

~ 考研数学命题人土豪金系列丛书 ~

2015

双色印刷+重点突出+分类解析+习题精炼

考研数学命题人 历年真题精析

(数学二)



全国硕士研究生入学考试辅导用书编写组 主编

1

本书每章习题答案与详解

+ 2

篇北大、清华数学满分秘笈

+ 2

套原命题组成员密押试卷

+ 5

大考研命题人快速解题方法

+ 8

小时命题人数学串讲精华

正版书凭激活码登录 www.buaapress.com.cn,

获超多增值服务



北京航空航天大学出版社
BEIHANG UNIVERSITY PRESS

卡号: 2014006506404

密码:

考研数学

系列丛书

2015

双色印刷+重点突出+分类解析+习题精炼

考研数学命题人 历年真题精析

(数学二)

RFID

全国硕士研究生入学考试辅导用书编写组 主编

赠

1 本书每章习题答案与详解

2 篇北大、清华数学满分秘笈

3 套原命题组成员密押试卷

4 大考研命题人快速解题方法

5 小时命题人数学串讲精华

正版书凭激活码登录 www.buaapress.com.cn

获超多增值服务



北京航空航天大学出版社
BEIHANG UNIVERSITY PRESS

内 容 简 介

本书是作者在10多年收集、整理考研数学资料 and 进行考研数学辅导的基础上,通过对历年试题的精心研究和分析,并结合授课体会和学生的需要全新编写而成的。

本书收录了1998—2014年考研数学一历年真题,并进行了详细的解析;精辟阐明解题思路,全面剖析考点、重点、疑点和难点。在每章后面还将1987—1997年的相关典型真题作为习题提供,以便考生进一步巩固相关知识。

本书由来自北京大学、清华大学和中国人民大学的原命题组组长、命题研究专家,以及一线教师共同编写而成,考生不仅可以了解考研以来数学考试的全貌,而且可以方便地了解有关试题和信息,从中发现规律,进一步把握考试的特点及命题的思路,从而从容应考,轻取高分。

本书适用于参加研究生入学数学考试的广大考生。

图书在版编目(CIP)数据

2015 考研数学命题人历年真题解析. 数学二 / 全国
硕士研究生入学考试辅导用书编委会主编. -- 北京: 北
京航空航天大学出版社, 2014. 4

ISBN 978-7-5124-1458-7

I. ①2… II. ①全… III. ①高等数学-研究生-入
学考试-解题 IV. ①O13-44

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2014)第 004780 号

版权所有,侵权必究。

2015 考研数学命题人历年真题精析(数学二) 全国硕士研究生入学考试辅导用书编委会 编著

责任编辑 王 实

*

北京航空航天大学出版社出版发行

北京市海淀区学院路37号(邮编100191) <http://www.buaapress.com.cn>

发行部电话:(010)82317024 传真:(010)82328026

读者信箱:bhpress@263.net 邮购电话:(010)82316524

北京宏伟双华印刷有限公司印装 各地书店经销

*

开本:787×1092 1/16 印张:25.5 字数:549千字

2014年4月第1版 2014年4月第1次印刷

ISBN 978-7-5124-1458-7 定价:41.80元

若本书有倒页、脱页、缺页等印装质量问题,请与本社发行部联系调换。联系电话:(010)82317024

编 委 会

总主编	刘学元			
编 委	徐 荣	尤承业	刘德荫	童 武
	刘 佩	李春艳	叶 青	欧阳少波
	张晓燕	张 孜	黄 艳	王 宁
	张 杰	李 征	李智忠	黎兴刚
	汪 华	任丽娟	董 亮	王 欢
	陈冬冬	张飞飞	赵 娜	王光福
	郝显纯	高晓琼	李铁红	涂振旗
	姜宝静	杨 勇	王 宇	陈 娟
	王新会	崔杰凯	孟 楠	陈昌勇
	江海波	苗红宜	张永艳	潘小春
	王 静			

前言

自 1987 年全国工学、经济学硕士研究生入学实行统一考试以来,已有 28 载。这些历年考研试题是考生了解、分析和研究全国硕士研究生入学考试最直接、最宝贵的第一手资料,也是命题组专家智慧的结晶。而拥有一套内容完整、编排合理、分析透彻、解答规范、总结到位的历年数学真题,则是广大准备考研的同学们的期盼。

本书严格按照最新的《全国硕士研究生入学统一考试数学考试大纲》的要求和精神编写,对历年考研真题逐一给出了详细解答,并尽量做到一题多解。只要认真分析研究,了解消化和掌握历年试题,便能发现数学试题总是有稳定的、普遍的、反复出现的共性,也可以发现命题的特点和趋势,找出知识之间的有机联系,总结每部分内容的考查重点、难点,归纳常考题型,凝练解题思路、方法和技巧,明确复习方向,从而真正做到有的放矢,事半功倍。

本书包括两部分内容:

一部分是 1998—2014 年的完整真题。旨在让考生对历年考研真题有一个完整的印象,从总体上了解考研数学命题的基本形式和命题规律。

编者从历年真题和辅导班内部资料中,精选出重点考查且不易解决的题目。这些题目大多是研究生考试中的解答题,分值较高。编者分考点归纳习题,总结各类题型的解题思路和方法,并重点指出考生易错之处。

第一部分是试题精析。我们分章节、考点对题目归类。本部分不仅给出了详解,还在逐题解析历年考研数学试题的基础上,给每题作了评注。不仅分析了每题考查的知识点和难点,还对试题类型、各类型试题的解法进行了归纳和总结,使考生能举一反三,触类旁通;同时通过例举具体题目,分析考生常犯的错误,使考生引以为戒;各考点前都配有知识点和复习方法的归纳总结。

本书的特点:

1. 内容全面 汇集了 1998 年以来的所有真题,以便考生对历年真题有大致的了解并可研究真题。
2. 题型丰富 本书按考点对历年真题分类,对每种题型都进行了归纳和总结,方便考生复习。
3. 解析详尽 首先给出本题相应考点,再分析解题思路,给出详解,并尽量给出多

种解法以供参考和比较。题目最后还附有评注,点出本题应注意之处。

基础复习阶段,考生可以利用第二部分内容,体会各知识点和题型的命题形式和特点。模拟演练阶段,考生应在考试规定的时间内,完成第一部分的真题,锻炼和提高解题速度及准确率。如此复习,既能加深和巩固知识点,又能提高自己的解题能力。

“宝剑锋从磨砺出,梅花香自苦寒来。”成功源于努力拼搏,源于自信。

我们深信,考生仔细研读本书后,必能上一个新台阶。最后祝愿各位考生都能圆名校之梦!

编者 于清华园



第一篇

2014年考研数学二试题及答案与解析



目 录

第一篇 2014 年考研数学二试题及答案与解析

2014 年全国硕士研究生入学统一考试数学二试题	(1)
2014 年全国硕士研究生入学统一考试数学二试题答案与解析	(4)

第二篇 1998—2013 年考研数学二试题

2013 年全国硕士研究生入学统一考试数学二试题	(15)
2012 年全国硕士研究生入学统一考试数学二试题	(18)
2011 年全国硕士研究生入学统一考试数学二试题	(21)
2010 年全国硕士研究生入学统一考试数学二试题	(24)
2009 年全国硕士研究生入学统一考试数学二试题	(27)
2008 年全国硕士研究生入学统一考试数学二试题	(31)
2007 年全国硕士研究生入学统一考试数学二试题	(34)
2006 年全国硕士研究生入学统一考试数学二试题	(38)
2005 年全国硕士研究生入学统一考试数学二试题	(42)
2004 年全国硕士研究生入学统一考试数学二试题	(46)
2003 年全国硕士研究生入学统一考试数学二试题	(50)
2002 年全国硕士研究生入学统一考试数学二试题	(54)
2001 年全国硕士研究生入学统一考试数学二试题	(57)
2000 年全国硕士研究生入学统一考试数学二试题	(61)
1999 年全国硕士研究生入学统一考试数学二试题	(64)
1998 年全国硕士研究生入学统一考试数学二试题	(68)

第三篇 1998—2013 年考研数学二试题分类解析

第一部分 高等数学	(73)
第一章 函数、极限、连续	(73)
第二章 一元函数微分学	(104)
第三章 一元函数积分学	(156)
第四章 多元函数微分学	(201)
第五章 重积分	(215)
第六章 微分方程	(228)
第二部分 线性代数	(254)
第一章 行列式	(254)
第二章 矩 阵	(259)
第三章 向 量	(271)
第四章 线性方程组	(282)
第五章 矩阵的特征值与特征向量	(298)
第六章 二次型	(310)

2014 年全国硕士研究生入学统一考试 数学二试题

一、选择题:1~8 小题,每小题 4 分,共 32 分,下列每题给出的四个选项中,只有一个选项是符合题目要求的,请将所选项前的字母填在答题纸指定位置上.

(1) 当 $x \rightarrow 0^+$ 时,若 $\ln^\alpha(1+2x)$, $(1-\cos x)^{\frac{1}{\alpha}}$ 均是比 x 高阶的无穷小,则 α 的取值范围是 ()

(A) $(2, +\infty)$ (B) $(1, 2)$

(C) $(\frac{1}{2}, 1)$ (D) $(0, \frac{1}{2})$

(2) 下列曲线有渐近线的是 ()

(A) $y = x + \sin x$ (B) $y = x^2 + \sin x$

(C) $y = x + \sin \frac{1}{x}$ (D) $y = x^2 + \sin \frac{1}{x}$

(3) 设函数 $f(x)$ 具有 2 阶导数, $g(x) = f(0)(1-x) + f(1)x$, 则在区间 $[0, 1]$ 内 ()

(A) 当 $f'(x) \geq 0$ 时, $f(x) \geq g(x)$ (B) 当 $f'(x) \geq 0$ 时, $f(x) \leq g(x)$

(C) 当 $f''(x) \geq 0$ 时, $f(x) \geq g(x)$ (D) 当 $f''(x) \geq 0$ 时, $f(x) \leq g(x)$

(4) 曲线 $\begin{cases} x = t^2 + 7 \\ y = t^2 + 4t + 1 \end{cases}$ 上对应于 $t=1$ 的点处的曲率半径是 ()

(A) $\frac{\sqrt{10}}{50}$ (B) $\frac{\sqrt{10}}{100}$ (C) $10\sqrt{10}$ (D) $5\sqrt{10}$

(5) 设函数 $f(x) = \arctan x$, 若 $f(x) = xf'(\xi)$, 则 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\xi^2}{x^2} =$ ()

(A) 1 (B) $\frac{2}{3}$ (C) $\frac{1}{2}$ (D) $\frac{1}{3}$

(6) 设函数 $u(x, y)$ 在有界闭区域 D 上连续, 在 D 的内部具有 2 阶连续偏导数, 且满足 $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \neq 0$ 及 $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$, 则 ()

(A) $u(x, y)$ 的最大值和最小值都在 D 的边界上取得

(B) $u(x, y)$ 的最大值和最小值都在 D 的内部取得

(C) $u(x, y)$ 的最大值在 D 的内部取得, 最小值在 D 的边界上取得

(D) $u(x, y)$ 的最小值在 D 的内部取得, 最大值在 D 的边界上取得

(7) 行列式
$$\begin{vmatrix} 0 & a & b & 0 \\ a & 0 & 0 & b \\ 0 & c & d & 0 \\ c & 0 & 0 & d \end{vmatrix} =$$

(A) $(ad - bc)^2$

(B) $-(ad - bc)^2$

(C) $a^2d^2 - b^2c^2$

(D) $b^2c^2 - a^2d^2$

(8) 设 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 均为 3 维向量, 则对任意常数 k, l , 向量组 $\alpha_1 + k\alpha_3, \alpha_2 + l\alpha_3$ 线性无关是向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性无关的 ()

(A) 必要非充分条件

(B) 充分非必要条件

(C) 充分必要条件

(D) 既非充分也非必要条件

二、填空题: 9 ~ 14 小题, 每小题 4 分, 共 24 分, 请将答案写在答题纸指定位置上.

(9) $\int_{-\infty}^1 \frac{1}{x^2 + 2x + 5} dx =$ _____.

(10) 设 $f(x)$ 是周期为 4 的可导奇函数, 且 $f'(x) = 2(x - 1), x \in [0, 2]$, 则 $f(7) =$ _____.

(11) 设 $z = z(x, y)$ 是由方程 $e^{2z} + x + y^2 + z = \frac{7}{4}$ 确定的函数, 则 $dz \Big|_{(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})} =$ _____.

(12) 曲线 L 的极坐标方程是 $r = \theta$, 则 L 在点 $(r, \theta) = (\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ 处的切线的直角坐标方程是 _____.

(13) 一根长为 1 的细棒位于 x 轴的区间 $[0, 1]$ 上, 若其线密度 $\rho(x) = -x^2 + 2x + 1$, 则该细棒的质心坐标 $\bar{x} =$ _____.

(14) 设二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 - x_2^2 + 2ax_1x_3 + 4x_2x_3$ 的负惯性指数为 1, 则 a 的取值范围是 _____.

三、解答题: 15 ~ 23 小题, 共 94 分, 请将解答写在答题纸指定位置上, 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

(15) (本题满分 10 分)

求极限 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\int_1^x [t^2(e^{\frac{1}{t}} - 1) - t] dt}{x^2 \ln(1 + \frac{1}{x})}$.

(16) (本题满分 10 分)

已知函数 $y = y(x)$ 满足微分方程 $x^2 + y^2 y' = 1 - y'$, 且 $y(2) = 0$, 求 $y(x)$ 的极大值与极小值.

(17) (本题满分 10 分)

设平面区域 $D = \{(x, y) | 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4, x \geq 0, y \geq 0\}$, 计算 $\iint_D \frac{x \sin(\pi \sqrt{x^2 + y^2})}{x + y} dx dy$.

(18) (本题满分 10 分)

设函数 $f(u)$ 具有 2 阶连续导数, $z = f(e^x \cos y)$ 满足 $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = (4z + e^x \cos y) e^{2x}$, 若 $f(0) = 0, f'(0) = 0$, 求 $f(u)$ 的表达式.

(19) (本题满分 10 分)

设函数 $f(x), g(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上连续, 且 $f(x)$ 单调增加, $0 \leq g(x) \leq 1$, 证明:

(I) $0 \leq \int_a^x g(t) dt \leq x - a, x \in [a, b]$;

(II) $\int_a^{a+\int_a^b g(t) dt} f(x) dx \leq \int_a^b f(x) g(x) dx$.

(20) (本题满分 11 分)

设函数 $f(x) = \frac{x}{1+x}, x \in [0, 1]$, 定义数列

$$f_1(x) = f(x), f_2(x) = f(f_1(x)), \dots, f_n(x) = f(f_{n-1}(x)), \dots$$

记 S_n 是由曲线 $y = f_n(x)$, 直线 $x = 1$ 及 x 轴所围平面图形的面积, 求极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} n S_n$.

(21) (本题满分 11 分)

已知函数 $f(x, y)$ 满足 $\frac{\partial f}{\partial y} = 2(y+1)$, 且 $f(y, y) = (y+1)^2 - (2-y) \ln y$, 求曲线 $f(x, y) = 0$ 所围图形绕直线 $y = -1$ 旋转所成的旋转体的体积.

(22) (本题满分 11 分)

设 $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -4 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & -3 \end{pmatrix}$, E 为 3 阶单位矩阵.

(I) 求方程组 $Ax = 0$ 的一个基础解系;

(II) 求满足 $AB = E$ 的所有矩阵 B .

(23) (本题满分 11 分)

证明 n 阶矩阵 $\begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$ 与 $\begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & 2 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & n \end{pmatrix}$ 相似.

2014 年全国硕士研究生入学统一考试 数学二试题答案与解析

一、选择题

1. 【答案】 B

【考点提示】 等价无穷小

【解析】 当 $x \rightarrow 0^+$ 时, $\ln^\alpha(1+2x) \sim (2x)^\alpha$, $(1 - \cos x)^{\frac{1}{\alpha}} \sim \left(\frac{1}{2}x^2\right)^{\frac{1}{\alpha}} = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{\alpha}} x^{\frac{2}{\alpha}}$

因为 $\ln^\alpha(1+2x)$ 和 $(1 - \cos x)^{\frac{1}{\alpha}}$ 均是比 x 高阶的无穷小,

所以有 $\alpha > 1$ 且 $\frac{2}{\alpha} > 1$, 解得 $1 < \alpha < 2$, 即 $\alpha \in (1, 2)$. 正确答案为 B.

2. 【答案】 C

【考点提示】 曲线的斜渐近线

【解析】 曲线的斜渐近线为 $y = ax + b$, 其中 $a = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x}$, $b = \lim_{x \rightarrow \infty} [f(x) - ax]$. 垂直和水平渐近线分别为 $x = c$ 和 $y = d$, 其中 $c = \lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$, $d = \lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$. 四个选项中,

(A) $a = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x + \sin x}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{\sin x}{x}\right) = 1$, $b = \lim_{x \rightarrow \infty} \sin x$ 不存在, c 和 d 也不存在;

(B) 和 (D) $a = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x}$ 不存在, c 和 d 也不存在;

(C) $a = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x + \sin \frac{1}{x}}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{\sin \frac{1}{x}}{x}\right) = 1$, $b = \lim_{x \rightarrow \infty} \sin \frac{1}{x} = 0$, c 和 d 也不存在.

综上, 只有选项 C 有斜渐近线且为 $y = x$.

3. 【答案】 D

【考点提示】 导数几何意义的应用

【解析】 $f'(x)$ 和 $f''(x)$ 分别对应函数 $f(x)$ 所表示曲线的斜率和凹凸性;

$g(x) = f(0)(1-x) + f(1)x = [f(1) - f(0)]x + f(0)$, 表示 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 区间内两个端点的连线. 据此考虑作图 (见图 1).

根据曲线形状可知, $f_1'(x) \geq 0$, $f_2'(x) \geq 0$, $f_1''(x) \leq 0$, $f_2''(x) \geq 0$, $f_2(x) \leq g(x) \leq f_1(x)$. 由此可判断, 当 $f''(x) \leq 0$ 时, $f(x) \leq g(x)$, 故

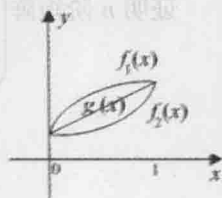


图 1 3 题图

正确答案为 D.

4.【答案】 C

【考点提示】 曲线的曲率与曲率半径

【解析】 由曲线参数方程可得 $x'_t = 2t, y'_t = 2t + 4$,

$$\text{则 } y'_x = \frac{y'_t}{x'_t} = \frac{t+2}{t}, (y'_x)'_t = -\frac{2}{t^2}, y''_x = \frac{(y'_x)'_t}{x'_t} = -\frac{1}{t^3}$$

$$\text{根据曲率公式 } K = \frac{|y''_x|}{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}} \text{ 得 } K_{t=1} = \frac{\left|-\frac{1}{1^3}\right|}{(1+3^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{1}{10\sqrt{10}}.$$

所以曲率半径为 $10\sqrt{10}$, 选 C.

5.【答案】 D

【考点提示】 函数的极限

【解析】 由 $f(x) = \arctan x, f(x) = xf'(\xi)$ 得,

$$\arctan x = x \cdot \frac{1}{1+\xi^2}, \text{ 即 } \xi^2 = \frac{x - \arctan x}{\arctan x}$$

$$\text{故 } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\xi^2}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \arctan x}{x^2 \arctan x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \arctan x}{x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \frac{1}{1+x^2}}{3x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{3(1+x^2)} = \frac{1}{3}, \text{ 正确答}$$

案为 D.

6.【答案】 A

【考点提示】 二元函数的极值与最值

$$\text{【解析】 令 } A = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, B = \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}, C = \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

则依题意可知, $B \neq 0, A + C = 0$,

故而 $AC - B^2 = -A^2 - B^2 < 0$, 即区域 D 内无极值, 正确答案为 A.

7.【答案】 B

【考点提示】 行列式求值

$$\begin{aligned} \text{原行列式} &= \begin{vmatrix} 0 & 0 & a & b & 0 \\ a & 0 & 0 & 0 & b \\ 0 & c & d & 0 & 0 \\ c & 0 & 0 & 0 & d \end{vmatrix} \xrightarrow{r_4 \leftrightarrow r_1} \begin{vmatrix} c & 0 & 0 & d \\ a & 0 & 0 & b \\ 0 & c & d & 0 \\ 0 & a & b & 0 \end{vmatrix} \xrightarrow{c_3 \leftrightarrow c_1} \begin{vmatrix} 0 & 0 & c & d \\ 0 & 0 & a & b \\ d & c & 0 & 0 \\ b & a & 0 & 0 \end{vmatrix} \\ &= (-)^{2 \cdot 2} \begin{vmatrix} d & c \\ b & a \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} c & d \\ a & b \end{vmatrix} = (ad - bc)(bc - ad) = -(ad - bc)^2, \end{aligned}$$

故答案为 B.

8.【答案】 A

【考点提示】 向量组的线性相关性

【解析】 由 $(\alpha_1 + k\alpha_3, \alpha_2 + l\alpha_3) = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ k & l \end{pmatrix}$ 可知, 因为 $(\alpha_1 + k\alpha_3, \alpha_2 + l\alpha_3)$

是二维向量组, 而 $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ 是三维向量组, 所以 $\alpha_1 + k\alpha_3, \alpha_2 + l\alpha_3$ 线性无关, 无法推出 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性无关, 条件不充分;

而当 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性无关时, 因为 $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \neq 0$, 所以 $r(\alpha_1 + k\alpha_3, \alpha_2 + l\alpha_3) = 2$, 即 $\alpha_1 + k\alpha_3, \alpha_2 + l\alpha_3$ 线性无关, 条件充分.

综上, 正确答案为 A.

二、填空题

9. 【答案】 $\frac{3\pi}{8}$

【考点提示】 广义积分

【解析】
$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^1 \frac{1}{x^2 + 2x + 5} dx &= \lim_{b \rightarrow -\infty} \int_b^1 \frac{1}{(x+1)^2 + 4} dx = \lim_{b \rightarrow -\infty} \frac{1}{4} \int_b^1 \frac{1}{1 + \left(\frac{x+1}{2}\right)^2} dx \\ &= \lim_{b \rightarrow -\infty} \frac{1}{2} \int_b^1 \frac{1}{1 + \left(\frac{x+1}{2}\right)^2} d\frac{x+1}{2} = \lim_{b \rightarrow -\infty} \frac{1}{2} \arctan \frac{x+1}{2} \Big|_b^1 \\ &= \lim_{b \rightarrow -\infty} \frac{1}{2} \left(\frac{\pi}{4} - \arctan \frac{b+1}{2} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2} \right) = \frac{3\pi}{8}. \end{aligned}$$

10. 【答案】 1

【考点提示】 函数的周期性、奇偶性

【解析】 因为 $f(x)$ 是周期为 4 的可导奇函数, 所以

$$f(7) = f(2 \cdot 4 - 1) = f(-1) = -f(1), \text{ 且 } f(0) = 0.$$

由 $f'(x) = 2(x-1)$ 可得 $f'(x) = x^2 - 2x + c$, 又 $f(0) = 0$, 则 $c = 0$, 即

$$f(x) = x^2 - 2x \text{ 且 } f(1) = -1,$$

则 $f(7) = -f(1) = 1$.

11. 【答案】 $-\frac{1}{2}dx - \frac{1}{2}dy$

【考点提示】 隐函数求导

【解析】 方程 $e^{2yz} + x + y^2 + z = \frac{7}{4}$ 两边对 x 求导, 可得 $2ye^{2yz} \frac{\partial z}{\partial x} + 1 + \frac{\partial z}{\partial x} = 0$, 解得

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{1}{2ye^{2yz} + 1},$$

两边再对 y 求导, 可得 $\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{2y + 2ze^{2yz}}{2ye^{2yz} + 1}$.

当 $(x, y) = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ 时, $z = 0$, 则 $\frac{\partial z}{\partial x} \Big|_{(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})} = -\frac{1}{2}$, $\frac{\partial z}{\partial y} \Big|_{(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})} = -\frac{1}{2}$,

$$dz = -\frac{1}{2}dx - \frac{1}{2}dy.$$

12. 【答案】 $y = -\frac{2}{\pi}x + \frac{\pi}{2}$

【考点提示】 函数的坐标转换、曲线的切线方程

【解析】 极坐标方程 $r = \theta$ 用直角坐标系表示为 $\sqrt{x^2 + y^2} = \arctan \frac{y}{x}$,

两边对 x 求导, 可得 $\frac{x + y \cdot y'}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{x \cdot y' - y}{x^2 + y^2}$.

又点 $(r, \theta) = (\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$, 即为 $(x, y) = (0, \frac{\pi}{2})$, 代入上式可得 $y' \Big|_{(0, \frac{\pi}{2})} = -\frac{2}{\pi}$,

从而切线方程为 $y - \frac{\pi}{2} = -\frac{2}{\pi}(x - 0)$, 即 $y = -\frac{2}{\pi}x + \frac{\pi}{2}$.

13. 【答案】 $\frac{11}{20}$

【考点提示】 定积分的应用

【解析】 因为 $\int_0^1 (-x^2 + 2x + 1) dx = \left(-\frac{1}{3}x^3 + x^2 + x\right) \Big|_0^1 = \frac{5}{3}$,

$$\int_0^1 x(-x^2 + 2x + 1) dx = \left(-\frac{1}{4}x^4 + \frac{2}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2\right) \Big|_0^1 = \frac{11}{12},$$

所以质心的坐标为 $\bar{x} = \frac{\frac{11}{12}}{\frac{5}{3}} = \frac{11}{20}$.

14. 【答案】 $[-2, 2]$

【考点提示】 二次型的矩阵、惯性指数

【解析】 题设二次型的矩阵为 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & a \\ 0 & -1 & 2 \\ a & 2 & 0 \end{pmatrix}$, 设其三个特征值分别为 $\lambda_1, \lambda_2,$

λ_3 , 则 $\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0, \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 = |A| = a^2 - 4$

因为题设二次型的负惯性指数为 1, 所以有且只有一个特征值为负值, 不妨设 $\lambda_1 < 0$, 则 $\lambda_2 \geq 0, \lambda_3 \geq 0$, 从而有 $|A| = a^2 - 4 \leq 0$, 即 $-2 \leq a \leq 2$.

当 $|A| = a^2 - 4 = 0$, 即 $a = \pm 2$ 时,

$$|\lambda E - A| = \begin{vmatrix} \lambda - 1 & 0 & -a \\ 0 & \lambda + 1 & -2 \\ -a & -2 & \lambda \end{vmatrix} = (\lambda - 1)(\lambda^2 + \lambda - 4) - a^2(\lambda + 1)$$

$$=(\lambda-1)(\lambda^2+\lambda-4)-4(\lambda+1)=\lambda(\lambda-3)(\lambda+3),$$

则 $\lambda_1 = -3, \lambda_2 = 3, \lambda_3 = 0$, 满足题意. 故综上有, $-2 \leq a \leq 2$.

三、解答题

15. 【考点提示】 求函数的极限

【解析】

$$\begin{aligned} \text{原式} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\int_1^x [t^2(e^{\frac{1}{t}} - 1) - t] dt}{x^2 \ln(1 + \frac{1}{x})} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\int_1^x [t^2(e^{\frac{1}{t}} - 1) - t] dt}{x} \cdot \frac{1}{\ln(1 + \frac{1}{x})} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\int_1^x [t^2(e^{\frac{1}{t}} - 1) - t] dt}{x} \cdot \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\ln(1 + \frac{1}{x})} = \lim_{x \rightarrow +\infty} [x^2(e^{\frac{1}{x}} - 1) - x] \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2(e^{\frac{1}{x}} - 1 - \frac{1}{x}) = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{e^t - 1 - t}{t^2} = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{e^t - 1}{2t} = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

16. 【考点提示】 函数的极值

【解析】 由 $x^2 + y^2 y' = 1 - y'$ 得 $(1 + y^2) dy = (1 - x^2) dx$,

两边积分, 得 $y + \frac{1}{3}y^3 = x - \frac{1}{3}x^3 + C$.

由 $y(2) = 0$ 得 $C = \frac{2}{3}$, 从而 $y + \frac{1}{3}y^3 = x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{3}$.

令 $y' = \frac{1-x^2}{1+y^2} = 0$, 得 $x = \pm 1$,

当 $x = 1$ 时, $y = 1$; 当 $x = -1$ 时, $y = 0$.

$$\text{又 } y'' = \frac{-2x(1+y^2) - (1-x^2) \cdot 2y \cdot y'}{(1+y^2)^2},$$

当 $x = 1$ 时, $y'' = -1 < 0$, 故 $x = 1$ 为极大值点, 极大值为 $y = 1$;

当 $x = -1$ 时, $y'' = 2 > 0$, 故 $x = -1$ 为极小值点, 极大值为 $y = 0$.

17. 【考点提示】 二重积分

【解析】 平面区域 D 关于 $y = x$ 对称, 则根据对称性可得

$$\begin{aligned} I &= \iint_D \frac{x \sin(\pi \sqrt{x^2 + y^2})}{x + y} dx dy = \iint_D \frac{y \sin(\pi \sqrt{x^2 + y^2})}{x + y} dx dy, \\ \text{从而 } 2I &= \iint_D \frac{x \sin(\pi \sqrt{x^2 + y^2})}{x + y} dx dy + \iint_D \frac{y \sin(\pi \sqrt{x^2 + y^2})}{x + y} dx dy \\ &= \iint_D \sin(\pi \sqrt{x^2 + y^2}) dx dy \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_1^2 \rho \sin(\pi \rho) d\rho = \frac{1}{2\pi} \int_1^2 \pi \rho \sin(\pi \rho) d(\pi \rho) = \frac{1}{2\pi} \int_{\pi}^{2\pi} t \sin t dt \end{aligned}$$