

工商数量分析系列教材

(一)

线性代数 概率统计

(第二版)

张宝珊 编

南京航空学院

工商数量分析系列教材

(一)

线性代数 概率统计

(第二版)

张宝珊 编

南京航空学院

1991.12

内 容 简 介

本书是《工商数量分析》系列教材的第一册,简明且系统地介绍了线性代数和概率统计,为学习现代管理方法提供必备的、较为有用的基础知识。内容包括行列式、矩阵及其运算、向量、线性方程组、概率的基本概念和基本定理、随机变量及其分布和随机变量的数字特征、参数估计、假设检验和回归分析等。

本书通俗易懂,联系实际,着重培养学生的分析和解决实际问题的能力。本书可作为管理、财经、工科等有关的专业及管理干部培训教材或参考书。

《工商数量分析》第二册包括线性规划和目标规划,第三册包括网络技术,量本利分析,市场预测,经营决策,存贮论和投入产出等数量分析的内容。

工商数量分析系列教材(一)

线性代数 概率统计

张宝珊编

南京航空学院出版

(南京市御道街 29 号)

邮政编码 210016

南京航空学院印刷厂印刷

1989 年 11 月第一版 1991 年 12 月第二版第二次印刷

开本:787×1092 毫米 1/16 印张 11.8

印数:1100~1700 册 字数:278.6 千字

J91-3-02 定价:5.90 元

目 录

第一篇 线性代数

第一章 行列式	(1)
§ 1—1 基本概念	(1)
§ 1—2 行列式的性质	(4)
§ 1—3 行列式按行(或列)展开	(5)
§ 1—4 高阶行列式	(8)
§ 1—5 克莱姆(Cramer)规则	(9)
§ 1—6 齐次线性方程组	(11)
习题一	(12)
行列式小结	(13)
第二章 矩阵及其运算	(15)
§ 2—1 矩阵的概念	(15)
§ 2—2 矩阵的运算	(19)
§ 2—3 分块矩阵	(25)
§ 2—4 逆矩阵	(28)
§ 2—5 矩阵的初等变换与初等阵	(32)
§ 2—6 矩阵的秩	(36)
习题二	(39)
矩阵及其运算小结	(40)
第三章 向量	(42)
§ 3—1 n 维向量及其线性运算	(42)
§ 3—2 向量组的线性相关性	(44)
§ 3—3 向量组的极大线性无关组	(52)
习题三	(55)
向量小结	(56)
第四章 线性方程组	(59)
§ 4—1 线性方程组的相容性	(59)
§ 4—2 齐次线性方程组	(61)
§ 4—3 非齐次线性方程组	(66)

§ 4—4 利用矩阵初等行变换解线性方程组	(69)
习题四	(72)
线性方程组小结	(73)
参考资料	(74)

第二篇 概率统计

预备知识:排列与组合	(75)
排列组合习题	(79)
第一章 概率的基本概念与基本定理	(80)
§ 1—1 随机事件	(80)
§ 1—2 样本空间和事件的运算	(81)
§ 1—3 频率和概率	(83)
§ 1—4 古典概型	(84)
§ 1—5 概率的加法定理	(86)
§ 1—6 条件概率	(87)
§ 1—7 概率的乘法定理	(89)
§ 1—8 事件的独立性	(90)
§ 1—9 全概公式	(91)
§ 1—10 贝叶斯公式	(93)
§ 1—11 决策树(分支图)	(94)
习题一	(95)
概率的基本概念及基本定理小结	(96)
第二章 随机变量及其分布与随机变量的数字特征	(99)
§ 2—1 随机变量	(99)
§ 2—2 离散型随机变量的概率分布	(100)
§ 2—3 随机变量的分布函数	(105)
§ 2—4 连续型随机变量的概率密度	(107)
§ 2—5 正态分布	(109)
§ 2—6 数学期望(均值)	(112)
§ 2—7 方差	(115)
§ 2—8 多维随机变量及其分布	(119)
习题二	(128)
随机变量及其分布和数字特征小结	(129)
第三章 数理统计基本知识	(134)
§ 3—1 总体和样本	(134)
§ 3—2 参数的点估计	(135)
§ 3—3 参数的区间估计	(137)

§ 3—4 假设检验	(142)
§ 3—5 频率直方图	(151)
§ 3—6 一元线性回归分析	(153)
习题三	(159)
数理统计基本知识小结	(163)
参考资料	(168)
附表 1 标准正态分布表	(169)
附表 2 泊松分布表	(170)
附表 3 t 分布表	(172)
附表 4 χ^2 分布表	(173)
附表 5 F 分布表	(175)

第一篇 线性代数

在经济、管理和工程技术活动中,大量存在着或近似地存在着变量之间的线性关系。线性代数主要是研究变量间的线性关系。为了便于研究变量间的线性关系,1850年西尔威斯特(Sylvester)提出矩阵概念,1858年凯利(Cayley)建立了矩阵运算规则,对矩阵的认识和运用日益加深,并在经济、管理和工程技术方面得到了广泛的应用和充分的发展。

本篇主要内容有行列式、矩阵及其运算、向量、线性方程组等。矩阵是全篇主要内容,用它解决线性方程组求解,为学习线性规划打下了基础。

第一章 行列式

§ 1-1 基本概念

一、二元线性方程组与二阶行列式

例 1-1 某厂生产 A、B 两种产品。单位产品所需资源及现有资源如表 1-1。

表 1-1

资源 \ 产品	A	B	现有资源
C	4	1	11
D	2	3	13

要求恰好用完现有的资源,问该厂应生产 A、B 两种产品各多少?

解: 设生产产品 A、B 的数量分别为 x_1 、 x_2 , 上述问题可以写成二元线性方程组

$$\begin{cases} 4x_1 + x_2 = 11 \\ 2x_1 + 3x_2 = 13 \end{cases} \quad (1-1)$$

用消元法消去 x_1 或 x_2 后, 解得 $x_1 = 2$, $x_2 = 3$ 。

用一般的数学表达式, 上述类型的问题可以写成

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 \end{cases} \quad (1-2)$$

式中: a_{ij} ($i=1,2; j=1,2$) 是变量 x_j ($j=1,2$) 的系数, b_i ($i=1,2$) 是常数项。i 称为行标, 表示第 i 个方程; j 称为列标, 表示第 j 个变量 x_j 的系数。例如, a_{21} 表示第 2 个方程中 x_1 的系数。

用消元法消去 x_2 得:

$$(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x_1 = b_1a_{22} - a_{12}b_2$$

同样,消去 x_1 得

$$(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x_2 = a_{11}b_2 - b_1a_{21}$$

当 $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0$ 时,有

$$x_1 = \frac{b_1a_{22} - a_{12}b_2}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}, \quad x_2 = \frac{a_{11}b_2 - b_1a_{21}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}} \quad (1-3)$$

为了便于记忆,现在来研究一下(1-3)式的结构,找出它的规律。从(1-3)式可看出 x_1, x_2 的分母是相同的,都等于 $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$,不含方程组(1-2)右端的常数项 b_1, b_2 ,只是由方程组(1-2)的系数所确定。现将这些系数按它们在方程组中原位置写出,并在两侧各加一直线,用符号

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

表示 $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$,即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \quad (1-4)$$

符号 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$ 称为二阶行列式。横的叫行,竖的叫列,它含有两行、两列。 a_{ij} 叫行列式的元素,是第 i 行第 j 列元素。行列式有两条对角线,一条是从左上角至右下角,称为主对角线,另一条是从右上角至左下角,称为副对角线。见图 1-1。(1-4)式右端第一项 $a_{11}a_{22}$ 是主对角线上两个元素的乘积,取正号;第二项 $a_{12}a_{21}$ 是副对角线上两个元素的乘积,取负号。

行列式 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$ 称为方程组(1-2)的

系数行列式,记作 D ,即

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

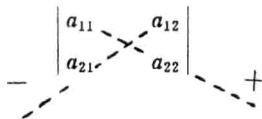


图 1-1

从(1-3)式右端分子可知,将 a_{11}, a_{21} 依次换为 b_1, b_2 就得到 x_1 的分子,将 a_{12}, a_{22} 换成 b_1, b_2 就得到 x_2 的分子,分别用 D_1, D_2 来表示它们。即

$$D_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix} = b_1a_{22} - a_{12}b_2$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix} = a_{11}b_2 - b_1a_{21}$$

于是(1-3)式可写成

$$\begin{cases} x_1 = \frac{D_1}{D} = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}} \\ x_2 = \frac{D_2}{D} = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}} \end{cases} \quad (1-5)$$

这样,用二阶行列式表示二元线性方程组(1-2)的解,既简单,又便于记忆。这里必须指出,(1-5)式只有当 $D \neq 0$ 时,(1-2)式有唯一确定的解,由(1-5)式表示。

现在用行列式解例 1-1 中的(1-1)式。即求解

$$\begin{cases} 4x_1 + x_2 = 11 \\ 2x_1 + 3x_2 = 13 \end{cases}$$

解:

$$\because D = \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 12 - 2 = 10$$

$$D_1 = \begin{vmatrix} 11 & 1 \\ 13 & 3 \end{vmatrix} = 33 - 13 = 20$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} 4 & 11 \\ 2 & 13 \end{vmatrix} = 52 - 22 = 30$$

$\therefore$ 由公式(1-5)得

$$x_1 = \frac{D_1}{D} = \frac{20}{10} = 2, \quad x_2 = \frac{D_2}{D} = \frac{30}{10} = 3.$$

二、三阶行列式

用二阶行列式解二元线性方程组的方法,可推广用三阶行列式解三元线性方程组。先定义三阶行列式。

定义

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}$$

称为三阶行列式。可用对角线法求得,见图 1-2。

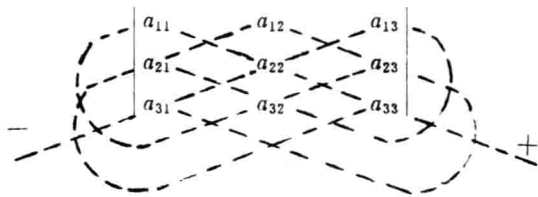


图 1-2

例 1-2 计算三阶行列式

$$D = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -4 & 5 & -6 \\ 7 & -8 & 9 \end{vmatrix}$$

$$\begin{aligned} \text{解: } D &= 1 \cdot 5 \cdot 9 + (-2) \cdot (-6) \cdot 7 + 3 \cdot (-4) \cdot (-8) - 3 \cdot 5 \cdot 7 \\ &\quad - (-2) \cdot (-4) \cdot 9 - 1 \cdot (-6) \cdot (-8) \\ &= 45 + 84 + 96 - 105 - 72 - 48 = 0 \end{aligned}$$

§ 1-2 行列式的性质

将行列式

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

的行与列对换, 所得的行列式

$$D' = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix}$$

称为行列式 D 的转置行列式。

性质 1 行列式 D 与它的转置行列式 D' 等值 ($D=D'$)。即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix}$$

利用对角线法计算等式两边的行列式的值可得到验证。

由此可知, 在行列式中, 行与列具有同等地位。因此, 对行成立的性质, 对列也一定成立; 反之也对。

性质 2 在行列式中, 两行(或列)对调, 其绝对值不变, 仅改变符号。

例如, 第一行与第三行对调, 得

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \end{vmatrix}$$

此性质用对角线法容易证实。

性质 3 在行列式中, 有两行(或列)相同, 其值为零。

例如, 第一行与第二行相同, 即

$$D_1 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

在 D_1 中将第一行与第二行对调, 行列式 D_1 不变, 但另一方面由性质 2 知, 它应改变符号。因此, 得 $D_1 = -D_1$, 即 $2D_1 = 0$, $\therefore D_1 = 0$ 。

性质 4 把行列式的某行(或列)的所有元素同乘以某一数 k , 等于以数 k 乘这个行列式。

例如

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ ka_{21} & ka_{22} & ka_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = k \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

事实上, 如果按对角线法计算左端的行列式, 所得各项都有因子 k , 提出公因子 k 后, 所

剩下的多项式刚好是右端行列式的值。

由此可得：

推论 1 行列式中某行(或列)各元素的公因子可以提到行列式记号的外边。

推论 2 行列式中如果有一行(或列)的元素全部为零,则此行列式等于零。

性质 5 在行列式中,如果有两行(或列)对应元素成比例,则此行列式等于零。

例如,下述行列式由性质 4 和性质 3 得

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ ka_{11} & ka_{12} & ka_{13} \end{vmatrix} = k \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \end{vmatrix} = 0$$

性质 6 在行列式中,如果某行(或列)的各元素是两项之和,则此行列式等于两个行列式之和。

例如,

$$\begin{vmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} & a_{13} + b_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

事实上,如果按对角线法计算左端行列式,所得各项都含有两项式作为它的因子,乘开两项后,含有 a_{11}, a_{12}, a_{13} 的各项,即得到右端第一个行列式,含有 b_{11}, b_{12}, b_{13} 的各项,即得到右端第二个行列式。

性质 7 把行列式的某行(或列)各元素同乘以一个数后,加到另一行(或列)对应的元素上,行列式的值不变。

例如,第一列各元素同乘以 k 后加到第二列上,由性质 6 得

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} + ka_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} + ka_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} + ka_{31} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & ka_{11} & a_{13} \\ a_{21} & ka_{21} & a_{23} \\ a_{31} & ka_{31} & a_{33} \end{vmatrix}$$

上式右端第二个行列式中有两列对应元素成比例,由性质 5,右端第二个行列式等于零,于是得到

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} + ka_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} + ka_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} + ka_{31} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

§ 1-3 行列式按行(或列)展开

现在利用上节行列式的性质来简化行列式的计算。为此,先引入余子式和代数余子式两个新概念。

余子式:把行列式中某一元素所在的行和列划去后,留下来的行列式称为这个行列式对应于该元素的余子式。例如,行列式

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

对应于元素 a_{23} 的余子式为

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix},$$

对应于元素 a_{31} 的余子式为

$$\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix}$$

代数余子式: 设行列中某一元素所在行数为 i , 列数为 j , 将对应于该元素的余子式乘上 $(-1)^{i+j}$ 所得的式子称为该元素的代数余子式。例如, 行列式 D 中, 对应于元素 a_{23} 的代数余子式(记作 A_{23})为

$$A_{23} = (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

对应于元素 a_{31} 的代数余子式(记作 A_{31})为

$$A_{31} = (-1)^{3+1} \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix}$$

一般地, 元素 a_{ij} 的代数余子式用 A_{ij} 表示。

定理 1 行列式等于它的任意一行(或列)的所有元素与它们对应的代数余子式乘积的和。即按行展开有

$$D = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13} = \sum_{j=1}^3 a_{1j}A_{1j}$$

$$D = a_{21}A_{21} + a_{22}A_{22} + a_{23}A_{23} = \sum_{j=1}^3 a_{2j}A_{2j}$$

$$D = a_{31}A_{31} + a_{32}A_{32} + a_{33}A_{33} = \sum_{j=1}^3 a_{3j}A_{3j}$$

按列展开有

$$D = a_{11}A_{11} + a_{21}A_{21} + a_{31}A_{31} = \sum_{i=1}^3 a_{i1}A_{i1}$$

$$D = a_{12}A_{12} + a_{22}A_{22} + a_{32}A_{32} = \sum_{i=1}^3 a_{i2}A_{i2}$$

$$D = a_{13}A_{13} + a_{23}A_{23} + a_{33}A_{33} = \sum_{i=1}^3 a_{i3}A_{i3}$$

证明 只证明第一个式子其余五个式证明方法完全相同。

用对角线法展开 D , 把含有元素 a_{11} 、 a_{12} 、 a_{13} 的项分别括在一起, 并将公因子 a_{11} 、 a_{12} 和 a_{13} 提出得

$$\begin{aligned} D &= a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{32}a_{23}) - a_{12}(a_{21}a_{33} - a_{23}a_{31}) + a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31}) \\ &= a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{12}(-1) \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} \\ &= a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13} \end{aligned}$$

例 1-3 将例 1-2 中的行列式

$$D = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -4 & 5 & -6 \\ 7 & -8 & 9 \end{vmatrix}.$$

按第二行展开,并计算它的值。

解:

$$\begin{aligned} D &= (-4) \cdot (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} -2 & 3 \\ -8 & 9 \end{vmatrix} + 5(-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 7 & 9 \end{vmatrix} + (-6)(-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 7 & -8 \end{vmatrix} \\ &= 4 \cdot (-18 + 24) + 5 \cdot (9 - 21) + 6 \cdot (-8 + 14) \\ &= 24 - 60 + 36 \\ &= 0 \end{aligned}$$

结果与例 1-2 用对角线法计算的结果相同。

定理 2 行列式某一行(或列)的各元素与另一行(或列)对应元素的代数余子式的乘积的和等于零。即

$$\begin{aligned} a_{11}A_{21} + a_{12}A_{22} + a_{13}A_{23} &= \sum_{j=1}^3 a_{1j}A_{2j} = 0 \\ a_{11}A_{31} + a_{12}A_{32} + a_{13}A_{33} &= \sum_{j=1}^3 a_{1j}A_{3j} = 0 \\ \sum_{j=1}^3 a_{2j}A_{1j} &= 0; \quad \sum_{j=1}^3 a_{2j}A_{3j} = 0 \text{ 等等。} \end{aligned}$$

证明 只需证明第一个等式,其余的等式证明方法完全相同。

$$\begin{aligned} &a_{11}A_{21} + a_{12}A_{22} + a_{13}A_{23} \\ &= a_{11}(-1) \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{12} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}(-1) \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = 0 \end{aligned}$$

后一个三阶行列式按第二行展开即得上式,此三阶行列式有两行对应元素相同,故其值为零。

归纳定理 1 和定理 2 可得

$$\sum_{j=1}^3 a_{ij}A_{kj} = \begin{cases} D, & i = k \\ 0, & i \neq k \end{cases} \quad (1-6)$$

$$\sum_{i=1}^3 a_{ij}A_{ik} = \begin{cases} D, & j = k \\ 0, & j \neq k \end{cases} \quad (1-7)$$

例 1-4 利用行列式性质计算行列式

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 4 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \end{vmatrix}$$

解:将第 1 行加到第 2 行上去,再将第 1 行乘以 (-2) 加到第三行上去,再按第二列展开得

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 4 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 6 & 0 & 5 \\ -3 & 0 & -7 \end{vmatrix} \\
= 1 \cdot (-1) \begin{vmatrix} 6 & 5 \\ -3 & -7 \end{vmatrix} + 0 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -3 & -7 \end{vmatrix} + 0 \cdot (-1) \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 6 & 5 \end{vmatrix} \\
= -1 \cdot (-42 + 15) \\
= 27$$

§ 1-4 高阶行列式

二阶和三阶行列式的概念,可类似地推广到四阶或更高阶的行列式。在 § 1-2 中,有关三阶行列式的性质,以及 § 1-3 中行列式按行(或列)展开的方法,对任意阶行列式也完全成立。但必须注意,对于四阶及更高阶的行列式,在 § 1-1 中所讲的对角线法此处不适用,只能用按行(或列)展开的方法来计算高阶行列式。如果先利用性质 7,使同一行(或列)中一些元素为零,则计算变得更简单些。现在以四阶行列式为例说明如下。

例 1-5 四阶行列式

$$D = \begin{vmatrix} 3 & -1 & 1 & 4 \\ 1 & -4 & 0 & 7 \\ 2 & 6 & -2 & -3 \\ 2 & 3 & 1 & 2 \end{vmatrix}$$

(1)按第 1 列展开;(2)按第二行展开;(3)计算此行列式。

解:

$$\begin{aligned}
(1) D &= 3 \cdot (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} -4 & 0 & 7 \\ 6 & -2 & -3 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix} + 1 \cdot (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} -1 & 1 & 4 \\ 6 & -2 & -3 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix} \\
&\quad + 2 \cdot (-1)^{3+1} \begin{vmatrix} -1 & 1 & 4 \\ -4 & 0 & 7 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix} + 2 \cdot (-1)^{4+1} \begin{vmatrix} -1 & 1 & 4 \\ -4 & 0 & 7 \\ 6 & -2 & -3 \end{vmatrix} \\
(2) D &= 1 \cdot (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} -1 & 1 & 4 \\ 6 & -2 & -3 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix} + (-4) \cdot (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 3 & 1 & 4 \\ 2 & -2 & -3 \\ 2 & 1 & 2 \end{vmatrix} \\
&\quad + 0 + 7 \cdot (-1)^{2+4} \begin{vmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 2 & 6 & -2 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix}
\end{aligned}$$

通过上述展开可以看到,如果要用(1)(即按第一列展开)计算,需要计算四个三阶行列式;如果要用(2)(即按第二行展开)计算,因为第二行的元素中有一个零,只需计算三个行列式。如果利用性质 7,先在某行(或列)中,除去一个元素外,把其余的元素都化为零(造“0”),然后再按行(或列)展开计算,这样较简单些。

(3)在 D 中,把第 1 行乘 2 加到第 3 行上,第 1 行乘 (-1) 加到第 4 行上,使 $a_{33}=a_{43}=0$,

然后再按第 3 列展开。

$$D = \begin{vmatrix} 3 & -1 & 1 & 4 \\ 1 & -4 & 0 & 7 \\ 8 & 4 & 0 & 5 \\ -1 & 4 & 0 & -2 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 1 & -4 & 7 \\ 8 & 4 & 5 \\ -1 & 4 & -2 \end{vmatrix}$$

$$= 4 \begin{vmatrix} 1 & -1 & 7 \\ 8 & 1 & 5 \\ -1 & 1 & -2 \end{vmatrix}$$

把此三阶行列式的第 2 列加到第一列上, 再按第 1 列展开, 得

$$D = 4 \begin{vmatrix} 0 & -1 & 7 \\ 9 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & -2 \end{vmatrix} = 4 \cdot 9(-1)^{2+1} \begin{vmatrix} -1 & 7 \\ 1 & -2 \end{vmatrix}$$

$$= 36 \cdot (-1)(2-7)$$

$$= 180$$

例 1-6 计算行列式

$$D = \begin{vmatrix} 2 & -3 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 6 & 7 \\ 3 & -5 & 4 & 5 \\ -1 & 1 & 2 & 2 \end{vmatrix}$$

解: 为了使 D 中第 1 行除 $a_{13}=1$ 外, 其余全化为零, 把 D 中第 3 列各元素乘以 (-2) 加到第 1 列上, 第 3 列各元素乘以 3 加到第 2 列上, 然后再按第 1 行展开, 得

$$D = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ -11 & 21 & 6 & 7 \\ -5 & 7 & 4 & 5 \\ -5 & 7 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} -11 & 21 & 7 \\ -5 & 7 & 5 \\ -5 & 7 & 2 \end{vmatrix} = 7 \begin{vmatrix} -11 & 3 & 7 \\ -5 & 1 & 5 \\ -5 & 1 & 2 \end{vmatrix}$$

把此三阶行列式的第 2 行乘以 (-1) 加到第 3 行上, 得

$$D = 7 \begin{vmatrix} -11 & 3 & 7 \\ -5 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & -3 \end{vmatrix} = 7 \cdot (-3) \cdot (-1)^{3+3} \begin{vmatrix} -11 & 3 \\ -5 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= -21 \cdot (-11 + 15) = -84。$$

§ 1-5 克莱姆(Cramer)规则

在 § 1-1 中, 对二元线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 \end{cases}$$

当系数行列式 $D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \neq 0$ 时, 有唯一确定的解

$$x_1 = \frac{D_1}{D} = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}, \quad x_2 = \frac{D_2}{D} = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \\ a_{21} & a_{12} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}$$

其中 D_1, D_2 是把行列式 D 中对应的未知数各系数换成(在等号右端的)常数项后的行列式。

以上这种方法可推广到三元线性方程组及更多变元的线性方程组。现在利用三阶行列式来解三元线性方程组,证明从略。

设三元线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 \end{cases} \quad (1-8)$$

若这个方程组的系数行列式

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \neq 0$$

则方程组(1-8)有唯一确定的解

$$x_1 = \frac{D_1}{D}, \quad x_2 = \frac{D_2}{D}, \quad x_3 = \frac{D_3}{D} \quad (1-9)$$

其中 D_1, D_2, D_3 是把行列式 D 中对应的未知数各系数换成(在等号右端的)常数项后的三阶行列式,即

$$D_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{22} & a_{33} \end{vmatrix}, \quad D_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}, \quad D_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}$$

例 1-7 解方程组
$$\begin{cases} 2x - 3y + z = -1 \\ x + y + z = 6 \\ 3x + y - 2z = -1 \end{cases}$$

解:

$$D = \begin{vmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & -2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -4 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 5 & 3 & 0 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & -4 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} = -23$$

$$D_1 = \begin{vmatrix} -1 & -3 & 1 \\ 6 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & -3 & 1 \\ 7 & 4 & 0 \\ -3 & -5 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 7 & 4 \\ -3 & -5 \end{vmatrix} = -23$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 6 & 1 \\ 3 & -1 & -2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -1 & 7 & 1 \\ 7 & -3 & -2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 7 \\ 7 & -3 \end{vmatrix} = -46$$

$$D_3 = \begin{vmatrix} 2 & -3 & -1 \\ 1 & 1 & 6 \\ 3 & 1 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & -5 & -13 \\ 1 & 1 & 6 \\ 0 & -2 & -19 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} -5 & -13 \\ -2 & -19 \end{vmatrix} = -69$$

$$x = \frac{-23}{-23} = 1, \quad y = \frac{-46}{-23} = 2, \quad z = \frac{-69}{-23} = 3$$

如 $D=0$, 但 D_1, D_2, D_3 中至少有一个不等于零, 则方程组(1-8)无解。因为 x_1, x_2, x_3 取任何值都不能满足方程组(1-8)。

例 1-8 解方程组

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 = 1 \\ 2x_1 + 4x_2 = 0 \end{cases}$$

解:

$$\because D = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 0, \quad D_1 = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} = 4 \neq 0$$

上述方程组无解。这两个方程是矛盾的, x_1, x_2 取任何值都不满足上述两个方程式。

如果 $D=0$, 且 $D_1=D_2=D_3=0$, 则方程组(1-8)可能无解, 也可能有无穷多个解。

例 1-9 解方程组

$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ x + y + z = 2 \\ x + y + z = 3 \end{cases}$$

解: $D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0, \quad \text{同样 } D_1 = D_2 = D_3 = 0$

显然, 这三个方程是彼此矛盾的, 因而无解。

例 1-10 解方程组

$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ 2x + 2y + 2z = 2 \\ 3x + 3y + 3z = 3 \end{cases}$$

解:

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 3 \end{vmatrix} = 0, \quad \text{同样, } D_1 = D_2 = D_3 = 0$$

显然, 第一个方程乘 2 得第二个方程, 第一个方程乘 3 得第三个方程, 要解这个方程组, 只要解第一个方程即可。

$$z = 1 - x - y$$

其中 x, y 可以取任意值, 因此, 这个方程组有无穷多个解。

§ 1-6 齐次线性方程组

线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = 0 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = 0 \end{cases} \quad (1-10)$$