线性代数

LINEAR ALGEBRA

赵逸才　吕荐瑞　陈见生　编著

暨南大學出版社
JINAN UNIVERSITY PRESS

线性代数

LINEAR ALGEBRA

赵逸才　吕荐瑞　陈见生 ◎ 编著

暨南大學出版社
JINAN UNIVERSITY PRESS
中国·广州

图书在版编目（CIP）数据

线性代数／赵逸才，吕荐瑞，陈见生编著．—广州：暨南大学出版社，2014.7
ISBN 978-7-5668-1056-4

Ⅰ.①线…　Ⅱ.①赵…　②吕…　③陈…　Ⅲ.①线性代数—高等学校—教材　Ⅳ.①O151.2

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2014）第 125907 号

出版发行：暨南大学出版社

地　址：中国广州暨南大学
电　话：总编室（8620）85221601
　　　　营销部（8620）85225284　85228291　85228292（邮购）
传　真：（8620）85221583（办公室）　85223774（营销部）
邮　编：510630
网　址：http：//www.jnupress.com　http：//press.jnu.edu.cn

排　版：广州良弓广告有限公司
印　刷：佛山市浩文彩色印刷有限公司

开　本：787mm×960mm　1/16
印　张：9.75
字　数：205 千
版　次：2014 年 7 月第 1 版
印　次：2014 年 7 月第 1 次
印　数：1—2000 册

定　价：25.00 元

本书由国务院侨务办公室立项

彭磷基外招生人才培养改革基金资助

前 言

暨南大学的本科生中, 有相当大比例为华侨学生. 为切合这部分学生的实际情况, 亟须一本针对他们编写的《线性代数》教材.

本书包含了行列式、矩阵、线性方程组、矩阵的特征值和二次型等基本内容. 大部分例子之后包含了相应的练习, 方便学生及时掌握相关内容. 每章之后另设置了各种类型的习题并配有参考答案, 方便学生巩固所学内容.

本书由赵逸才主编, 其中吕荐瑞负责前两章及附录的编写, 陈见生负责后三章的编写, 赵逸才负责全书内容的设计、审核和修改. 在编写过程中我们参考了兄弟院校的一些《线性代数》教材, 在此一并致谢. 由于我们水平有限, 书中肯定有一些不足之处, 欢迎读者批评指正.

编 者

2014 年 4 月

目 录

第一章 行列式

行列式的概念来源于线性方程组的求解问题, 17 世纪末由日本数学家关孝和及德国数学家莱布尼茨引入.

§1 二阶和三阶行列式

一、二阶行列式

我们先来看看下面的二元线性方程组:

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y = b_1 \\ a_{21}x + a_{22}y = b_2 \end{cases},$$

利用消元法, 我们可以求得它的解为:

$$\begin{cases} x = \dfrac{b_1a_{22} - a_{12}b_2}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}} \\ y = \dfrac{a_{11}b_2 - b_1a_{21}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}} \end{cases}.$$

可以看到, 在方程组的解中, x 和 y 的分母是一样的. 如果我们定义**二阶行列式**为:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21},$$

则方程的解可以简单地表示为:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}} = \frac{D_1}{D}, \qquad y = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}} = \frac{D_2}{D}.$$

可以看到, 使用二阶行列式的记号之后, 二元线性方程组的解可以很简洁地表示出来.

接下来看如何计算二阶行列式的值. 从前面的定义可以看出, 计算二阶行列式时, 只需要计算主对角线两个元素 a_{11} 和 a_{22} 的乘积, 然后减去副对角线两个元素 a_{12} 和 a_{21} 的乘积.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

例 1 求下列二阶行列式的值.

(1) $\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 4 & -1 \end{vmatrix} = 3 \cdot (-1) - 2 \cdot 4 = -11;$

(2) $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 1 \cdot 4 - 2 \cdot 3 = -2.$

练习 1 求下列二阶行列式的值.

(1) $\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 6 \end{vmatrix}$; (2) $\begin{vmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{vmatrix}$.

二、三阶行列式

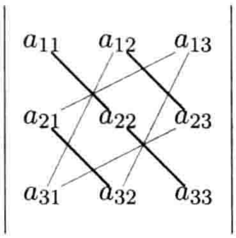
同样地, 为了更简洁地表示下面的三元线性方程组的解

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z = b_1 \\ a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z = b_2 \\ a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z = b_3 \end{cases},$$

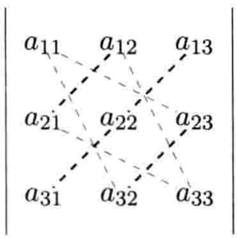
我们可以类似地定义**三阶行列式**如下（本章后面会有更详细的叙述）:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{array}{l} a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32} \\ -a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{13}a_{22}a_{31}. \end{array}$$

下面的示意图说明了三阶行列式中, 取正号的三项与取负号的三项分别是如何选取的.



$$+a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}$$



$$-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{13}a_{22}a_{31}$$

例 2　求下列三阶行列式的值.

(1) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 8 & 0 & 4 \\ 7 & 6 & 5 \end{vmatrix} = 1\cdot0\cdot5+8\cdot6\cdot3+7\cdot2\cdot4-3\cdot0\cdot7-4\cdot6\cdot1-5\cdot2\cdot8=96;$

(2) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ 2 & 7 & 8 \end{vmatrix} = 1\cdot1\cdot8+0\cdot7\cdot0+2\cdot3\cdot2-2\cdot1\cdot0-0\cdot2\cdot8-7\cdot3\cdot1=-1.$

练习 2　求下列三阶行列式的值.

(1) $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & 0 \\ 4 & 7 & 9 \end{vmatrix}$;　(2) $\begin{vmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 5 \\ 4 & -1 & 0 \end{vmatrix}$;　(3) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix}$.

注 1　对于行列式, 零越多计算越简单, 越有规律越简单.

✂ ✂ ✂ ✂ ✂ ✂ ✂ ✂ ✂ ✂ ✂ ✂ ✂ ✂ ✂ ✂ ✂ ✂ ✂

1.2

§2 行列式的性质

我们已经知道二阶和三阶行列式的定义. 那么, 四阶行列式又如何定义呢? 一般地, n 阶行列式又应该如何定义呢?

在此节, 我们先研究二阶和三阶行列式的一些基本性质. 然后, 由这些性质给出 n 阶行列式的一个简单定义, 并介绍如何计算高阶行列式.

一、行列式的基本性质

行列式中从左上角到右下角的对角线, 称为**主对角线**; 从右上角到左下角的对角线, 称为**副对角线**.

主对角线上元素均为 1 而其他元素都为 0 的行列式, 称为**单位行列式**. 即, 对于二阶行列式, 单位行列式为 $\begin{vmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{vmatrix}$; 对于三阶行列式, 单位行列式为

$$\begin{vmatrix}1 & 0 & 0\\0 & 1 & 0\\0 & 0 & 1\end{vmatrix}.$$

现在我们来看看二阶行列式和三阶行列式有哪些共同的基本性质. 我们只证明三阶行列式的情形, 而二阶行列式的情形比较简单, 留给读者自己验证.

性质 1 (规范性) 单位行列式的值为 1.

证明 根据三阶行列式的定义, 可以得到

$$\begin{vmatrix}1 & 0 & 0\\0 & 1 & 0\\0 & 0 & 1\end{vmatrix} = \begin{matrix}1\cdot1\cdot1+0\cdot0\cdot0+0\cdot0\cdot0\\-1\cdot0\cdot0-0\cdot0\cdot1-0\cdot1\cdot0\end{matrix} = 1.$$

性质 2 (反称性) 行列式交换两行（列）后, 它的值变号.

证明 我们只验证交换第 1 行和第 2 行的情形:

$$D = \begin{vmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\a_{21} & a_{22} & a_{23}\\a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{vmatrix} = \begin{matrix}a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}\\-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{13}a_{22}a_{31},\end{matrix}$$

$$D' = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{array}{l} a_{21}a_{12}a_{33} + a_{22}a_{13}a_{31} + a_{23}a_{11}a_{32} \\ -a_{21}a_{13}a_{32} - a_{22}a_{11}a_{33} - a_{23}a_{12}a_{31}, \end{array}$$

逐项比较符号可以看到, $D' = -D$.

例如, $D = \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = 7$, 则交换该行列式两行后得到 $D' = \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} = -7$.

性质 3 (数乘性)　行列式某行（列）每个元素都乘以 k 倍后, 它的值变为原来的 k 倍.

证明　我们只验证第 2 列乘以 k 倍的情形:

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{array}{l} a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} \\ -a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31}, \end{array}$$

$$D' = \begin{vmatrix} a_{11} & ka_{12} & a_{13} \\ a_{21} & ka_{22} & a_{23} \\ a_{31} & ka_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{array}{l} a_{11}ka_{22}a_{33} + ka_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}ka_{32} \\ -a_{11}a_{23}ka_{32} - ka_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}ka_{22}a_{31}, \end{array}$$

因此, $D' = kD$.

例如, $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 0 & 5 & 4 \\ 1 & 6 & 3 \end{vmatrix} = -28$, 则 $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 3k \\ 0 & 5 & 4k \\ 1 & 6 & 3k \end{vmatrix} = -28k$.

性质 4 (可加性)　若行列式 D_1 和 D_2 在某行（列）之外的其他元素都相同, 则两者之和等于另一个行列式 D. 其中 D 在该行（列）的元素等于 D_1 和 D_2 对应元素之和, 其他位置的元素与 D_1 和 D_2 相同.

证明　我们只验证仅在第 1 列不相同的情形. 此时

$$D_1=\begin{vmatrix} b_{11} & a_{12} & a_{13}\\ b_{21} & a_{22} & a_{23}\\ b_{31} & a_{32} & a_{33}\end{vmatrix}=\begin{matrix} b_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}b_{31}+a_{13}b_{21}a_{32}\\ -b_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}b_{21}a_{33}-a_{13}a_{22}b_{31},\end{matrix}$$

$$D_2=\begin{vmatrix} c_{11} & a_{12} & a_{13}\\ c_{21} & a_{22} & a_{23}\\ c_{31} & a_{32} & a_{33}\end{vmatrix}=\begin{matrix} c_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}c_{31}+a_{13}c_{21}a_{32}\\ -c_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}c_{21}a_{33}-a_{13}a_{22}c_{31},\end{matrix}$$

$$D=\begin{vmatrix} b_{11}+c_{11} & a_{12} & a_{13}\\ b_{21}+c_{21} & a_{22} & a_{23}\\ b_{31}+c_{31} & a_{32} & a_{33}\end{vmatrix}$$

$$=\begin{matrix} (b_{11}+c_{11})a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}(b_{31}+c_{31})+a_{13}(b_{21}+c_{21})a_{32}\\ -(b_{11}+c_{11})a_{23}a_{32}-a_{12}(b_{21}+c_{21})a_{33}-a_{13}a_{22}(b_{31}+c_{31}).\end{matrix}$$

逐项验证可以得到 $D_1+D_2=D$.

例如:

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 & 5\\ \mathbf{7} & \mathbf{9} & \mathbf{5}\\ 1 & -1 & 3\end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 2 & 0 & 5\\ \mathbf{3} & \mathbf{2} & \mathbf{4}\\ 1 & -1 & 3\end{vmatrix}+\begin{vmatrix} 2 & 0 & 5\\ \mathbf{4} & \mathbf{7} & \mathbf{1}\\ 1 & -1 & 3\end{vmatrix}$$

事实上, 上述四个基本性质, 已经足以完整地刻画行列式的特征. 从这些性质出发, 我们还可以得到更多的性质.

性质 5 若行列式其中某行（列）所有元素都为零, 则它的值为零.

证明 不妨设行列式 D 某行所有元素都为零, 则将该行每个元素都乘以 2 倍后行列式保持不变. 但由性质 3 知, 此时行列式的值应变为 $2D$. 因此有 $D=2D$, 即 $D=0$.

例如, $\begin{vmatrix} 2 & 0 & 5\\ 7 & 0 & 9\\ 1 & 0 & 3\end{vmatrix}=0.$

性质 6 若行列式其中两行（列）对应元素相同, 则它的值为零.

证明　假设行列式 D 某两行（列）相同, 则交换 D 的这两行（列）后行列式的值仍为 D. 但是由性质 2 我们又知道结果等于 $-D$. 从而 $D=-D$, 即 $D=0$.

例如, $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 7 & 9 & 6 \\ 1 & -1 & 3 \end{vmatrix}=0.$

性质 7　若行列式其中两行（列）对应元素成比例, 则它的值为零.

证明　由性质 3 和性质 6 即可得出结论.

例如, $\begin{vmatrix} 2 & 0 & 6 \\ 7 & 9 & 21 \\ 1 & -1 & 3 \end{vmatrix}=0.$

性质 8　行列式的某行（列）的所有元素都乘以 k 倍后加到另一行（列）对应位置的元素上, 它的值不变.

证明　我们只验证第 3 行乘以 k 倍加到第 2 行的情形. 由性质 4 和性质 7, 可以得到

$$D'=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21}+ka_{31} & a_{22}+ka_{32} & a_{23}+ka_{33} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ ka_{31} & ka_{32} & ka_{33} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}+0=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=D.$$

即行列式的值保持不变.

前面我们已经发现三阶行列式 $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix}=0$, 这并不是巧合, 而是由行

列式的性质决定的.

现在我们可以来看看, 为何这个有规律的行列式的值为零.

解 第 2 行乘以 -1 加到第 3 行, 然后第 1 行乘以 -1 加到第 2 行. 再利用前面的性质, 就可以得到:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 3 & 3 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \end{vmatrix} = 0.$$

在利用行列式的性质计算行列式的值时, 有如下两种类似的说法:

(1) 行列式第 1 行乘以 -1 倍加到第 2 行（这种是标准的说法, 拗口但没有任何混淆）.

(2) 行列式第 2 行减去第 1 行（这种是非正式的说法, 简单但需要注意相减的结果放在哪行）.

以后, 我们用记号 $r_i \times k$ 表示第 i 行乘以 k, 用记号 $r_i \leftrightarrow r_j$ 表示交换第 i 行和第 j 行, 而用记号 $r_i + kr_j$ 表示第 i 行加上第 j 行的 k 倍.

类似地, 我们用记号 $c_i \times k$ 表示第 i 列乘以 k, 用记号 $c_i \leftrightarrow c_j$ 表示交换第 i 列和第 j 列, 而用记号 $c_i + kc_j$ 表示第 i 列加上第 j 列的 k 倍.

例如:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} \overset{r_3 - r_2}{=\!=\!=} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 3 & 3 & 3 \end{vmatrix} \overset{c_1 \leftrightarrow c_2}{=\!=\!=} - \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 5 & 4 & 6 \\ 3 & 3 & 3 \end{vmatrix}$$

二、行列式的简单定义

在前面已经介绍, 二元线性方程组和三元线性方程组的解可以分别用二阶行列式和三阶行列式表示. 类似地, 我们相信, 四元线性方程组的解应该可以用“四阶行列式”来表示, 而 n 元线性方程组的解应该可以用“n 阶行列式”来表示.

定义一般的 n 阶行列式并不是一件简单的事情. 但是, 在大多数情况下, 计算行列式的值仅仅需要用到行列式的性质. 因此, 在此节我们利用行列式的基本性质给出 n 阶行列式的简单定义.

定义 1　由 n 行 n 列共 n^2 个元素 a_{ij} $(i,j=1,\cdots,n)$ 组成的, 满足前面所述的性质 1 至性质 4 的表达式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

称为 ***n* 阶行列式**.

注 1　因为性质 5 至性质 8 都是由性质 1 至性质 4 推出的, 所以 n 阶行列式自然也满足后面这几个性质.

按照性质 1, n 阶**单位行列式**的值同样为 1. 即

$$\begin{vmatrix} 1 & & & & \\ & 1 & & \text{\huge 0} & \\ & & 1 & & \\ & \text{\huge 0} & & \ddots & \\ & & & & 1 \end{vmatrix} = 1.$$

主对角线之外都为零的行列式称为**对角行列式**. 由性质 3, 它的值为:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & & & & \\ & a_{22} & & \text{\huge 0} & \\ & & a_{33} & & \\ & \text{\huge 0} & & \ddots & \\ & & & & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$$

例 1　计算四阶行列式 $D=\begin{vmatrix} 3 & 9 & 7 & -2 \\ 0 & -1 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{vmatrix}$.

解　利用行列式的性质 8, 我们可以逐步将这个行列式变换为对角行列式:

1.2

$$D \xlongequal{r_3-2r_4} \begin{vmatrix} 3 & 9 & 7 & -2 \\ 0 & -1 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} \xlongequal{r_2-3r_4} \begin{vmatrix} 3 & 9 & 7 & -2 \\ 0 & -1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} \xlongequal{r_1+r_4} \begin{vmatrix} 3 & 9 & 7 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{r_2-3r_3} \begin{vmatrix} 3 & 9 & 7 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} \xlongequal{r_1-7r_3} \begin{vmatrix} 3 & 9 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{r_1+9r_2} \begin{vmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 3 \cdot (-1) \cdot 1 \cdot 2 = -6.$$

例 2 计算四阶行列式 $D = \begin{vmatrix} 3 & 9 & 7 & -2 \\ 0 & 0 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{vmatrix}$.

解 注意这个行列式是将上一个例子中 a_{22} 元素改为零得到的. 此时, 和前面的方法类似, 我们可以逐步将这个行列式第 2 行所有元素都变为零:

$$D \xlongequal[r_3-2r_4]{r_2-3r_4} \begin{vmatrix} 3 & 9 & 7 & -2 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} \xlongequal{r_2-3r_3} \begin{vmatrix} 3 & 9 & 7 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 0.$$

其中, 由性质 5 可知, 若行列式其中某行所有元素都为零, 则它的值为零.

主对角线下面都为零的行列式称为**上三角行列式**, 而主对角线上面都为零的行列式称为**下三角行列式**, 两者合称为**三角行列式**. 三角行列式的值和相应的对角行列式的值相同: