offcn中公·考研

2015 最新版

# 考研数学专项决胜
# 线性代数快速通关

全国硕士研究生入学统一考试研究委员会◎编著



世界图书出版公司

中公·考研

# 考研数学专项决胜

# 线性代数快速通关

全国硕士研究生入学统一考试研究委员会◎编著

世界图书出版公司
北京·广州·上海·西安

**图书在版编目(CIP)数据**

考研数学专项决胜. 线性代数快速通关 / 全国硕士研究生入学统一考试研究委员会编著.—北京:世界图书出版公司北京公司,2014.2

ISBN 978-7-5100-7575-9

Ⅰ.①考… Ⅱ.①全… Ⅲ.①线性代数-研究生-入学考试-自学参考资料 Ⅳ.①O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2014)第 026498 号

**考研数学专项决胜·线性代数快速通关**

**编　　著:** 全国硕士研究生入学统一考试研究委员会
**责任编辑:** 夏　丹　孙志荣
**装帧设计:** 中公教育图书设计中心

**出　　版:** 世界图书出版公司北京公司
**出 版 人:** 张跃明
**发　　行:** 世界图书出版公司北京公司
(地址:北京朝内大街 137 号　邮编:100010　电话:64077922)
**销　　售:** 各地新华书店
**印　　刷:** 三河市宇通印刷有限公司

**开　　本:** 850 mm×1168 mm　1/16
**印　　张:** 11.5
**字　　数:** 221 千
**版　　次:** 2014 年 5 月第 1 版　2014 年 5 月第 1 次印刷

ISBN 978-7-5100-7575-9　　**定　　价:** 26.00 元

# 目录 contents

## 第一章　行列式

# 第二章 矩阵

# 第三章 向 量

# 第四章 线性方程组

# 第五章　矩阵的特征值和特征向量

# 第六章 二次型

# 第一章

# 行列式

【学习提要】

行列式作为线性代数的基础,对于考生解决考研试题中线性代数部分的题目至关重要.本章节的知识点在考试过程中一般不会被直接考查,但它与后续章节的联系非常紧密,因此涉及本章知识点的考题综合性很强,出现形式多以选择题为主.在解题过程中除了要用到行列式常见的性质外,更需要结合矩阵、向量和特征值等相关知识点,所以对考生综合能力要求较高.考生需要有扎实的基础,不仅要理解行列式的概念,还要牢固掌握行列式的性质,更要懂得如何应用行列式的性质和行列式按行(列)展开定理计算行列式.考生只有做到这些,才能对线性代数部分做到游刃有余,才能在百万考研大军中脱颖而出.

【考试要求】

1. 了解行列式的概念,掌握行列式的性质.
2. 会应用行列式的性质和行列式按行(列)展开定理计算行列式.

## 读图记考点

- 行列式
  - 行列式的概念
    - 二阶行列式的概念
    - 三阶行列式的概念
    - $n$阶行列式的相关概念
      - 逆序数的概念
      - $n$阶行列式的概念
      - 余子式与代数余子式的概念
      - 转置行列式的概念
  - 行列式的性质★
    - 行列式与它的转置行列式相等
    - 互换行列式的两行（列），行列式变号
    - 行列式的某一行（列）中所有的元素都乘以同一数$k$，等于用数$k$乘此行列式
    - 行列式中如果有两行（列）元素成比例，则此行列式等于零
    - 若行列式的某一行（列）的元素都是两数之和，按该行（列）可以拆开成两个行列式的和
    - 把行列式的某一列（行）的各元素乘以同一数然后加到另一列（行）对应的元素上去，行列式不变
  - 行列式的计算
    - 利用概念与性质计算
    - 二阶与三阶行列式的计算
      - 二阶行列式的计算
      - 三阶行列式的计算
    - $n$阶行列式的计算
      - 利用行列式的性质进行计算★
      - 按行（列）展开定理计算★
      - 递推法
      - 归纳法
      - 公式法
    - 含参数行列式的计算

## 核心知识全解

### 一、行列式的概念

#### (一) 二阶行列式的概念

设有 4 个数排成两行两列(横排称行,竖排称列)的数表,

$$\begin{matrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22}, \end{matrix}$$

表达式 $a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$ 称为上表所确定的二阶行列式,并记作 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$.

#### (二) 三阶行列式的概念

设有 9 个数排成 3 行 3 列的数表

$$\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33}, \end{matrix} \tag{1}$$

记

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{13}a_{22}a_{31}, \tag{2}$$

(2) 式称为数表(1) 所确定的三阶行列式.

#### (三) $n$ 阶行列式的相关概念

1. 逆序数的概念

设 $n$ 个元素为 1 到 $n$ 这 $n$ 个自然数,并规定由小到大为标准次序. 设

$$p_1p_2\cdots p_n$$

为这 $n$ 个自然数的一个排列,考虑元素 $p_i(i=1,2,\cdots,n)$,如果比 $p_i$ 大的且排在 $p_i$ 前面的元素有 $t_i$ 个,就说 $p_i$ 这个元素的逆序数是 $t_i$,全体元素的逆序数之总和

$$t=t_1+t_2+\cdots+t_n=\sum_{i=1}^{n}t_i,$$

即是这个排列的逆序数.

逆序数为奇数的排列叫做奇排列,逆序数为偶数的排列叫做偶排列.

2. $n$ 阶行列式的概念

设有 $n^2$ 个数,排成 $n$ 行 $n$ 列的数表

$$\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}, \end{matrix}$$

作出表中位于不同行不同列的 $n$ 个数的乘积,并冠以符号 $(-1)^t$,得到形如

$$(-1)^t a_{1p_1} a_{2p_2} \cdots a_{np_n} \tag{3}$$

的项,其中 $p_1p_2\cdots p_n$ 为自然数 $1,2,\cdots,n$ 的一个排列,$t$ 为这个排列的逆序数,由于这样的排列共有 $n!$ 个,因而形如(3) 式的项共有 $n!$项,所有这 $n!$项代数和

$$\sum(-1)^t a_{1p_1} a_{2p_2} \cdots a_{np_n}$$

称为 $n$ 阶行列式,记作

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

简记作 $\det(a_{ij})$,其中数 $a_{ij}$ 为行列式 $D$ 的$(i,j)$ 元.

3. 余子式与代数余子式的概念

在 $n$ 阶行列式中,把$(i,j)$ 元 $a_{ij}$ 所在的第 $i$ 行和第 $j$ 行划去后,留下来的 $n-1$ 阶行列式叫做$(i,j)$ 元 $a_{ij}$ 的余子式,记作 $M_{ij}$;记

$$A_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij},$$

$A_{ij}$ 叫做$(i,j)$ 元 $a_{ij}$ 的代数余子式.

4. 转置行列式的概念

记

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}, D^{\mathrm{T}}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

行列式 $D^{\mathrm{T}}$ 称为行列式 $D$ 的转置行列式.

## 二、行列式的性质

**性质 1** 行列式与它的转置行列式相等.

**性质 2** 互换行列式的两行(列),行列式变号.

**推论** 如果行列式有两行(列) 完全相同,则此行列式等于零.

**性质 3** 行列式的某一行(列) 中所有的元素都乘以同一数 $k$,等于用数 $k$ 乘此行列式.

**推论** 行列式中某一行(列) 的所有元素的公因子可以提到行列式记号的外面.

**性质 4** 行列式中如果有两行(列) 元素成比例,则此行列式等于零.

**性质 5** 若行列式的某一行(列) 的元素都是两数之和,例如第 $i$ 列的元素都是两数之和:

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & (a_{1i}+a'_{1i}) & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & (a_{2i}+a'_{2i}) & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & (a_{ni}+a'_{ni}) & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

则 $D$ 等于下列两个行列式之和:

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1i} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2i} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{ni} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a'_{1i} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a'_{2i} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a'_{ni} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

**性质6** 把行列式的某一行(列)的各元素乘以同一数然后加到另一行(列)对应的元素上去,行列式不变.

例如以数 $k$ 乘第 $j$ 列加到第 $i$ 列上(记作 $c_i+kc_j$),有

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1i} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2i} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{ni} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \xlongequal{c_i+kc_j} \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & (a_{1i}+ka_{1j}) & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & (a_{2i}+ka_{2j}) & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & (a_{ni}+ka_{nj}) & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} (i\neq j).$$

(以数 $k$ 乘第 $j$ 行加到第 $i$ 行上,记作 $r_i+kr_j$)

## 三、行列式的计算

### (一)行列式按行(列)展开定理

**定理** 行列式等于它的任一行(列)的各元素与其对应的代数余子式乘积之和,即

$$D=a_{i1}A_{i1}+a_{i2}A_{i2}+\cdots+a_{in}A_{in}(i=1,2,\cdots,n),$$

或

$$D=a_{1j}A_{1j}+a_{2j}A_{2j}+\cdots+a_{nj}A_{nj}(j=1,2,\cdots,n).$$

**推论** 行列式某一行(列)的元素与另一行(列)对应元素的代数余子式乘积之和等于零. 即

$$a_{i1}A_{j1}+a_{i2}A_{j2}+\cdots+a_{in}A_{jn}=0,\quad i\neq j,$$

或

$$a_{1i}A_{1j}+a_{2i}A_{2j}+\cdots+a_{ni}A_{nj}=0,\quad i\neq j.$$

### (二)递推法

利用行列式的性质或展开式找出递推关系式,再根据所得的递推关系式递推或迭代求出所给行列式的值,该方法一般适用于高阶且元素有规律的行列式的计算.

### (三)归纳法

关于数学归纳法有两种形式,其具体做法分别是:

第一数学归纳法:

第一步,验证 $n=1$ 时,命题 $f_n$ 正确;

第二步,设 $n=k$ 时,命题 $f_n$ 正确;

第三步,证明 $n=k+1$ 时,命题 $f_n$ 正确.

第二数学归纳法:

第一步,验证 $n=1$ 和 $n=2$ 时,命题 $f_n$ 都正确;

第二步,设 $n<k$ 时,命题 $f_n$ 正确;

第三步,证明 $n=k$ 时,命题 $f_n$ 正确.

### (四)公式法

1. 三阶及以下行列式的计算

一阶行列式的值 $|a|=a$;

二阶行列式的值 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$;

三阶行列式的值 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{31} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{23}a_{33} - a_{11}a_{21}a_{32}$.

2. 上(下)三角行列式的计算

上(下)三角行列式的值等于主对角线元素的乘积

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \prod_{i=1}^{n} a_n.$$

3. 有关副对角线的行列式的计算

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1,n-1} & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2,n-1} & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n-1,1} & a_{n-1,2} & \cdots & 0 & 0 \\ a_{n1} & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{1n} \\ 0 & 0 & \cdots & a_{2,n-1} & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & a_{n-3,2} & \cdots & a_{n-1,n-1} & a_{n-1,n} \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{n,n-1} & a_{nn} \end{vmatrix} = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} a_{1n}a_{2,n-1}\cdots a_{n1}.$$

4. 拉普拉斯展开式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1m} & c_{11} & \cdots & c_{1n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mm} & c_{m1} & \cdots & c_{nm} \\ 0 & \cdots & 0 & b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & b_{n1} & \cdots & b_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1m} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mm} & 0 & \cdots & 0 \\ d_{11} & \cdots & d_{1m} & b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ d_{n1} & \cdots & d_{mm} & b_{n1} & \cdots & b_{nn} \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1m} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mm} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & \cdots & b_{nn} \end{vmatrix}.$$

5. $n$ 阶范德蒙行列式的计算

$$V_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & \cdots & x_n^2 \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \cdots & x_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{n \geqslant i > j \geqslant 1} (x_i - x_j),$$

显然,当且仅当 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 两两不等时,$V_n \neq 0$.

## 经典题型与方法技巧

### 题型1——利用概念与性质的计算

【例 1.1】 （Ⅰ）在一个 $n$ 阶行列式 $D$ 中等于"0"的元素个数 $> n^2 - n$，则 $D =$ ______.

（Ⅱ）$D = \begin{vmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 2 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1999 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 2000 \end{vmatrix} =$ ______.

【详解】 （Ⅰ）一个 $n$ 阶行列式 $D$ 共有 $n^2$ 个元素，既然"0"元素的个数 $> n^2 - n$，因此非零元素的个数 $< n(n^2 - (n^2 - n) = n)$，而由 $n$ 阶行列式的概念可知，$D$ 的每一项均为"0"（因为每一项中至少有一个"0"元素），故 $D = 0$.

（Ⅱ）$D = (-1)^{\tau(n-1,n-2,\cdots,1,n)} a_{1,n-1}a_{2,n-2}\cdots a_{n-1,1}a_{nn} = (-1)^{\frac{(n-1)(n-2)}{2}} a_{1,n-1}a_{2,n-2}\cdots a_{nn}$

$\xlongequal{n=2000} (-1)^{\frac{1999\times1998}{2}} 1\cdot2\cdot3\cdot\cdots\cdot1999\cdot2000 = -2000!$.

**方法技巧**

本题主要考查利用 $n$ 阶行列式的概念与性质求行列式的值. 当所求行列式中有较多零元素时，应首先考虑利用行列式的概念与性质进行解题.

### 题型2——二阶与三阶行列式的计算

▶ 类型 Ⅰ：二阶行列式的计算

【例 1.2】 计算下列二阶行列式：

（Ⅰ）$\begin{vmatrix} \sin\theta & \cos\theta \\ \cos\theta & -\sin\theta \end{vmatrix}$；（Ⅱ）$\begin{vmatrix} a & b \\ a^2 & b^2 \end{vmatrix}$

【详解】 （Ⅰ）$\begin{vmatrix} \sin\theta & \cos\theta \\ \cos\theta & -\sin\theta \end{vmatrix} = \sin\theta\cdot(-\sin\theta) - \cos\theta\cdot\cos\theta = -(\sin^2\theta + \cos^2\theta) = -1$.

（Ⅱ）$\begin{vmatrix} a & b \\ a^2 & b^2 \end{vmatrix} = ab^2 - a^2b$.

**方法技巧**

本题主要考查二阶行列式的计算. 此类题目比较简单，直接利用二阶行列式的概念计算. 即

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc.$$

▶ 类型 Ⅱ:三阶行列式的计算

【例 1.3】 行列式 $D=\begin{vmatrix} a & b & 0\\ b & a & 0\\ 1 & 0 & 1\end{vmatrix}=0$,则 $a,b$ 应满足(　　)

(A)$a=b$ 或 $a=-b$.　　(B)$a=2b$ 且 $b\neq 0$.

(C)$b=2a$ 且 $a\neq 0$.　　(D)$a=1,b=\dfrac{1}{2}$.

【详解】 方法一:$D=\begin{vmatrix} a & b & 0\\ b & a & 0\\ 1 & 0 & 1\end{vmatrix}=a\cdot a\cdot 1+b\cdot 0\cdot 1+0\cdot b\cdot 0-0\cdot a\cdot 1-b\cdot b\cdot 1-a\cdot 0\cdot 0$

$=a^2-b^2=0$,于是 $a=b$ 或 $a=-b$,应选(A).

方法二:先将行列式按第 3 列展开,再按对角线法则计算二阶行列式,得

$$D=\begin{vmatrix} a & b & 0\\ b & a & 0\\ 1 & 0 & 1\end{vmatrix}=1\cdot\begin{vmatrix} a & b\\ b & a\end{vmatrix}=a^2-b^2=0.$$

于是 $a=b$ 或 $a=-b$,应选(A).

**方法技巧**

本题主要考查三阶行列式的计算. 此类题目比较简单,直接利用三阶行列式的概念即可(如方法一). 此外,也可以考虑将三阶行列式按某一(行)列展开,转化为二阶行列式进行计算(如方法二). 此时,尽可能选取非零元素较少的(行)列.

【例 1.4】 $D=\begin{vmatrix} 246 & 427 & 327\\ 1014 & 543 & 443\\ -342 & 721 & 621\end{vmatrix}=$__________.

【详解】 $D=\begin{vmatrix} 246 & 427-327 & 327\\ 1014 & 543-443 & 443\\ -342 & 721-621 & 621\end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 246 & 100 & 327\\ 1014 & 100 & 443\\ -342 & 100 & 621\end{vmatrix}=600\begin{vmatrix} 41 & 1 & 327\\ 169 & 1 & 443\\ -57 & 1 & 621\end{vmatrix}$

$$=600\begin{vmatrix} 41 & 1 & 327\\ 128 & 0 & 116\\ -98 & 0 & 294\end{vmatrix}=600\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0\\ 128 & 0 & 116\\ -98 & 0 & 294\end{vmatrix}=-600\begin{vmatrix} 128 & 116\\ -98 & 294\end{vmatrix}$$

$$=-600\begin{vmatrix} 128 & 500\\ -98 & 0\end{vmatrix}=-600\times 500\times 98=-294\times 10^5.$$

**方法技巧**

本题主要考查三阶行列式的计算. 如果选用三阶行列式的概念计算,由于行列式各元素的数值太大,则运算量过大. 观察题干元素特征,可见第二列和第三列相差 100,因此可以运用行列式的性质,使本题计算量减小. 一般情况,考试中应用行列式性质进行问题的求解情况较多,这就需要考生牢固掌握行列式的性质(详见核心知识全解).