对与轨道

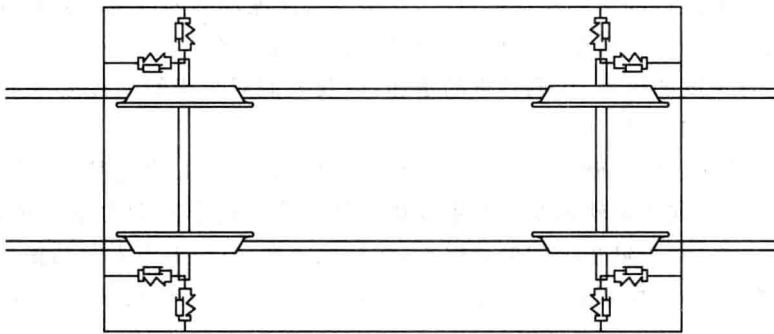


图 1-2 两轴车辆

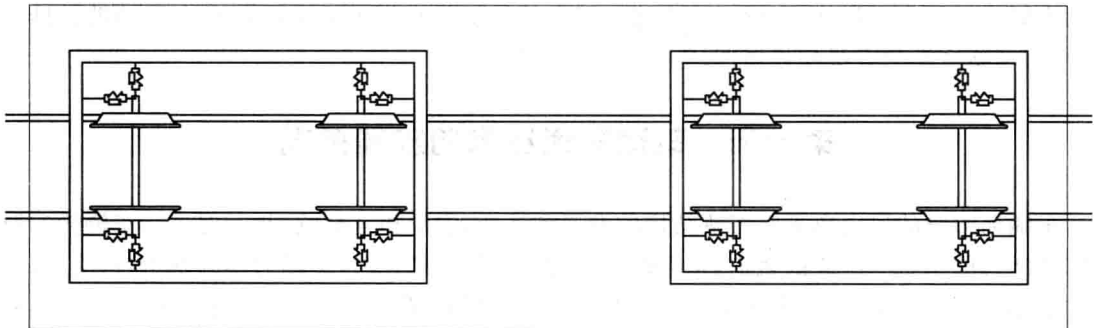


图 1-3 带有两个两轴转向架的四轴车辆

依次递推演变,可以形成多层转向架结构实现更长货物的运输,如图 1-4 所示的八轴车辆。另一方面可以在纵向将车辆相互连接,构成列车。转向架与车体以及各种连接机构的组合可以形成多种类型的列车,目标是使列车能够通过水平和竖曲线轨道,垂向/横向静力稳定,纵向强耦合。因此根据实际需要产生了形式众多的列车或车组,如图 1-5 所示,列车 1

为普通编组列车,列车 2 为铰接式列车,列车 3 和 4 为多种铰接轻轨车组,列车 5 为带有单轴转向架的列车。

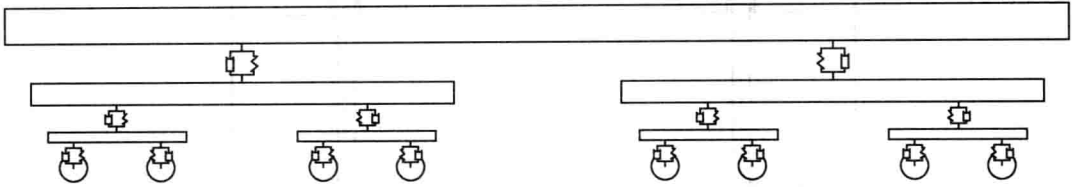


图 1-4 八轴车辆

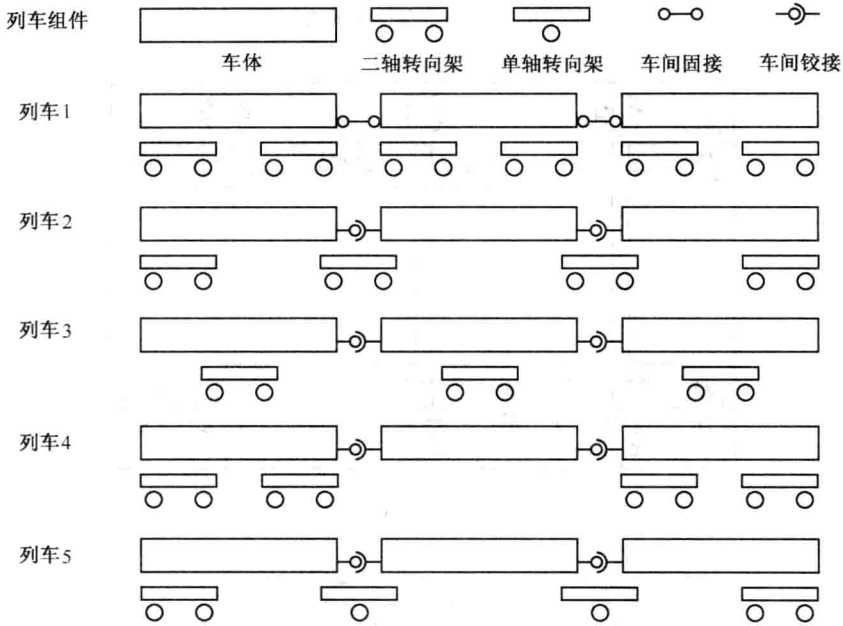


图 1-5 多种形式的列车的组成

多样化的需求又促使车辆结构发生演变。图 1-6 为独立轮对,左右两个轮子能独立绕车轴旋转,具有与刚性轮对完全不同的动力学性能。图 1-7 为独立轮对转向架,应用于低地板面轻轨车。图 1-8 为三轴转向架,是为提高机车的牵引功率演变而成的。图 1-9 为耦合的单轴转向架,具有较理想的曲线通过性能。此外还有更多从悬挂元件上或结构上演变的多种转向架,以及引入橡胶轮胎派生出的新颖车辆走行结构,但它们的机械性能需要进一步实际运用的考验。

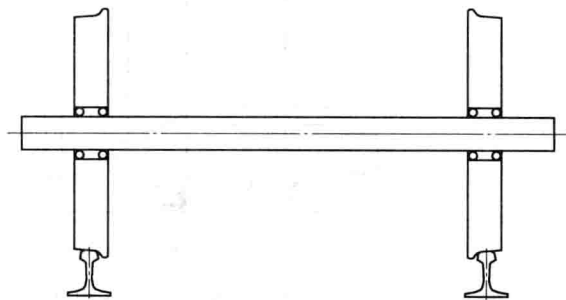


图 1-6 独立轮对

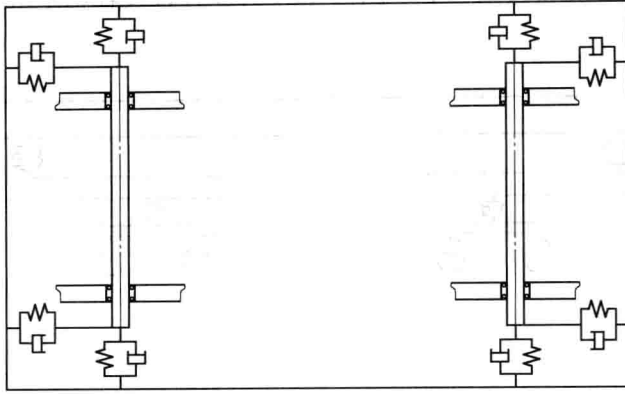


图 1-7 独立轮对转向架

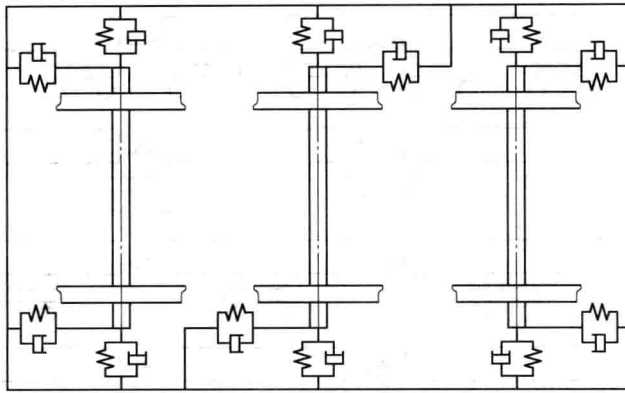


图 1-8 三轴转向架

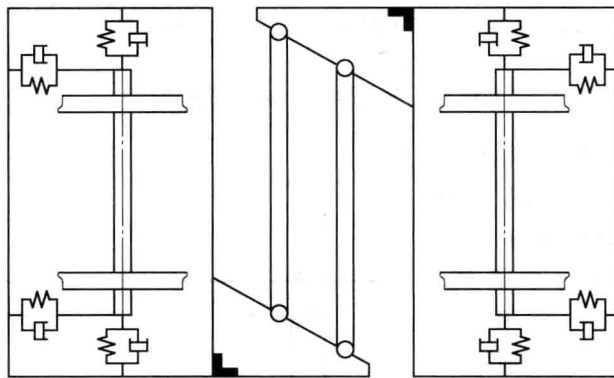


图 1-9 耦合转向架

在运行时速上,自铁路诞生时的二十多公里发展到了五百多公里的实验时速和三百多公里的实际运营时速。轴重也由最初的几吨提升到了常规的二十多吨,直至 40 t 的货车轴重。机车单机牵引功率也由原来的几匹马力提升到了 9 000 kW。

铁路运输已经成为人类历史上不可或缺的运输形式之一,是大宗货物和中短途运输的主力。众多先进技术也不断应用于铁路运输车辆及其基础设施中,使其成为容纳很多先进

技术的载体,特别是通信控制技术和传动变流技术的运用,促使列车运输日趋网络化和自动化。

由于快速的发展和需求的提升,出现了众多与动力学性能相关的问题和研究课题,研究的不断深入和对轮轨系统的进一步了解,使得轮轨系统的潜力被不断的挖掘,随之也产生了更复杂的问题。不仅涉及到与轮轨基本单元有关的问题,如轮轨接触疲劳、波浪型磨耗、轮轨噪声、高速脱轨、轮周不均匀磨耗等等;还涉及到与转向架有关的问题,如转向架的稳定性与导向性在参数设计上的矛盾、转向架轻量化与结构疲劳;在列车层面,有列车的空气动力学问题、列车与线路和桥梁的相互作用问题、列车弓网问题等。因此车辆动力学的研究需要不断深入,并与多学科进行联合研究。

第二节 车辆动力学的研究概况

车辆动力学主要研究运动中的车辆自身以及与其相接触的系统之间相互动态作用的问题,涉及到车辆运行的安全条件、保证车辆稳定和平稳运行的系统设计措施、列车内部车辆间的纵向动态作用、与轨道的相互动力作用、与桥梁的相互动力作用、与隧道的相互动力作用、与空气场的相互动态作用、与弓网系统的动力作用等。主要的理论研究方法是针对问题进行分层别类的系统建模和分析。按研究的问题分,有轮轨关系研究、稳定性问题研究、对轨道的随机和瞬态响应研究、通过曲线轨道的动态响应研究、车—线—桥的相互作用研究、弓网相互作用研究等。其中轮轨关系研究是轨道车辆动力学研究的核心,涉及轮轨几何型面问题、轮轨接触疲劳问题、轮轨润滑与磨损问题、轮轨黏着问题等。随着车辆速度的不断提高和轴重的不断增加,轮轨关系方面的问题日益突出。

仿真分析是车辆动力学研究的最有效手段,包括数值计算仿真、半实物仿真和实验仿真。通过仿真分析获得对系统机理的了解,获得较优化的设计参数,获得安全的边界条件,预知车辆的动力学性能,获得与其他系统之间的作用程度。

轮对与钢轨作为一个力元,必须对存在于轮轨作用面的所有力和导致这些力产生的所有因素有一个完整的了解,才能够建立合理的数学模型,获得较精确的结果。始于 1882 年的 Hertz 接触理论的出现,给今后轮轨滚动接触的研究奠定了基础。1926 年 Carter 首先研究了轮轨接触问题,提出了假定轮轨是两个圆柱体接触的二维理论,接触斑是矩形。1958 年 Johnson 将 Carter 的二维接触理论延伸到两个球体的三维接触理论,计及了横向和纵向蠕滑率,但没有计及回转蠕滑率。1964 年 Vermeulen 和 Johnson 拓展了该理论,应用于无回转蠕滑下的具有纯蠕滑的任意光滑的半空间体。自 1967 年起至 1988 和 1990 年间,J. J. Kalker 发展了一系列处理黏弹性滚动接触的方法和理论,体现在被广泛应用的程序 CONTACT 中,能够处理任意蠕滑率(包括回转蠕滑)条件下的三维滚动摩擦问题,接触斑可以是任意的平面形状,程序基于 Boussinesq-Cerruti 影响因子的边界有限元算法,整个接触斑内的蠕滑率假定是常数。1989 年 Gross-Thebing 提出了三维滚动体在小蠕滑下的线性理论,该理论是时间的调和函数。1998 年 Nielsen 研究了近似一致滚动体的二维问题,接触斑可以是多个条状,考虑了粗糙的波磨、随速度而变的摩擦系数和非稳态的二维接触。这些研究为轮轨的接触蠕滑理论、轮轨间的稳态作用力的合理描述奠定了基础。

在低频域(小于 80 Hz)轨道车辆的振动机械结构属于离散的刚体—弹簧—阻尼系统,自由度不多,因此其动力学方程的建立相对容易,线性化处理后的频域计算也相对容易。

70年代后期各国研究者对具有轮轨的车辆系统进行了系统研究,包括蛇行运动稳定性、随机响应的预测、曲线的瞬态通过模拟、轮轨冲击响应等等,已能够对车辆的设计优化提供技术指导。80年代后期随着计算机技术的迅速发展,多刚体建模理论及相关软件的应用,动力学研究成果已对高速车辆与重载车辆的研发、列车与大系统的相互作用研究起到了关键作用。随着列车速度的不断提高,因列车与轨道、列车与弓网、列车与桥隧、列车与空气的耦合振动带来的问题日益突出,研究方向也向综合、更高频领域拓展,出现了车—桥耦合动力学、弓网耦合动力学、刚柔耦合动力学、长大列车纵向动力学、列车空气空气动力学、车辆噪声与控制技术等子方向。

对车辆运行品质的更高要求使得车辆设计也引入了现代控制技术。自80年代起各国学者开始了主动控制技术的研究,主要用于车辆的倾摆控制、车辆的运行平稳性控制和车辆的导向控制及稳定性控制等,出现了全主动、半主动等控制技术。在控制方法上也有大量的研究,摆式列车已成为高速列车的成员之一。

动力学的研究离不开试验验证。早期由于缺乏技术手段,重要的动力学研究主要依靠试验,有实验室试验和线路试验两种。具有代表性的是各国铁路不同程度地建立了滚动试验台,用于模拟车辆在线路上的运行,测试蛇行失稳速度、外加激扰下的振动水平等。虽然不如实际线路试验真实,但为研究带来了方便。大量的验证性试验为计算机模型的改进和完善奠定了基础,使人们能够有足够的信心在计算机上开展试验,获得大量不可能从条件受限的线路试验中获得的信息,尤其是振动系统的内部信息,使仿真计算成为在确定方案和参数选优过程中必不可少的环节。动力学试验也逐步向产品的最终验收和评判方向发展,各国铁路制定了多个与动力学有关的试验标准和评定标准,如EN 12299:2009(Railway applications-Ride comfort for passengers-Measurement and evaluation)、EN 14363:2005(Railway applications-Testing for the acceptance of running characteristics of railway vehicles-Testing of running behaviour and stationary tests)、UIC 513(Guidelines for evaluating passenger comfort in relation to vibration in railway vehicles)、BOStrab(German Federal Regulations on the construction and operation of light rail transit systems)等。这些标准的制定和不断完善无不与动力学的研究成果相关,也促进了动力学计算评估的标准化。

复习思考题

1. 铰接式列车与传统列车的区别和优缺点是什么?
2. 轮轨接触理论经过哪些演化和完善?
3. 现行的与机车车辆有关的标准有哪些?

研讨思考题

1. 轨道列车是否还有更科学的机械构成?
2. 现有轨道车辆动力学的研究手段主要可以解决哪些问题?试探讨还有哪些新方法和手段使动力学研究成果更趋向工程化应用。
3. 仿真作为一个重要手段,如何进行验证?

参考文献

- [1] 赵洪伦. 轨道车辆结构与设计. 北京:中国铁道出版社,2009:1-173.
- [2] 胡用生. 现代轨道车辆动力学. 北京:中国铁道出版社,2009:1-19.
- [3] 康熊. 铁路计算机仿真技术. 北京:中国铁道出版社,2010.
- [4] 翟婉明. 车辆—轨道耦合动力学. 3版. 北京:科学出版社出版,2007.
- [5] 严隽毫,傅茂海. 车辆工程. 3版. 北京:中国铁道出版社,2009:5-213.
- [6] Simon Iwnicki. Handbook of railway vehicle dynamics. Boca Raton ; CRC/Taylor & Francis, 2006:5-39.

第二章 动力学分析基础

车辆动力学研究一般采用试验研究和计算机数值分析相结合的方法。而计算机数值分析方法虽有便捷和低成本的特点,但需要建立较完善能正确反映所研究对象的数学模型,并需要寻求或研究相应的计算方法。以下将目前常用的一些分析方法给予简要介绍,通过最小规模的模型来说明这些计算方法及其关键指标的物理意义。

第一节 简单模型分析

一、单自由度振动系统

1. 自由振动

单自由度系统的自由振动典型模型如图 2-1 所示。

应用牛顿定律,可列出系统的运动方程如式(2-1):

$$m\ddot{z} + c\dot{z} + kz = 0 \quad (2-1)$$

设: $2n = \frac{c}{m}$, $\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}}$, 式(2-1)变换为式(2-2):

$$\ddot{z} + 2n\dot{z} + \omega_n^2 z = 0 \quad (2-2)$$

设方程的解如式(2-3):

$$z(t) = Ae^{\lambda t} \quad (2-3)$$

λ 为系统的特征值,代入式(2-2)可得振动的特征方程如式(2-4):

$$\lambda^2 + 2n\lambda + \omega_n^2 = 0 \quad (2-4)$$

方程式(2-4)的根为:

$$\lambda_{1,2} = -n \pm \sqrt{n^2 - \omega_n^2}$$

根据不同阻尼状态可分为如下两种:

(1) 无阻尼时, $c=0$, 则: $\lambda_{1,2} = \pm i\sqrt{\omega_n^2 - \omega_n^2} = \pm i\omega_n$, 表示特征值是虚数, ω_n 为无阻尼单自由度系统自振的圆频率。解为谐波 $z = A\sin(\omega_n t + \varphi)$, 其中 A, φ 由振动系统的初始状态决定。

(2) 有阻尼时, $c > 0$, 则:

1) 当 $n^2 - \omega_n^2 > 0$ 时, 阻尼值过大, $\lambda_{1,2}$ 为负实数, 则 z 为非周期性的指数衰减运动。

2) 当 $n^2 - \omega_n^2 = 0$ 时, $\lambda_{1,2} = -n$, 为临界阻尼状态, z 为临界的指数衰减运动, 此时阻尼为临界阻尼 $c_{cr} = 2\sqrt{mk}$ 。

3) 当 $n^2 - \omega_n^2 < 0$ 时, $\lambda_{1,2} = -n \pm i\sqrt{\omega_n^2 - n^2} = -n \pm i\omega_d$, 特征根是共轭复数。 $\omega_d = \sqrt{\omega_n^2 - n^2} = \omega_n\sqrt{1 - \xi^2}$, ω_d 表示有阻尼下的自由振动圆频率。由 $e^{\lambda_1 t}$ 与 $e^{\lambda_2 t}$ 组合表示有阻尼

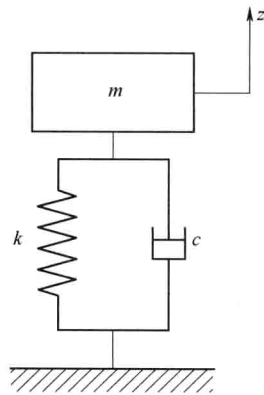


图 2-1 单自由度系统自由振动模型

下的自由振动将以 $Ae^{-nt} \sin(\omega_d t + \varphi)$ 作衰减运动。阻尼系数 c 与临界阻尼 c_{cr} 之比称作相对

阻尼比 ξ ，表示阻尼对系统作用的相对大小， $\xi = \frac{c}{2\sqrt{mk}} = \frac{c}{2m} \sqrt{\frac{m}{k}} = \frac{n}{\omega_n}$ 。

不同阻尼参数值的振动波形如图 2-2 所示。

2. 强迫振动

单自由度系统强迫振动(基础运动引起)模型如图 2-3 所示。

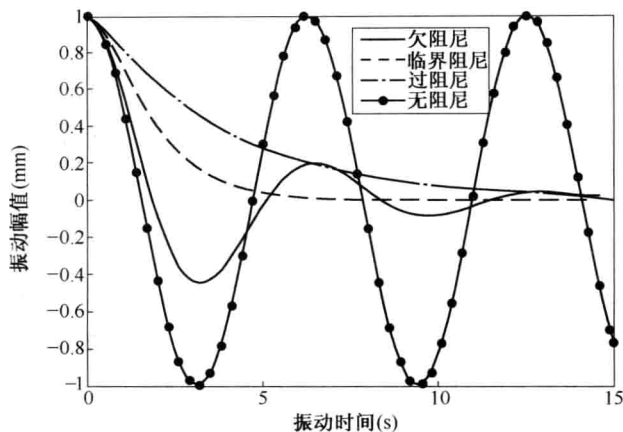


图 2-2 不同情况下的振动波形

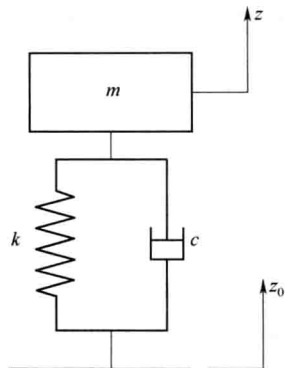


图 2-3 单自由度系统强迫振动模型

运用牛顿定律,可以列出系统的运动方程如式(2-5):

$$m\ddot{z} + c\dot{z} + kz = c\dot{z}_0 + kz_0 \quad (2-5)$$

利用复指数法求解,令 $z_0 e^{i\omega t}$ 代换 $z_0 \sin\omega t$, 并假定方程的解如式(2-6):

$$z(t) = \bar{z} e^{i\omega t} \quad (2-6)$$

代入式(2-5)得式(2-7):

$$\bar{z} = \frac{k + i\omega c}{k - \omega^2 m + i\omega c} z_0 = z e^{-i\phi} \quad (2-7)$$

式中, z 为振幅, ϕ 为响应与激励之间的相位差, 计算如式(2-8)、式(2-9):

$$z = z_0 \sqrt{\frac{1 + (2\xi r)^2}{(1 - r^2)^2 + (2\xi r)^2}} \quad (2-8)$$

$$\tan\phi = \frac{2\xi r^3}{1 - r^2 + 4\xi^2 r^2} \quad (2-9)$$

可见,强迫振动的振幅和相角与初始条件无关,而只决定于构成系统的物理参数和激励力的特点。

方程式(2-5)的稳态响应如式(2-10):

$$z(t) = \bar{z} \sin\omega t = z \sin(\omega t - \varphi) \quad (2-10)$$

表明在简谐激励作用下,系统将产生一个与激励力相同频率的简谐振动。

式(2-8)可表示成 $\frac{z}{z_0} = \sqrt{\frac{1 + (2\xi r)^2}{(1 - r^2)^2 + (2\xi r)^2}}$, 称为放大因子。

二、两自由度振动系统

大于两自由度的多自由度系统的运动方程常以矩阵形式给出,如下所述。