高等学校教材

线性代数

◆ 主　编　原永久　高　洁
◆ 副主编　唐春艳　郭夕敬

高等教育出版社

高等学校教材

线性代数

Xianxing Daishu

主　编　原永久　高　洁
副主编　唐春艳　郭夕敬

高等教育出版社·北京

内容提要

本书依据最新制定的“工科类、经济管理类本科数学基础课程教学基本要求”，以及教育部最新颁布的“全国硕士研究生入学统一考试数学考试大纲”中有关线性代数部分的内容编写而成。

全书共分六章，内容包括行列式、矩阵、向量空间、线性方程组、方阵的特征值与特征向量、实对称矩阵与二次型。各章节均配有典型例题和习题，书后附有习题参考答案与提示。本书内容系统，体系完整，结构清晰，可读性强，无论是概念的引入，还是定理的证明与应用，都力争做到“浅入”而“深出”，便于学生自学。各章(除最后一节外)均符合教学基本要求，可供学时数较少或对线性代数要求不高的专业选用，而各章最后一节的“定理补充证明与补充例题”则可供对数学要求较高的专业或考研的学生选用。

本书适合普通高等学校本科非数学类专业学生使用，也可供考研学生及科技工作者参考。

图书在版编目(CIP)数据

线性代数/原永久，高洁主编．--北京：高等教育出版社，2014.8

ISBN 978-7-04-039990-5

Ⅰ.①线… Ⅱ.①原… ②高… Ⅲ.①线性代数-高等学校-教材 Ⅳ.①O151.2

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2014)第 161349 号

策划编辑 张彦云　责任编辑 张彦云　封面设计 李卫青　版式设计 于 婕
插图绘制 杜晓丹　责任校对 刘娟娟　责任印制 赵义民

出版发行 高等教育出版社
社　　址 北京市西城区德外大街 4 号
邮政编码 100120
印　　刷 北京泽明印刷有限责任公司
开　　本 787mm×960mm 1/16
印　　张 10.5
字　　数 190 千字
购书热线 010-58581118
咨询电话 400-810-0598
网　　址 http://www.hep.edu.cn
　　　　 http://www.hep.com.cn
网上订购 http://www.landraco.com
　　　　 http://www.landraco.com.cn
版　　次 2014 年 8 月第 1 版
印　　次 2014 年 8 月第 1 次印刷
定　　价 16.00 元

物 料 号 39990-00

前　　言

随着我国高等教育从“精英教育”走向“大众化教育”阶段，以培养高级应用型、技术型人才为主要目标的独立学院是此新形势下高等教育办学机制与模式的一个探索与创新。目前，我国有近三百所独立学院，一方面有更多的青年人可以获得高等教育的机会，另一方面独立学院的教学也出现了一些值得关注的新情况和新问题。

大学数学基础课程是许多后续专业课程的基础，其重要性是不言而喻的。然而在独立学院，部分学生由于缺乏学习数学的兴趣或数学基础薄弱，在学习大学数学课程的过程中遇到了较大的困难。为了真正解决这一问题，我们认为，必须从现实出发，编写适用于独立学院使用的大学数学教材，更好地体现独立学院的培养目标与特色。根据教育部大学数学课程教学指导委员会制定的教学基本要求，并结合独立学院学生的现状和专业要求，我们编写了这套教材，包括《高等数学》(上、下册)、《线性代数》、《概率论与数理统计》，并将为以上教材配备相应的习题册与试题库以及教学课件。

线性代数课程是高等数学的一个重要分支。高等数学之“高等”，决不仅“高等”于内容上。就其思想方法而言也与初等数学有着很大的区别。顺利完成由初等数学到高等数学的过渡，同时实现由“形象思维”到“抽象思维”的转变对于大学生具有特别重要的意义，也是本课程的任务之一。除了介绍知识之外，取材时我们还充分考虑了学生学习后续课程的需要，希望在后续学习与严谨思维方式的培养等方面对学生有所帮助。

本教材涵盖了线性代数的经典内容，这也是对教学内容的基本要求。内容是经典的，但这绝不意味着处理方法也必须是经典的。为了帮助学生完成从初等数学到高等数学的过渡，与传统教材相比，无论是概念的引入，还是定理的证明与应用，我们都不惜花费相当的篇幅与学生所习惯的思维方式衔接，力争做到“浅入”而“深出”。另外本教材的深度与广度都达到了“全国硕士研究生入学统一考试数学考试大纲”的要求，精选的每章习题也包含了相当数量的历届考研试题，因而把本教材用于考研资料也是适宜的。学习过程中，我们建议学生对以下几点给予关注：

(1) 行列式是有力工具，在各章常会看到它的应用；

(2) 矩阵理论是核心内容；

(3) 秩数与向量的线性关系是难点;

(4) 最简阶梯形矩阵是一条无形的主线,它连接着许多重要的概念与结论,同时也提供了解决相关问题的途径;

(5) 线性方程组问题和二次型理论是矩阵应用的成功范例。

注意并认真品味以上各点的含义,必会对学习大有所益。

谨以此书纪念我们永远的良师益友——原永久老师。

限于编者水平,书中定有不少缺点,敬请读者指正。

编 者

2014年5月10日于珠海观音山下

目　　录

第一章　行　列　式

行列式这一概念最初产生于 17 世纪后半叶对线性方程组的研究，其确切定义及符号是由 Cauchy（柯西）于 1841 年给出的，其理论完善于 19 世纪．行列式作为重要的工具在数学各分支乃至自然科学及众多的工程技术领域都有着广泛的应用．本章主要介绍 n 阶行列式的定义、性质及计算方法．

§1　n 阶行列式的定义

首先考虑二元一次方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 \end{cases}$$

这里每个系数都缀上了下标，是为了表达清楚、讨论方便之故．将前一个方程乘 a_{22}，后一个方程乘 a_{12}，然后相减得

$$(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x_1 = b_1a_{22} - b_2a_{12}$$

同理可得

$$(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x_2 = b_2a_{11} - b_1a_{21}$$

显然，如果 $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0$，则可得方程组的解为

$$x_1 = \frac{b_1a_{22} - b_2a_{12}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}, x_2 = \frac{b_2a_{11} - b_1a_{21}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}$$

现在，引入记号

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

并且称其为**二阶行列式**，由二阶行列式的定义，上述方程组的解可表为

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}, x_2 = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}$$

类似地，通过考虑三元一次方程组，可引入**三阶行列式**的定义如下：

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}$$

在二、三阶行列式中，由左上角元素至右下角元素的连线称为行列式的**主对角线**；由右上角元素至左下角元素的连线称为行列式的**次对角线**．由定义不难看出：二阶行列式恰为其主对角线两个元素之积减去次对角线两个元素之积．三阶行列式含 6 项，每项均为不同行不同列的三个元素的乘积再冠以正负号，其规律遵循图 1 的**对角线法则**：图中有三条实线看作是平行于主对角线的连线，三条虚线看作是平行于次对角线的连线，实线上三元素的乘积冠正号，虚线上三元素的乘积冠负号.

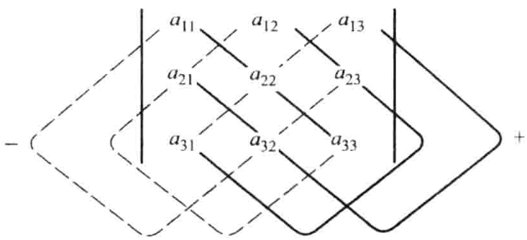

图 1

例 1.1 解二元一次方程组

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 = -3 \\ 3x_1 + 2x_2 = 7 \end{cases}$$

解 由于

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 1 \times 2 - (-2) \times 3 = 8 \neq 0$$

则方程组有解．又由于

$$\begin{vmatrix} -3 & -2 \\ 7 & 2 \end{vmatrix} = (-3) \times 2 - (-2) \times 7 = 8$$

$$\begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 3 & 7 \end{vmatrix} = 1 \times 7 - (-3) \times 3 = 16$$

因此方程组的解为

$$x_1 = \frac{8}{8} = 1, x_2 = \frac{16}{8} = 2$$

例 1.2 计算三阶行列式

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \end{vmatrix}$$

解 $D = 1 \times 0 \times 2 + 2 \times 1 \times 1 + 3 \times (-1) \times 3 - 3 \times 0 \times 1 - 2 \times (-1) \times 2 - 1 \times 1 \times 3 = -6$

下面要给出n阶行列式的定义,为此,再考察一下二、三阶行列式. 为方便起见,横排称为**行**,竖排称为**列**. 在二阶行列式中,每一项都是两个既不同行又不同列的元素之积,且恰好包含全部2!个这样的项. 类似地,在三阶行列式中,每一项也都是三个既不同行又不同列的元素之积,也恰好包含全部3!个这样的项.

一般地,n阶行列式记为

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

它是由n^2个数$a_{ij}(i,j = 1,2,\cdots,n)$排成的并在两侧框以竖线的正方形数表,记为$D$. 类似于二、三阶行列式,其横排自上而下依次称为第一行,第二行,…,第n行;其竖排由左至右依次称为第一列,第二列,…,第n列. $a_{ij}(i,j = 1,2,\cdots,n)$称为行列式$D$的第$i$行第$j$列**元素**,$i,j$依次称为元素$a_{ij}$的**行标与列标**. 由二、三阶行列式的定义可以想象到,D的展开式中的一般项也应是n个既不同行又不同列的元素的乘积,并且恰好包含全部$n!$个这样的项. 问题是如何确定每一项的符号. 当$n \geqslant 4$时,前面的对角线法则显然已不再适用,为此先引入n阶排列这一概念.

由$1,2,\cdots,n$这n个数排成的有序数组称为一个n**阶排列**. 例如213,15243分别是3阶排列和5阶排列.

在一个n阶排列中,如果较大的数j排在较小的数i的前面,则称i,j二数构成一个**逆序**,记为(j,i). 逆序的总数称为此n阶排列的**逆序数**. 例如,5阶排列15243就有$(5,2)$,$(5,4)$$(5,3)$,$(4,3)$4个逆序,故5阶排列15243的逆序数为4,记为$\tau(15243) = 4$. 一般地,$n$阶排列$p_1,p_2,\cdots,p_n$的逆序数记为$\tau(p_1,p_2,\cdots,p_n)$. 计算一个$n$阶排列的逆序数时,为避免重复计算或遗漏某个逆序,最好按某种次序去进行计算. 此外,我们把逆序数为偶数的n阶排列称为**偶排列**;逆序数为奇数的n阶排列称为**奇排列**. 按此定义,上面的213与15243便分别是奇排列和偶排列.

下面给出n阶行列式的定义.

定义 1.1

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=\sum(-1)^t a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots a_{np_n}$$

其中 $t=\tau(p_1,p_2,\cdots,p_n)$，求和指对所有的 n 阶排列 $p_1,p_2,\cdots,p_n$ 求和，其值称为行列式 D 的**值**.

按此定义易知：

(1) D 是一个代数和；

(2) 和中的每一项都是 n 个取自 D 的既不同行又不同列的元素的乘积，这样的项共 $n!$ 个，D 恰好是这 $n!$ 个项的代数和；

(3) 项 $a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots a_{np_n}$ 的符号为 $(-1)^{\tau(p_1,p_2,\cdots,p_n)}$，即在行标排列成自然顺序时，若列标排列 $p_1p_2\cdots p_n$ 为偶排列，则此项取正号，而当 $p_1p_2\cdots p_n$ 为奇排列时此项取负号.

定义中的 n 阶行列式通常简记为 $\det(a_{ij})$.

容易验证，当 $n=2,3$ 时，定义 1.1 也适用于前面的二、三阶行列式.

至于一阶行列式 $|a|$，按定义显然有 $|a|=a$.

在 n 阶行列式中，与二、三阶行列式一样，由左上角元素至右下角元素的连线称为行列式的**主对角线**，由右上角元素至左下角元素的连线称为行列式的**次对角线**.

例 1.3　证明

$$D_n=\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$$

证明　因行列式是一个代数和，故在求其值时不必考虑那些值为零的项. 设 $a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots a_{np_n}$ 是行列式中不为零的项，这些因子从左至右依次取自 n 个不同的行. 因 $a_{12},\cdots,a_{1n}$ 全为零，故此项取自第一行的因子只能是 a_{11}，否则此项必为零. 即 $a_{1p_1}=a_{11}$. 再看取自第二行的因子 a_{2p_2}，显然 a_{2p_2} 不能是 a_{21}，因为 a_{21} 与 a_{11} 在同一个列；可是又因为 $a_{23},\cdots,a_{2n}$ 全为零，故 a_{2p_2} 只能是 a_{22}，否则此项必为零. 如此下去即知，除 $a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$ 外，所有的项全为零. 而此项的符号显然为正，因此 $D_n=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$. 证毕.

行列式$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$称为**下三角形行列式**. 类似地,行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

称为**上三角形行列式**. 同理可证其值也为$a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$. 下三角形行列式与上三角形行列式可统称为**三角形行列式**. 它们的值都等于主对角线上的n个元素之积. 三角形行列式的特例是所谓**对角形行列式**

$$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

其值自然也等于主对角线上的 n 个元素之积.

习 题 1.1

1. 已知 $abcdef$ 为标准次序,求 $bcadfe$ 的逆序数.

2. 写出四阶行列式

$$D_4 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}$$

中同时包含 a_{12} 和 a_{31} 的项.

3. 计算下列二、三阶行列式:

(1) $\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 7 \end{vmatrix}$; (2) $\begin{vmatrix} a & b \\ a^2b & ab^2 \end{vmatrix}$;

(3) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix}$; (4) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \end{vmatrix}$;

(5) $\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 3 & 5 & 0 \\ 0 & 4 & 1 \end{vmatrix}$; (6) $\begin{vmatrix} a & b & c \\ b & c & a \\ c & a & b \end{vmatrix}$.

4. 解方程：$\begin{vmatrix} 2 & 1 & x \\ 3 & x & 0 \\ -1 & 0 & x \end{vmatrix} = 0.$

§2 行列式的性质

为了有效地计算一给定行列式的值，本节要讨论行列式的性质.

引理 2.1 互换 n 阶排列中任意二数的位置，则排列的奇偶性变更.

注 引理 2.1 的证明见本章§5.

设

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}, \quad D^{\mathrm{T}} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

称 D^{T} 为 D 的**转置行列式**.

性质 2.1 $D^{\mathrm{T}} = D$.

注 性质 2.1 的证明见本章§5.

由性质 2.1 可知，若某命题对于行列式的行成立，则对于列也同样成立，反之亦然.

性质 2.2 互换行列式的某两行(列)，行列式仅变符号.

注 性质 2.2 的证明见本章§5.

推论 2.1 行列式若有两行(列)相同，则其值为零.

证明 设性质 2.2 证明中 D 的 i,j 两行相同，则由 $D = -D$，$2D = 0$ 即知.

性质 2.3 行列式的某行(列)的各元素乘数 k 等于用数 k 乘行列式.

证明 设

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}, D_1 = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ ka_{i1} & \cdots & ka_{in} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

结论即证 $D_1 = kD$. 而这由行列式的定义便可直接得到

$$\begin{aligned} D_1 &= \sum (-1)^{\tau(p_1\cdots p_i\cdots p_n)} a_{1p_1}\cdots ka_{ip_i}\cdots a_{np_n} \\ &= k\sum (-1)^{\tau(p_1\cdots p_i\cdots p_n)} a_{1p_1}\cdots a_{ip_i}\cdots a_{np_n} \\ &= kD \end{aligned}$$

推论 2.2　行列式的某行(列)各元素的公因子可以提到行列式符号外面.

推论 2.3　若行列式的某两行(列)的对应元素成比例,则行列式的值等于零.

此由推论 2.1 与推论 2.2 即知.

性质 2.4　设

$$D_1=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \alpha_{i1} & \alpha_{i2} & \cdots & \alpha_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}, D_2=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \beta_{i1} & \beta_{i2} & \cdots & \beta_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \alpha_{i1}+\beta_{i1} & \alpha_{i2}+\beta_{i2} & \cdots & \alpha_{in}+\beta_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

则 $D=D_1+D_2$. 这里,三个行列式除第 i 行外的元素完全相同. 对于列也有相应的结论.

证明

$$\begin{aligned} D &= \sum(-1)^{\tau(p_1\cdots p_i\cdots p_n)}a_{1p_1}\cdots(\alpha_{ip_i}+\beta_{ip_i})\cdots a_{np_n} \\ &= \sum(-1)^{\tau(p_1\cdots p_i\cdots p_n)}a_{1p_1}\cdots\alpha_{ip_i}\cdots a_{np_n}+ \\ &\quad \sum(-1)^{\tau(p_1\cdots p_i\cdots p_n)}a_{1p_1}\cdots\beta_{ip_i}\cdots a_{np_n} \\ &= D_1+D_2 \end{aligned}$$

性质 2.5　行列式的某行(列)的各元素乘数 k 加到另一行(列)的对应元素上,行列式的值不变.

此由性质 2.4 与推论 2.3 即知.

一般情况下,行列式的定义不适用于计算行列式. 因为它的展开式太复杂,即使是四阶行列式也含有 $4!=24$ 项,并且每一项都有确定符号的问题. 利用行列式的性质把给定的行列式化为三角形行列式,再利用三角形行列式之值等于主对角线元素之积,这是计算行列式的常用方法.

为行文简便,引入记号:

$r_i\leftrightarrow r_j$ $(c_i\leftrightarrow c_j)$ 表示互换行列式的 i,j 两行(列);

r_i+kr_j (c_i+kc_j) 表示把行列式的第 j 行(列)各元素的 k 倍加到第 i 行(列)的对应元素上;

$r_i \to k(c_i \to k)$ 表示把行列式第 i 行(列)各元素的公因子 k 提到行列式符号外面.

例 2.1 计算下列行列式:

(1) $D = \begin{vmatrix} 101 & 100 & 204 \\ 199 & 200 & 395 \\ 303 & 300 & 600 \end{vmatrix}$; (2) $D = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{vmatrix}$;

(3) $D_n = \begin{vmatrix} x & a & \cdots & a \\ a & x & \cdots & a \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a & a & \cdots & x \end{vmatrix}$;

(4) $D = \begin{vmatrix} a^2 & (a+1)^2 & (a+2)^2 & (a+3)^2 \\ b^2 & (b+1)^2 & (b+2)^2 & (b+3)^2 \\ c^2 & (c+1)^2 & (c+2)^2 & (c+3)^2 \\ d^2 & (d+1)^2 & (d+2)^2 & (d+3)^2 \end{vmatrix}$;

(5) $D_n = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ 1 & 2 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & 3 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & n \end{vmatrix}$.

解 (1)

$$D = \begin{vmatrix} 101 & 100 & 204 \\ 199 & 200 & 395 \\ 303 & 300 & 600 \end{vmatrix} \xlongequal{c_1 - c_2, c_3 - 2c_2} \begin{vmatrix} 1 & 100 & 4 \\ -1 & 200 & -5 \\ 3 & 300 & 0 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{c_2 \to 100} 100 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 4 \\ -1 & 2 & -5 \\ 3 & 3 & 0 \end{vmatrix} \xlongequal{r_2 + r_1, r_3 - 3r_1} 100 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 0 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & -12 \end{vmatrix}$$

$$= 100 \cdot 1 \cdot 3 \cdot (-12) = -3\ 600$$

(2)

$$D = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} \xlongequal{c_1 + c_2 + c_3 + c_4} \begin{vmatrix} 5 & 1 & 1 & 1 \\ 5 & 2 & 1 & 1 \\ 5 & 1 & 2 & 1 \\ 5 & 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} \xlongequal{c_1 \to 5} 5 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{r_2 - r_1, r_3 - r_1, r_4 - r_1} 5\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 5$$

(3)

$$D_n = \begin{vmatrix} x & a & \cdots & a \\ a & x & \cdots & a \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a & a & \cdots & x \end{vmatrix} \xlongequal{c_1 + c_2 + \cdots + c_n} \begin{vmatrix} x+(n-1)a & a & \cdots & a \\ x+(n-1)a & x & \cdots & a \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x+(n-1)a & a & \cdots & x \end{vmatrix}$$

$$= [x+(n-1)a]\begin{vmatrix} 1 & a & \cdots & a \\ 1 & x & \cdots & a \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & a & \cdots & x \end{vmatrix}$$

$$= [x+(n-1)a]\begin{vmatrix} 1 & a & \cdots & a \\ 0 & x-a & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & x-a \end{vmatrix}$$

$$= [x+(n-1)a](x-a)^{n-1}$$

(4)

$$D = \begin{vmatrix} a^2 & (a+1)^2 & (a+2)^2 & (a+3)^2 \\ b^2 & (b+1)^2 & (b+2)^2 & (b+3)^2 \\ c^2 & (c+1)^2 & (c+2)^2 & (c+3)^2 \\ d^2 & (d+1)^2 & (d+2)^2 & (d+3)^2 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{c_2 - c_1, c_3 - c_1, c_4 - c_1} \begin{vmatrix} a^2 & 2a+1 & 4a+4 & 6a+9 \\ b^2 & 2b+1 & 4b+4 & 6b+9 \\ c^2 & 2c+1 & 4c+4 & 6c+9 \\ d^2 & 2d+1 & 4d+4 & 6d+9 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{c_3 - 2c_2, c_4 - 3c_2} \begin{vmatrix} a^2 & 2a+1 & 2 & 6 \\ b^2 & 2b+1 & 2 & 6 \\ c^2 & 2c+1 & 2 & 6 \\ d^2 & 2d+1 & 2 & 6 \end{vmatrix} = 0$$

(5)

$$D_n=\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ 1 & 2 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & 3 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & n \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{c_1-\frac{1}{2}c_2-\frac{1}{3}c_3-\cdots-\frac{1}{n}c_n}\begin{vmatrix} a_1-\dfrac{a_2}{2}-\dfrac{a_3}{3}-\cdots-\dfrac{a_n}{n} & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ 0 & 2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 3 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & n \end{vmatrix}$$

$$=\left(a_1-\frac{a_2}{2}-\frac{a_3}{3}-\cdots\frac{a_n}{n}\right)n!$$

(5) 中的行列式可称为“**箭形**”行列式.

对于行列式

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

若 $\forall i,j(1\leqslant i,j\leqslant n)$ 都有 $a_{ji}=-a_{ij}$,则称 D 为**反对称行列式**. 易知,反对称行列式关于主对角线对称位置的两个元素互为相反数,并且主对角线上的元素全为零.

例 2.2 证明奇数阶反对称行列式的值为零.

证明 设 D 为 n 阶反对称行列式,则由反对称行列式的定义及推论 2.2 可知

$$D=\begin{vmatrix} 0 & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & 0 & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & 0 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 0 & -a_{21} & \cdots & -a_{n1} \\ -a_{12} & 0 & \cdots & -a_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ -a_{1n} & -a_{2n} & \cdots & 0 \end{vmatrix}$$

$$=(-1)^n\begin{vmatrix} 0 & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & 0 & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & 0 \end{vmatrix}$$