



考研数学专项决胜 线性代数快速通关

全国硕士研究生入学统一考试研究委员会◎编著

购书 **三重
大礼**

1. 1160元名师在线课程
2. 1880元YY在线课程
3. 海量增值资料下载

offcn中公·考研

考研数学专项决胜

线性代数快速通关

全国硕士研究生入学统一考试研究委员会◎编著

世界图书出版公司

北京·广州·上海·西安

图书在版编目(CIP)数据

考研数学专项决胜. 线性代数快速通关 / 全国硕士研究生入学统一考试研究委员会编著. —北京: 世界图书出版公司北京公司, 2014.2

ISBN 978-7-5100-7575-9

I. ①考… II. ①全… III. ①线性代数-研究生-入学考试-自学参考资料 IV. ①O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2014)第 026498 号

考研数学专项决胜·线性代数快速通关

编 著: 全国硕士研究生入学统一考试研究委员会

责任编辑: 夏 丹 孙志荣

装帧设计: 中公教育图书设计中心

出 版: 世界图书出版公司北京公司

出 版 人: 张跃明

发 行: 世界图书出版公司北京公司

(地址: 北京朝内大街 137 号 邮编: 100010 电话: 64077922)

销 售: 各地新华书店

印 刷: 三河市宇通印刷有限公司

开 本: 850 mm×1168 mm 1/16

印 张: 11.5

字 数: 221 千

版 次: 2014 年 5 月第 1 版 2014 年 5 月第 1 次印刷

ISBN 978-7-5100-7575-9

定 价: 26.00 元

版权所有 翻印必究

目录



第一章 行列式

学习提要	1
考试要求	1
读图记考点	2
核心知识全解	3
一、行列式的概念	3
(一) 二阶行列式的概念	3
(二) 三阶行列式的概念	3
(三) n 阶行列式的相关概念	3
二、行列式的性质	4
三、行列式的计算	5
(一) 行列式按行(列)展开定理	5
(二) 递推法	5
(三) 归纳法	5
(四) 公式法	5
经典题型与方法技巧	7
题型 1——利用概念与性质的计算	7
题型 2——二阶与三阶行列式的计算	7
题型 3—— n 阶行列式的计算	9
题型 4——含参数行列式的计算	16
本章同步练习题	16
一、选择题	16
二、填空题	17
三、解答题	18
同步练习题答案解析	19
一、选择题	19
二、填空题	20
三、解答题	23

第二章 矩 阵

学习提要	27
考试要求	27
读图记考点	28
核心知识全解	29
一、矩阵及其运算	29
(一) 矩阵的概念	29
(二) 几种特殊矩阵	29
(三) 有关矩阵的运算法则	30
二、逆矩阵及其运算	32
(一) 逆矩阵的概念	32
(二) 有关逆矩阵的运算法则	32
三、初等变换及矩阵的秩	33
(一) 初等变换	33
(二) 矩阵的秩	35
四、分块矩阵及其运算	35
(一) 分块矩阵的概念	35
(二) 分块矩阵的运算法则	36
经典题型与方法技巧	36
一、矩阵及其运算	36
题型 1——概念及运算法则的相关应用	36
题型 2——方阵的幂	37
题型 3——矩阵的可交换性	39
二、逆矩阵及其运算	40
题型 1——逆矩阵的计算及证明	40
题型 2——伴随矩阵的计算及证明	42
题型 3——矩阵方程	44
三、初等变换及矩阵的秩	46
题型 1——利用初等变换求矩阵的秩	46
题型 2——利用初等变换求逆矩阵	46
题型 3——初等矩阵	48
题型 4——求矩阵的秩	49
四、分块矩阵及其运算	49
本章同步练习题	51
一、选择题	51
二、填空题	52

三、解答题	53
同步练习题答案解析	54
一、选择题	54
二、填空题	56
三、解答题	58

第三章 向 量

学习提要	63
考试要求	63
读图记考点	64
核心知识全解	65
一、向量组的相关知识点	65
(一) 向量	65
(二) 向量组	65
二、向量空间的相关知识点	67
(一) 相关概念(数一)	67
(二) 基变换公式和坐标变换公式(数一)	67
(三) 施密特正交化	68
(四) 正交矩阵及性质(数一)	69
经典题型与方法技巧	69
一、向量组的相关问题	69
题型 1——线性表示与线性相关	69
题型 2——向量组的等价问题	72
题型 3——向量组的极大线性无关组和秩的问题	73
二、向量空间的相关问题	75
题型 1——过渡矩阵的相关问题(数一)	75
题型 2——正交规范化问题	76
题型 3——正交矩阵的证明问题(数一)	77
本章同步练习题	77
一、选择题	77
二、填空题	79
三、解答题	80
同步练习题答案解析	81
一、选择题	81
二、填空题	84
三、解答题	86

第四章 线性方程组

学习提要	91
考试要求	91
读图记考点	92
核心知识全解	93
一、齐次线性方程组	93
(一) 向量表示	93
(二) 矩阵表示	93
(三) 解的性质	94
(四) 解的结构	94
二、非齐次线性方程组	95
(一) 向量表示	95
(二) 矩阵表示	95
(三) 解的性质	96
(四) 求解步骤	96
经典题型与方法技巧	97
一、齐次线性方程组	97
题型1——齐次线性方程组解的判定	97
题型2——齐次线性方程组解的结构	101
题型3——含参数的齐次线性方程组	103
二、非齐次线性方程组	103
题型1——非齐次线性方程组解的判定	103
题型2——非齐次线性方程组解的结构	105
题型3——含参数的非齐次线性方程组	109
题型4——综合应用问题	110
本章同步练习题	112
一、选择题	112
二、填空题	113
三、解答题	114
同步练习题答案解析	115
一、选择题	115
二、填空题	118
三、解答题	119

第五章 矩阵的特征值和特征向量

学习提要	125
考试要求	125
读图记考点	126
核心知识全解	127
一、特征值和特征向量	127
(一) 相关概念	127
(二) 相关性质	127
(三) 求解方法	128
二、相似对角化	128
(一) 相似矩阵及相似对角化的概念	128
(二) 相似矩阵的性质	128
(三) 矩阵可相似对角化的条件	129
(四) 矩阵相似对角化的步骤	129
三、实对称矩阵	129
(一) 实对称矩阵的概念	129
(二) 实对称矩阵的结论	130
(三) 实对称矩阵正交对角化的步骤	130
经典题型与方法技巧	130
一、特征值和特征向量	130
题型 1——具体型	130
题型 2——抽象型	132
题型 3——反求矩阵	133
二、相似对角化	134
题型 1——相似对角化的判定	134
题型 2——求相似对角化的可逆矩阵	135
题型 3——相似对角化的相关应用	136
三、实对称矩阵	138
题型 1——实对称矩阵的特征值和特征向量	138
题型 2——求实对称矩阵	139
题型 3——实对称矩阵的对角化	140
本章同步练习题	141
一、选择题	141
二、填空题	142
三、解答题	143
同步练习题答案解析	143
一、选择题	143
二、填空题	145
三、解答题	147

第六章 二次型

学习提要	151
考试要求	151
读图记考点	152
核心知识全解	153
一、二次型及其标准形	153
(一) 二次型的相关概念	153
(二) 二次型的标准化	153
(三) 二次型标准化定理	154
(四) 矩阵的合同	155
二、正定二次型	155
(一) 正定二次型及正定矩阵的概念	155
(二) 正定二次型或正定矩阵的判别定理	155
(三) 正定矩阵的性质	156
经典题型与方法技巧	156
一、二次型及其标准形	156
题型1——相关概念的考查	156
题型2——化二次型为标准形	156
题型3——二次型的含参问题	158
题型4——二次型的合同	159
二、正定二次型	160
题型1——正定二次型及正定矩阵的相关概念	160
题型2——二次型正定性的判定	161
题型3——正定矩阵的相关问题	162
本章同步练习题	164
一、选择题	164
二、填空题	164
三、解答题	165
同步练习题答案解析	165
一、选择题	165
二、填空题	167
三、解答题	169

第一章

行列式

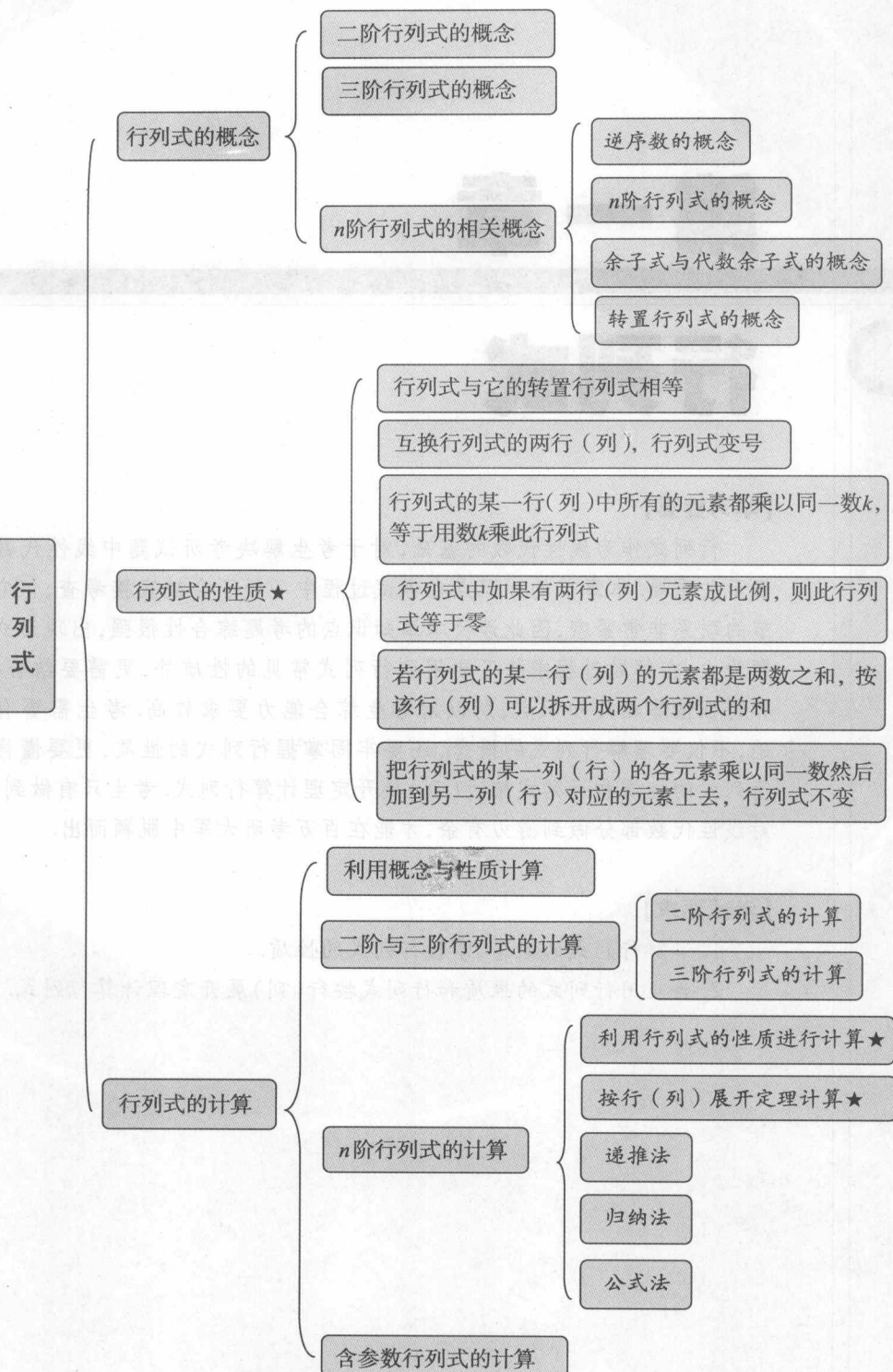
【学习提要】

行列式作为线性代数的基础,对于考生解决考研试题中线性代数部分的题目至关重要.本章节的知识点在考试过程中一般不会被直接考查,但它与后续章节的联系非常紧密,因此涉及本章知识点的考题综合性很强,出现形式多以选择题为主.在解题过程中除了要用到行列式常见的性质外,更需要结合矩阵、向量和特征值等相关知识点,所以对考生综合能力要求较高.考生需要有扎实的基础,不仅要理解行列式的概念,还要牢固掌握行列式的性质,更要懂得如何应用行列式的性质和行列式按行(列)展开定理计算行列式.考生只有做到这些,才能对线性代数部分做到游刃有余,才能在百万考研大军中脱颖而出.

【考试要求】

1. 了解行列式的概念,掌握行列式的性质.
2. 会应用行列式的性质和行列式按行(列)展开定理计算行列式.

读图记考点



核心知识全解**一、行列式的概念****(一) 二阶行列式的概念**

设有 4 个数排成两行两列(横排称行,竖排称列)的数表,

$$\begin{array}{cc} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{array},$$

表达式 $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$ 称为上表所确定的二阶行列式,并记作 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$.

(二) 三阶行列式的概念

设有 9 个数排成 3 行 3 列的数表

$$\begin{array}{ccc} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{array}, \quad (1)$$

记

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \quad (2)$$

$$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31},$$

(2) 式称为数表(1)所确定的三阶行列式.

(三) n 阶行列式的相关概念**1. 逆序数的概念**

设 n 个元素为 1 到 n 这 n 个自然数,并规定由小到大为标准次序. 设

$$p_1 p_2 \cdots p_n$$

为这 n 个自然数的一个排列,考虑元素 $p_i (i = 1, 2, \cdots, n)$, 如果比 p_i 大的且排在 p_i 前面的元素有 t_i 个, 就说 p_i 这个元素的逆序数是 t_i , 全体元素的逆序数之总和

$$t = t_1 + t_2 + \cdots + t_n = \sum_{i=1}^n t_i,$$

即是这个排列的逆序数.

逆序数为奇数的排列叫做奇排列,逆序数为偶数的排列叫做偶排列.

2. n 阶行列式的概念

设有 n^2 个数,排成 n 行 n 列的数表

$$\begin{array}{cccc} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{array},$$

作出表中位于不同行不同列的 n 个数的乘积,并冠以符号 $(-1)^t$, 得到形如

$$(-1)^t a_{1p_1} a_{2p_2} \cdots a_{np_n} \quad (3)$$

的项,其中 $p_1 p_2 \cdots p_n$ 为自然数 $1, 2, \cdots, n$ 的一个排列, t 为这个排列的逆序数,由于这样的排列共有 $n!$ 个,因而形如(3)式的项共有 $n!$ 项,所有这 $n!$ 项代数和

$$\sum (-1)^t a_{1p_1} a_{2p_2} \cdots a_{np_n}$$

称为 n 阶行列式,记作

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

简记作 $\det(a_{ij})$, 其中数 a_{ij} 为行列式 D 的 (i, j) 元.

3. 余子式与代数余子式的概念

在 n 阶行列式中,把 (i, j) 元 a_{ij} 所在的第 i 行和第 j 行划去后,留下来的 $n-1$ 阶行列式叫做 (i, j) 元 a_{ij} 的余子式,记作 M_{ij} ; 记

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij},$$

A_{ij} 叫做 (i, j) 元 a_{ij} 的代数余子式.

4. 转置行列式的概念

记

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}, D^T = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

行列式 D^T 称为行列式 D 的转置行列式.

二、行列式的性质

性质 1 行列式与它的转置行列式相等.

性质 2 互换行列式的两行(列),行列式变号.

推论 如果行列式有两行(列)完全相同,则此行列式等于零.

性质 3 行列式的某一行(列)中所有的元素都乘以同一数 k , 等于用数 k 乘此行列式.

推论 行列式中某一行(列)的所有元素的公因子可以提到行列式记号的外面.

性质 4 行列式中如果有两行(列)元素成比例,则此行列式等于零.

性质 5 若行列式的某一行(列)的元素都是两数之和,例如第 i 列的元素都是两数之和:

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & (a_{1i} + a'_{1i}) & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & (a_{2i} + a'_{2i}) & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & (a_{ni} + a'_{ni}) & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

则 D 等于下列两个行列式之和:

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1i} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2i} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{ni} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a'_{1i} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a'_{2i} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a'_{ni} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

性质 6 把行列式的某一行(列)的各元素乘以同一数然后加到另一行(列)对应的元素上去,行列式不变.

例如以数 k 乘第 j 列加到第 i 列上(记作 $c_i + kc_j$), 有

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1i} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2i} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{ni} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \xrightarrow{c_i + kc_j} \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & (a_{1i} + ka_{1j}) & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & (a_{2i} + ka_{2j}) & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & (a_{ni} + ka_{nj}) & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \quad (i \neq j).$$

(以数 k 乘第 j 行加到第 i 行上,记作 $r_i + kr_j$)

三、行列式的计算

(一) 行列式按行(列)展开定理

定理 行列式等于它的任一行(列)的各元素与其对应的代数余子式乘积之和,即

$$D = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \cdots + a_{in}A_{in} \quad (i = 1, 2, \cdots, n),$$

或

$$D = a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \cdots + a_{nj}A_{nj} \quad (j = 1, 2, \cdots, n).$$

推论 行列式某一行(列)的元素与另一行(列)对应元素的代数余子式乘积之和等于零. 即

$$a_{i1}A_{j1} + a_{i2}A_{j2} + \cdots + a_{in}A_{jn} = 0, \quad i \neq j,$$

或

$$a_{1i}A_{1j} + a_{2i}A_{2j} + \cdots + a_{ni}A_{nj} = 0, \quad i \neq j.$$

(二) 递推法

利用行列式的性质或展开式找出递推关系式,再根据所得的递推关系式递推或迭代求出所给行列式的值,该方法一般适用于高阶且元素有规律的行列式的计算.

(三) 归纳法

关于数学归纳法有两种形式,其具体做法分别是:

第一数学归纳法:

第一步,验证 $n = 1$ 时,命题 f_n 正确;

第二步,设 $n = k$ 时,命题 f_n 正确;

第三步,证明 $n = k + 1$ 时,命题 f_n 正确.

第二数学归纳法:

第一步,验证 $n = 1$ 和 $n = 2$ 时,命题 f_n 都正确;

第二步,设 $n < k$ 时,命题 f_n 正确;

第三步,证明 $n = k$ 时,命题 f_n 正确.

(四) 公式法

1. 三阶及以下行列式的计算

一阶行列式的值 $|a| = a$;

二阶行列式的值 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$;

$$\text{三阶行列式的值} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{31} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{23}a_{33} - a_{11}a_{21}a_{32}.$$

2. 上(下)三角行列式的计算

上(下)三角行列式的值等于主对角线元素的乘积

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \prod_{i=1}^n a_{ii}.$$

3. 有关副对角线的行列式的计算

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1,n-1} & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2,n-1} & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n-1,1} & a_{n-1,2} & \cdots & 0 & 0 \\ a_{n1} & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{1n} \\ 0 & 0 & \cdots & a_{2,n-1} & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & a_{n-3,2} & \cdots & a_{n-1,n-1} & a_{n-1,n} \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{n,n-1} & a_{nn} \end{vmatrix} = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} a_{1n}a_{2,n-1}\cdots a_{n1}.$$

4. 拉普拉斯展开式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1m} & c_{11} & \cdots & c_{1n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mm} & c_{m1} & \cdots & c_{nm} \\ 0 & \cdots & 0 & b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & b_{n1} & \cdots & b_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1m} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mm} & 0 & \cdots & 0 \\ d_{11} & \cdots & d_{1m} & b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ d_{n1} & \cdots & d_{nm} & b_{n1} & \cdots & b_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1m} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mm} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & \cdots & b_{nn} \end{vmatrix}.$$

5. n 阶范德蒙行列式的计算

$$V_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & \cdots & x_n^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \cdots & x_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (x_i - x_j),$$

显然,当且仅当 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 两两不等时, $V_n \neq 0$.

经典题型与方法技巧

题型1——利用概念与性质的计算

【例 1.1】(I) 在一个 n 阶行列式 D 中等于“0”的元素个数 $> n^2 - n$, 则 $D =$ _____.

$$(II) D = \begin{vmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 2 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1999 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 2000 \end{vmatrix} = \underline{\hspace{2cm}}.$$

【详解】(I) 一个 n 阶行列式 D 共有 n^2 个元素, 既然“0”元素的个数 $> n^2 - n$, 因此非零元素的个数 $< n(n^2 - (n^2 - n)) = n$, 而由 n 阶行列式的概念可知, D 的每一项均为“0”(因为每一项中至少有一个“0”元素), 故 $D = 0$.

$$(II) D = (-1)^{r(n-1, n-2, \dots, 1, n)} a_{1, n-1} a_{2, n-2} \cdots a_{n-1, 1} a_{nn} = (-1)^{\frac{(n-1)(n-2)}{2}} a_{1, n-1} a_{2, n-2} \cdots a_{nn}$$

$$\stackrel{n=2000}{=} (-1)^{\frac{1999 \times 1998}{2}} 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots 1999 \cdot 2000 = -2000!.$$

方法技巧

本题主要考查利用 n 阶行列式的概念与性质求行列式的值. 当所求行列式中有较多零元素时, 应首先考虑利用行列式的概念与性质进行解题.

题型2——二阶与三阶行列式的计算

► 类型 I: 二阶行列式的计算

【例 1.2】计算下列二阶行列式:

$$(I) \begin{vmatrix} \sin\theta & \cos\theta \\ \cos\theta & -\sin\theta \end{vmatrix}; (II) \begin{vmatrix} a & b \\ a^2 & b^2 \end{vmatrix}.$$

【详解】(I) $\begin{vmatrix} \sin\theta & \cos\theta \\ \cos\theta & -\sin\theta \end{vmatrix} = \sin\theta \cdot (-\sin\theta) - \cos\theta \cdot \cos\theta = -(\sin^2\theta + \cos^2\theta) = -1.$

$$(II) \begin{vmatrix} a & b \\ a^2 & b^2 \end{vmatrix} = ab^2 - a^2b.$$

方法技巧

本题主要考查二阶行列式的计算. 此类题目比较简单, 直接利用二阶行列式的概念计算. 即

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc.$$

► 类型 II:三阶行列式的计算

【例 1.3】 行列式 $D = \begin{vmatrix} a & b & 0 \\ b & a & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0$, 则 a, b 应满足()

(A) $a = b$ 或 $a = -b$. (B) $a = 2b$ 且 $b \neq 0$.

(C) $b = 2a$ 且 $a \neq 0$. (D) $a = 1, b = \frac{1}{2}$.

【详解】 方法一: $D = \begin{vmatrix} a & b & 0 \\ b & a & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = a \cdot a \cdot 1 + b \cdot 0 \cdot 1 + 0 \cdot b \cdot 0 - 0 \cdot a \cdot 1 - b \cdot b \cdot 1 - a \cdot 0 \cdot 0$

$= a^2 - b^2 = 0$, 于是 $a = b$ 或 $a = -b$, 应选(A).

方法二:先将行列式按第 3 列展开,再按对角线法则计算二阶行列式,得

$$D = \begin{vmatrix} a & b & 0 \\ b & a & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} a & b \\ b & a \end{vmatrix} = a^2 - b^2 = 0.$$

于是 $a = b$ 或 $a = -b$, 应选(A).

方法技巧

本题主要考查三阶行列式的计算. 此类题目比较简单,直接利用三阶行列式的概念即可(如方法一). 此外,也可以考虑将三阶行列式按某一(行)列展开,转化为二阶行列式进行计算(如方法二). 此时,尽可能选取非零元素较少的(行)列.

【例 1.4】 $D = \begin{vmatrix} 246 & 427 & 327 \\ 1014 & 543 & 443 \\ -342 & 721 & 621 \end{vmatrix} = \underline{\hspace{2cm}}$.

【详解】 $D = \begin{vmatrix} 246 & 427 & 327 & 327 \\ 1014 & 543 & 443 & 443 \\ -342 & 721 & 621 & 621 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 246 & 100 & 327 \\ 1014 & 100 & 443 \\ -342 & 100 & 621 \end{vmatrix} = 600 \begin{vmatrix} 41 & 1 & 327 \\ 169 & 1 & 443 \\ -57 & 1 & 621 \end{vmatrix}$

$$= 600 \begin{vmatrix} 41 & 1 & 327 \\ 128 & 0 & 116 \\ -98 & 0 & 294 \end{vmatrix} = 600 \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 128 & 0 & 116 \\ -98 & 0 & 294 \end{vmatrix} = -600 \begin{vmatrix} 128 & 116 \\ -98 & 294 \end{vmatrix}$$

$$= -600 \begin{vmatrix} 128 & 500 \\ -98 & 0 \end{vmatrix} = -600 \times 500 \times 98 = -294 \times 10^5.$$

方法技巧

本题主要考查三阶行列式的计算. 如果选用三阶行列式的概念计算,由于行列式各元素的数值太大,则运算量过大. 观察题干元素特征,可见第二列和第三列相差 100,因此可以运用行列式的性质,使本题计算量减小. 一般情况,考试中应用行列式性质进行问题的求解情况较多,这就需要考生牢固掌握行列式的性质(详见核心知识全解).