考研数学命题人士豪金系列丛书

2015

分类归纳+紧贴大纲+考点全覆盖+真题精析+习题精炼

考研数学命题人复习全书

题型强化练习参考答案

（数学二）

全国硕士研究生入学考试辅导用书编写组 编著

1 本书每章习题答案与详解 +2 篇北大、清华数学满分秘笈 +2 套原命题组成员密押试卷 +5 大考研命题人快速解题方法 +8 小时命题人数学串讲精华

北京航空航天大学出版社
BEIHANG UNIVERSITY PRESS

考研数学命题人土豪金系列丛书

分类归纳+紧贴大纲+考点全覆盖+真题精析+习题精炼

考研数学命题人复习全书

（数学二）

全国硕士研究生入学考试辅导用书编写组 编著

+ 本书每章习题答案与详解
+ 篇北大、清华数学满分秘笈
+ 套原命题组成员密押试卷
+ 大考研命题人快速解题方法
8 小时命题人数学串讲精华

北京航空航天大学出版社
BEIHANG UNIVERSITY PRESS

目　录

第一部分　高 等 数 学

第1章　函数、极限与连续　题型强化练习参考答案

一、选择题

1. [A]

由函数$f(x)$的表达式知，它在实数轴上除点$x=0,x=1$及$x=2$外处处有定义，在它的定义域上有

$$|f(x)|=\left|\frac{|x|\sin(x-2)}{x(x-1)(x-2)^2}\right|=\frac{1}{|(x-1)(x-2)|}\cdot\left|\frac{\sin(x-2)}{x-2}\right|$$
$$\leqslant\frac{1}{|(x-1)(x-2)|}.$$

由此可见，$f(x)$在区间$(-1,0)$内有界，而在任何以$x=1$或$x=2$为端点的开区间内无界. 故应选[A].

2. [B]

由于$\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}x\tan x\mathrm{e}^{\sin x}=\infty$，故$f(x)$无界；或考查$f(x)$在$x_n=2n\pi+\frac{\pi}{4}(n=1,2,\cdots)$的函数值，有$\lim\limits_{n\to\infty}f(x_n)=\lim\limits_{n\to\infty}x_n\mathrm{e}^{\frac{\sqrt{2}}{2}}=+\infty$. 可见，$f(x)$是无界函数. 故应选[B].

3. [A]

①$x_n=\begin{cases}n,当n为偶数时,\\0,当n为奇数时,\end{cases}$　$y_n=\begin{cases}0,当n为偶数时,\\n,当n为奇数时,\end{cases}$

则$\{x_n\}$、$\{y_n\}$都无界. 但$x_n\cdot y_n=0$，$\{x_ny_n\}$有界. 故[B]不正确.

② 若设$y_n=0$，x_n如①，则$\{y_n\}$有界，$x_n\cdot y_n=0$，(x_ny_n)有界. 故[C]不正确.

③$x_n=n$，$y_n=-n$，$\{x_n\}$和$\{y_n\}$都无界，但$x_n+y_n=0$，$\{x_n+y_n\}$有界，故[D]不正确.

4. [A]

由于$\lim\limits_{x\to0^+}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=\lim\limits_{t\to+\infty}(1+t)^{\frac{1}{t}}=\lim\limits_{t\to+\infty}\mathrm{e}^{\frac{\ln(1+t)}{t}}=\lim\limits_{t\to+\infty}\mathrm{e}^{\frac{1}{1+t}}=\mathrm{e}^0=1$，应选[A].

这里应注意$\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\frac{1}{x}\right)^x=\lim\limits_{x\to\infty}\left[\left(1-\frac{1}{x}\right)^{-x}\right]^{-1}=\mathrm{e}^{-1}\neq-\mathrm{e}$,

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{-x}=\lim_{x\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}\right]^{-1}=\mathrm{e}^{-1}\neq\mathrm{e}.$$

5. [B]

设$f(x)=\begin{cases}0,&x为有理数,\\1/x,x为无理数,\end{cases}$　$g(x)=\begin{cases}1/x,x为有理数,且x\neq0,\\0,&其他,\end{cases}$则

$$f(x)g(x)=0.$$

当$x\to0$时，$f(x)g(x)\to0$. 但$x\to0$时，$f(x)$及$g(x)$都不是无穷小，命题④不正确；且本例中$f(x)$及$g(x)$在$x=0$的任何邻域内都无界，但$f(x)g(x)=0$，在与前面相

同的邻域内有界，即命题①不正确. 应选[B].

6. [D]

$$\lim_{x\to1^-}\frac{x^2-1}{x-1}e^{\frac{1}{x-1}}=\lim_{x\to1^-}(x+1)e^{\frac{1}{x-1}}=2\cdot0=0,$$

$$\lim_{x\to1^+}\frac{x^2-1}{x-1}e^{\frac{1}{x-1}}=\lim_{x\to1^+}(x+1)e^{\frac{1}{x-1}}=\infty.$$

当 $x\to1$ 时，函数没有极限，也不是 ∞，故应选[D].

7. [B]

因为

$$\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to0}\frac{2^x+3^x-2}{x}=\lim_{x\to0}\frac{2^x\ln2+3^x\ln3}{1}=\ln2+\ln3,$$

且 $\ln2+\ln3\neq1$，所以应选[B].

8. [D]

由于 $x\to0$ 时，$1-\cos x\sim\frac{1}{2}x^2$，$\sqrt{1-x^2}-1\sim-\frac{1}{2}x^2$，

故 x^2，$1-\cos x$，$\sqrt{1-x^2}-1$ 是同阶无穷小，所以应选[D].

9. [A]

由 $\lim\limits_{x\to0}\frac{f(x)}{x^2}=-1$ 知，当 $x\to0$ 时，$f(x)\sim-x^2$，于是 $x^nf(x)\sim-x^{n+2}$.

又当 $x\to0$ 时，$\ln\cos x^2=\ln[1+(\cos x^2-1)]\sim\cos x^2-1\sim-\frac{1}{2}x^4$.

再根据题设有：$2<n+2<4$. 可见 $n=1$，故应选[A].

10. [D]

用排除法.

令 $$\varphi(x)=1-\frac{1}{x^2},f(x)=1,g(x)=1+\frac{1}{x^2},$$

显然 $\varphi(x)\leqslant f(x)\leqslant g(x)$，且

$$\lim_{x\to\infty}[g(x)-\varphi(x)]=\lim_{x\to\infty}\frac{2}{x^2}=0.$$

此时 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=1$. 故[A]和[C]都不正确.

为排除[B]，再令 $\varphi(x)=x-\frac{1}{x^2}$，$f(x)=x$，$g(x)=x+\frac{1}{x^2}$，显然 $\varphi(x)$，$f(x)$，$g(x)$ 满足题设全部条件，但 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=\infty$，故应选[D].

11. [A]

原式 $=\lim\limits_{x\to0}\frac{a(e^{\sin x}-1)+b(x-\sin x)}{c\tan x+d(1-\cos x)}\left(\frac{0}{0}\right)=\lim\limits_{x\to0}\frac{ae^{\sin x}\cos x+b(1-\cos x)}{c\sec^2x+d\sin x}$，

当 $a\neq0$ 时，原式 $\neq0$，故选[A].

12. [D]

[A]，[B]显然不对，因为由数列极限的不等式性质只能得出数列“当 n 充分大时”的情况，不可能得出“对任意 n 成立”的性质.

[C]也明显不对，因为“无穷小·无穷大”是未定型，极限可能存在也可能不存在.

故应选[D].

13. [A]

由基本初等函数的连续性及连续函数的四则运算法则，知$f(x)=\ln x+\sin x$在其定义域$0<x<+\infty$内连续，故应选[A].

14. [D]

由$f(x)$是奇函数有$f(0)=0$，又因为$f'(0)$存在，所以

$$f'(0)=\lim_{x\to0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to0}g(x),$$

又因为$x=0$是$g(x)$的间断点，且$\lim\limits_{x\to0}g(x)=f'(0)$. 所以$x=0$是$g(x)$的可去间断点. 故应选[D].

15. [B]

易计算得$f(x)=\begin{cases}1+x, & |x|<1,\\ \dfrac{1+x}{2}, & |x|=1,\\ 0, & |x|>1,\end{cases}$ 讨论即知.

由题设得极限为

$$f(x)=\begin{cases}1+x, & |x|<1,\\ \dfrac{1+x}{2}, & |x|=1,\\ 0, & |x|>1,\end{cases}$$

可知$x=-1$，$x=1$为函数的分段点，作为函数图形可知$x=1$为$f(x)$的间断点，$x=-1$为$f(x)$的连续点，因此应选[B].

16. [D]

因为 $$\lim_{x\to0}(x)=\lim_{x\to0}f\left(\frac{1}{x}\right)\frac{1}{x}=y\lim_{x\to\infty}f(y)=a,$$

从而，当$a=0=g(0)$时，$g(x)$在点$x=0$处连续；当$a\neq0$时，$g(x)$在点$x=0$处间断，即$g(x)$在点$x=0$处的连续性与a的取值有关. 故应选[D].

二、填空题

1. $\frac{6}{5}$ 原式 $=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^2+5}{5x^2+3x}\cdot\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sin\frac{2}{x}}{\frac{1}{x}}=\dfrac{6}{5}.$

2. e [解法一] 原式 $=\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\sin\dfrac{1}{x}+\cos\dfrac{1}{x}-1\right)^x$

$$=e^{\lim\limits_{x\to\infty}x\ln\left[1+\left(\sin\frac{1}{x}+\cos\frac{1}{x}-1\right)\right]}=e^{\lim\limits_{x\to\infty}x\left(\sin\frac{1}{x}+\cos\frac{1}{x}-1\right)}$$

又 $$\lim_{x\to\infty}\left(\sin\frac{1}{x}+\cos\frac{1}{x}-1\right)x=\lim_{x\to\infty}\frac{\sin\frac{1}{x}+\cos\frac{1}{x}-1}{\frac{1}{x}}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{\sin\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}}+\lim_{x\to\infty}\frac{-\frac{1}{2x^2}}{\frac{1}{x}}=1,$$

故原式 $= \mathrm{e}$.

［解法二］ 设 $u = \dfrac{1}{x}$，则当 $x \to \infty$ 时，$u \to 0$. 于是

$$原式 = \lim_{u \to 0}(\sin u + \cos u)^{\frac{1}{u}} = \mathrm{e}^{\lim\limits_{u \to 0}\frac{\ln(\sin u + \cos u)}{u}}.$$

而由洛必达法则，得

$$原式 = \lim_{u \to 0}\frac{\ln(\sin u + \cos u)}{u} = \lim_{u \to 0}\frac{\cos u - \sin u}{\sin u + \cos u} = 1,$$

故原式 $= \mathrm{e}$.

3. $\mathrm{e}^{\frac{n+1}{2}}$. 此极限是 1^{∞} 型未定式.

［解法一］

$$\begin{aligned}原式 &= \lim_{x \to 0}\exp\left\{\frac{1}{x}\ln\left(\frac{\mathrm{e}^{x} + \mathrm{e}^{2x} + \cdots + \mathrm{e}^{nx}}{n}\right)\right\}\\ &= \exp\left\{\lim_{x \to 0}\frac{\ln(\mathrm{e}^{x} + \mathrm{e}^{2x} + \cdots + \mathrm{e}^{nx}) - \ln n}{n}\right\},\end{aligned}$$

其中大括号内的极限是 $\dfrac{0}{0}$ 型未定式，因此由洛必达法则，有

$$\begin{aligned}&\lim_{x \to 0}\frac{\ln(\mathrm{e}^{x} + \mathrm{e}^{2x} + \cdots + \mathrm{e}^{nx}) - \ln n}{n}\\ =& \lim_{x \to 0}\frac{\mathrm{e}^{x} + 2\mathrm{e}^{2x} + \cdots + n\mathrm{e}^{nx}}{\mathrm{e}^{x} + \mathrm{e}^{2x} + \cdots + \mathrm{e}^{nx}} = \frac{1 + 2 + \cdots + n}{n} = \frac{n+1}{2}.\end{aligned}$$

于是原式 $= \mathrm{e}^{\frac{n+1}{2}}$.

［解法二］ 由于

$$\frac{(\mathrm{e}^{x} + \mathrm{e}^{2x} + \cdots + \mathrm{e}^{nx})^{nx}}{2} = \left[1 + \frac{(\mathrm{e}^{x} - 1) + (\mathrm{e}^{2x} - 1) + \cdots + (\mathrm{e}^{nx} - 1)}{n}\right]^{\frac{1}{x}},$$

又因

$$\begin{aligned}&\lim_{x \to 0}\frac{(\mathrm{e}^{x} - 1) + (\mathrm{e}^{2x} - 1) + \cdots + (\mathrm{e}^{nx} - 1)}{nx}\\ =& \frac{1}{n}\left[\lim_{x \to 0}\frac{\mathrm{e}^{x} - 1}{x} + \lim_{x \to 0}\frac{\mathrm{e}^{2x} - 1}{x} + \cdots \lim_{x \to 0}\frac{\mathrm{e}^{nx} - 1}{x}\right]\\ =& \frac{1}{n}(1 + 2 + \cdots + n) = \frac{1}{2}(n + 1),\end{aligned}$$

故原式 $= \mathrm{e}^{\frac{1}{2}(n+1)}$.

4. 1, −4. 不难得出

$$\lim_{x \to 0}\frac{\sin x}{\mathrm{e}^{x} - a}(\cos x - b) = \begin{cases}0, a \neq 1, 任何\ b,\\ 1 - b, a = 1, 任何\ b.\end{cases}$$

从而，若 $\lim\limits_{x \to 0}\dfrac{\sin x}{\mathrm{e}^{x} - a}(\cos x - b) = 5$，则必须且只需 $a = 1, 1 - b = 5$，即 $a = 1, b = -4$.

5. $\dfrac{4}{3}$ ［解法一］

$$\begin{aligned}\lim_{x \to 0}\left(\frac{1}{\sin^{2}x} - \frac{\cos^{2}x}{x^{2}}\right) &= \lim_{x \to 0}\frac{x^{2}\sin^{2}x\cos^{2}x}{x^{2}\sin^{2}x} = \lim_{x \to 0}\frac{x^{2} - \frac{1}{4}\sin^{2}2x}{x^{4}}\\ &= \lim_{x \to 0}\frac{x^{2} - \frac{1}{4}\sin 4x}{2x^{3}} = \lim_{x \to 0}\frac{1 - \cos 4x}{6x^{2}} = \lim_{x \to 0}\frac{\sin 4x}{3x} = \frac{4}{3}.\end{aligned}$$

[解法二]
$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{\sin^2 x}-\frac{\cos^2 x}{x^2}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{x^2\sin^2 x\cos^2 x}{x^2\sin^2 x}$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{x^2-\sin^2 x(1-\sin^2 x)}{x^4}\lim_{x\to 0}\left(\frac{x}{\sin x}\right)^2$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{x^2-\sin^2 x}{x^4}+\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^4$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x^3}+\lim_{x\to 0}\frac{x+\sin x}{x}+1$$
$$=1+2\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{3x^2}=1+\frac{1}{3}\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=\frac{4}{3}.$$

6. $\frac{1}{4}$　因为 $\lim\limits_{x\to+\infty}x\ln\frac{x+1}{x-1}=\ln\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\left(1+\frac{1}{x}\right)^x}{\left(1-\frac{1}{x}\right)^x}=\ln e^2=2$,

所以
$$\lim_{x\to 0}\frac{x}{f(2x)}=2,\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{2x}{f(2x)}=\frac{1}{2}\lim_{u\to 0}\frac{u}{f(u)}=2,$$

故 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=\frac{1}{4}$.

7. 16　原式
$$\xlongequal{\text{令 } x=-t}\lim_{t\to+\infty}\frac{\sqrt{at^2+t+2}-t+1}{\sqrt{t^2-\cos t}}=\lim_{t\to+\infty}\frac{\sqrt{a+1/t+2/t^2}-1+1/t}{\sqrt{1-(\cos t)/t}}$$
$$=\frac{\sqrt{a}-1}{1}=3,$$

故 $a=16$.

8. $\frac{1}{3}$
$$\lim_{x\to 0}\frac{(3+x)^x-3^x}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{3^x\left[\left(1+\frac{x}{3}\right)^x-1\right]}{x^2}$$
$$=\lim_{x\to 0}3^x\lim_{x\to 0}\frac{e^{x\ln(1+x/3)}-1}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{x\ln\left(1+\frac{x}{3}\right)}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{x}{3}}{x}=\frac{1}{3}.$$

9. 2　原式 $=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n+3\sqrt{n}-n+\sqrt{n}}{\sqrt{n+3\sqrt{n}}+\sqrt{n-\sqrt{n}}}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{4}{\sqrt{1+\frac{3}{\sqrt{n}}}+\sqrt{1-\frac{1}{\sqrt{n}}}}=2.$

10. $a=-\frac{3}{2}$　由 $(1+ax^2)^{\frac{1}{3}}-1\sim\frac{1}{3}ax^2$, $\cos x-1\sim-\frac{1}{2}x^2$,以及
$$\lim_{x\to 0}\frac{(1+ax^2)^{\frac{1}{3}}-1}{\cos x-1}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{3}ax^2}{-\frac{1}{2}x^2}=-\frac{2}{3}a=1,$$

可得　$a=-\frac{3}{2}$.

11. $\frac{1}{1-2a}$　由于
$$\ln\left[\frac{n-2na+1}{n(1-2a)}\right]^n=\ln\left[1+\frac{1}{n(1-2a)}\right]^n=n\ln\left[1+\frac{1}{n(1-2a)}\right],$$

利用等价无穷小代换，有

$$\ln\left[1+\frac{1}{n(1-2a)}\right] \sim \frac{1}{n(1-2a)}(n\to\infty).$$

于是 $\qquad$ 原式 $=\lim\limits_{x\to\infty} n\ln\left[1+\frac{1}{n(1-2a)}\right]=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{n}{n(1-2a)}=\frac{1}{1-2a}.$

12. $4e^{-1}$ $\quad \lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sqrt[n]{(n+1)(n+2)\cdots(n+n)}}{n}=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{n+1}{n}\cdot\frac{n+2}{n}\cdot\cdots\cdot\frac{(n+n)}{n}}$

$$=\lim_{n\to\infty}\exp\left[\sum_{i=1}^{n}\ln\left(1+\frac{i}{n}\right)\cdot\frac{1}{n}\right]=\exp\left\{\lim_{n\to\infty}\left[\sum_{i=1}^{n}\ln\left(1+\frac{i}{n}\right)\cdot\frac{1}{n}\right]\right\}$$

$$=e^{\int_0^1\ln(1+x)dx}=4e^{-1}.$$

三、解答题

1. 属 1^{∞} 型

$$原式=\lim_{x\to\infty}[1+(\cos\sqrt{x}-1)]^{\frac{1}{\cos\sqrt{x}-1}\frac{\pi}{x}(\cos\sqrt{x}-1)}.$$

由于 $\qquad \lim\limits_{x\to0^+}\frac{\pi}{x}(\cos\sqrt{x}-1)=\pi\lim\limits_{x\to0^+}\frac{-\frac{1}{2}(\sqrt{x})^2}{x}=-\frac{\pi}{2},$

故原式 $=e^{-\pi/2}$.

2. [解法一]

因为 $\left(1-x+\frac{x^2}{2}\right)e^x=\left(1-x+\frac{x^2}{2}\right)\left[1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+o(x^3)\right]=1+\frac{x^3}{6}+o(x^3),$

$$\sqrt{1+x^3}=(1+x^3)^{1/2}=1+\frac{x^3}{2}+o(x^3),$$

所以 $\qquad \lim\limits_{x\to0}\frac{\left(1-x+\frac{x^2}{2}\right)e^x-\sqrt{1+x^3}}{x^3}$

$$=\lim_{x\to0}\frac{\left[1+\frac{x^3}{6}+o(x^3)\right]-\left[1+\frac{x^3}{2}+o(x^3)\right]}{x^3}=\lim_{x\to0}\frac{-\frac{x^3}{3}+o(x^3)}{x^3}=-\frac{1}{3}.$$

[解法二]

$$\lim_{x\to0}\frac{\left(1-x+\frac{x^2}{2}\right)e^x-(1+x^3)^{1/2}}{x^3}-\lim_{x\to0}\frac{\left(1-x+\frac{x^2}{2}\right)e^x-1}{x^3}-\lim_{x\to0}\frac{(1+x^3)^{1/2}-1}{x^3}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{(x-1)e^x+\left(1-x+\frac{x^2}{2}\right)e^x}{3x^2}-\lim_{x\to0}\frac{\frac{1}{2}x^3}{x^3}=\lim_{x\to0}\frac{x^2}{6x^2}e^x-\frac{1}{2}=-\frac{1}{3}.$$

3. 这是 n 项和式和极限，当各项分母均相同是 n 时，n 项和式

$$x_n=\frac{\sin\frac{\pi}{n}}{n}+\frac{\sin\frac{2\pi}{n}}{n}+\cdots+\frac{\sin\frac{n\pi}{n}}{n}$$

是函数 $\sin\pi x$ 在 $[0,1]$ 区间上的一个积分和，于是可由定积分 $\int_0^1\sin\pi x dx$ 求得极限 $\lim\limits_{x\to+\infty}x_n$.

为了求$\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=1}^{n}\dfrac{\sin\frac{i\pi}{n}}{n+\frac{1}{i}}$，首先通过放缩化简 n 项和数列：

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{\sin\frac{i\pi}{n}}{n+1}\leqslant\sum_{i=1}^{n}\frac{\sin\frac{i\pi}{n}}{n+\frac{1}{i}}\leqslant\sum_{i=1}^{n}\frac{\sin\frac{i\pi}{n}}{n+0};$$

由于 $$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{\sin\frac{i\pi}{n}}{n+0}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\sin\frac{i\pi}{n}\int_0^1\sin\pi x\mathrm{d}x=\frac{2}{\pi},$$
根据夹逼准则，有

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{\sin\frac{i\pi}{n}}{n+\frac{1}{i}}=\frac{2}{\pi}.$$

4.【证明】首先，显然有 $x_n>0$，$\{x_n\}$ 有下界.

证明 x_n 单调减：用归纳法. $x_2=\sqrt{6+x_1}=\sqrt{6+10}=4<x_1$；设 $x_n<x_{n-1}$ 则

$$x_{n+1}=\sqrt{6+x_n}<\sqrt{6+x_{n-1}}=x_n.$$

由此，x_n 单调减. 由单调查有界准则，$\lim\limits_{x\to\infty}x_n$ 存在.

设$\lim\limits_{x\to\infty}x_n=a$，求 a：在恒等式 $x_{n+1}=\sqrt{6+x_n}$ 两边取极限，得 $a=\sqrt{6+a}$ 取得 $a=33$（$a=-2$ 舍去，因为 $x_n>0$，$a\geqslant0$）.

5.（Ⅰ）$\lim\limits_{x\to0}f(x)=\exp\left[\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln(a_1^x+a_2^x+\cdots+a_n^x)-\ln n}{x}\right]$

$$=\exp\left[\lim_{x\to0}\frac{a_1^x\ln a_1+a_2^x\ln a_2+\cdots+a_n^x\ln a_n}{a_1^x+a_2^x+\cdots+a_n^x}\right]$$

$$=\exp\left(\frac{\ln a_1+\ln a_2+\cdots+\ln a_n}{n}\right)=\mathrm{e}^{\frac{1}{n}\ln(a_1a_2\cdots a_n)}=\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}.$$

（Ⅱ）记 $a=\max(a_1,a_2,\cdots,a_n)$，则

$$a\left(\frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{x}}=\left(\frac{a^x}{n}\right)^{\frac{1}{x}}\leqslant f(x)\leqslant\left(\frac{na^x}{n}\right)^{\frac{1}{x}}=a,$$

而 $$\lim_{x\to+\infty}a\left(\frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to+\infty}a=a,$$

所以 $$\lim_{x\to+\infty}f(x)=a=\max(a_1,a_2,\cdots,a_n).$$

6.（1）在区域$(-\infty,1)$内，$y=x$ 的反函数就是它本身，又因函数 $y=x$ 的值域为$(-\infty,1)$，故其反函数 $x=y$ 的定义域也为$(-\infty,1)$，于是有 $y=f^{-1}(x)=x(-\infty<x<1)$.

（2）在区间$[1,4]$上由 $y=x^2$ 解出 $x=\pm\sqrt{y}$，因 $x\in[1,4]$，故 $x=\sqrt{y}$，又函数的值域为$[1,16]$，故其反函数定义域为$[1,16]$. 于是 $y=f^{-1}(x)=\sqrt{x}(1\leqslant x\leqslant16)$.

（3）在区间$(4,+\infty)$上由 $y=2^x$ 解出 $x=\log_2y$. 因函数 $y=2^x$ 的值域为$(16,+\infty)$，故其反函数定义域为$(16,+\infty)$，于是 $y=\log_2x(16<x<+\infty)$.

综上所述，所求反函数也是一分段函数，它的表达式为

$$y = f^{-1}(x) = \begin{cases} x, & -\infty < x < 1, \\ \sqrt{x}, & 1 \leqslant x \leqslant 16, \\ \log_2 x, & 16 < x < +\infty. \end{cases}$$

7.【证明】利用不等式 $2|ab| \leqslant a^2 + b^2$，有

$$|f(x)| \leqslant 1 + \left|\frac{2x}{1+x^2}\right| \leqslant 2.$$

故 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上有界.

8.【证明】在所给方程中，用 $\frac{1}{x}$ 代替 x 得：$af\left(\frac{1}{x}\right) + bf(x) = cx$，联立原方程，消去 $f\left(\frac{1}{x}\right)$ 得

$$(a^2 - b^2)f(x) = \frac{ac}{x} - bcx,$$

又 $|a| \neq |b|$，所以 $f(x) = \frac{c}{a^2 - b^2}\left(\frac{a}{x} - bx\right)$. 将 $-x$ 代入 $f(x)$ 表达式得

$$f(-x) = \frac{c}{a^2 - b^2}\left(-\frac{a}{x} + bx\right) = -\frac{c}{a^2 - b^2}\left(\frac{a}{x} - bx\right) = -f(x).$$

所以 $f(x)$ 为奇函数.

9.【证明】由周期函数及奇函数的积分性质，得

$$\begin{aligned} F(x+T) &= \int_0^{x+T} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^T f(t)\,\mathrm{d}t + \int_T^{x+T} f(t)\,\mathrm{d}t \\ &= \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)\,\mathrm{d}t + \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t = F(x). \end{aligned}$$

所以，$F(x) = \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$ 是以 T 为周期的周期函数.

(2) 对于任意的常数 k，有

$$G(x) = \int_a^x [f(t) - k + k]\,\mathrm{d}t = \int_a^x [f(t) - k]\,\mathrm{d}t + k(x - a).$$

由于 $k(x-a)$ 是线性函数，所以只需证明当 k 取某一值时 $g(x) = \int_a^x [f(t) - k]\,\mathrm{d}t$ 以 T 为周期即可.

由周期函数的定积分性质，得

$$\begin{aligned} g(x+T) &= \int_a^{x+T} [f(t) - k]\,\mathrm{d}t = \int_a^x [f(t) - k]\,\mathrm{d}t + \int_x^{x+T} [f(t) - k]\,\mathrm{d}t \\ &= g(x) + \int_0^T f(t)\,\mathrm{d}t - kT. \end{aligned}$$

取 $k = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)\,\mathrm{d}t$，则 $g(x+T) = g(x)$，即 $g(x)$ 是以 T 为周期的周期函数.

10. 题中给出了关于 $f(x)$ 及 $f(x)$ 的一个复合函数等式，此类题目的解法一般是利用变量代换，设法得到一个方程组，然后解出 $f(x)$. 为此，令 $t = \frac{x}{x-1}$，则 $x = \frac{t}{t-1}$，代入

原等式得

$$f(t)=af\left(\frac{t}{t-1}\right)+\varphi\left(\frac{t}{t-1}\right).$$

于是得到关于$f(x)$, $f\left(\frac{x}{x-1}\right)$的二元一次方程组为

$$\begin{cases}f\left(\frac{x}{x-1}\right)-af(x)=\varphi(x),\\ f(x)-af\left(\frac{x}{x-1}\right)=\varphi\left(\frac{x}{x-1}\right),\end{cases}$$

解得$f(x)=\frac{1}{1-a^2}\left[a\varphi(x)+\varphi\left(\frac{x}{x-1}\right)\right]$.

11.
$$\lim_{n\to\infty}\sin(\sqrt{n^2+1}\pi)=\lim_{n\to\infty}\sin[(\sqrt{n^2+1}-n)\pi+n\pi]$$
$$=\lim_{n\to\infty}(-1)^n\sin(\sqrt{n^2+1}-n)\pi=\lim_{n\to\infty}(-1)^n\sin\frac{\pi}{\sqrt{n^2+1}+n}=0,$$

这里用到当$n\to\infty$时，$\sin\frac{\pi}{\sqrt{n^2+1}+n}\sim\frac{\pi}{\sqrt{n^2+1}+n}\to 0(n\to\infty)$，又$|(-1)^n|=1$是有界量，根据有界量乘以无穷小仍是无穷小量知，$\lim\limits_{n\to\infty}\sin(\sqrt{n^2+1}\pi)=0$.

12. 由于

$$\sin\sqrt{x+1}-\sin\sqrt{x}=2\cos\frac{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}{2}\sin\frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x}}{2},$$

又因为$\left|\cos\frac{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}{2}\right|\leqslant 1$，且

$$\lim_{x\to+\infty}\sin\frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x}}{2}=\lim_{x\to+\infty}\sin\frac{1}{2(\sqrt{x+1}+\sqrt{x})}=0.$$

根据有界函数与无穷小量的乘积仍为无穷小量，所以

$$\text{原式}=\lim_{x\to+\infty}2\cos\frac{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}{2}\sin\frac{1}{2(\sqrt{x+1}+\sqrt{x})}=0.$$

13. 因当$x\to 0$时，$\ln(1+x^n)\sim x^n$，$\ln^m(1+x)\sim x^m$，所以

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x^n)}{\ln^m(1+x)}=\lim_{x\to 0}\frac{x^n}{x^m}=\begin{cases}\infty, & n<m,\\ 1, & n=m,\\ 0, & n>m.\end{cases}$$

14. 因为$\frac{e^{\frac{k+1}{n}}}{n+1}\leqslant\frac{e^{\frac{k+1}{n}}}{n+\frac{k^2}{n^2}}\leqslant\frac{e^{\frac{k+1}{n}}}{n}(k=0,1,\cdots,n-1)$，所以

$$\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n-1}e^{\frac{k+1}{n}}\leqslant x_n\leqslant\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}e^{\frac{k+1}{n}}.$$

又因为

$$\sum_{k=0}^{n-1}e^{\frac{k+1}{n}}=e^{\frac{1}{n}}\sum_{k=0}^{n-1}e^{\frac{k}{n}}=e^{\frac{1}{n}}\frac{1-e}{1-e^{\frac{1}{n}}},\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}e^{\frac{k+1}{n}}=\lim_{n\to\infty}(1-e)e^{\frac{1}{n}}\frac{\frac{1}{n}}{1-e^{\frac{1}{n}}}=e-1,$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n-1}e^{\frac{k+1}{n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}e^{\frac{k+1}{n}}=1\cdot(e-1)=e-1,$$

由夹逼准则得$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=e-1.$

15. 令 $x_n=\dfrac{11\cdot 12\cdot 13\cdot\cdots\cdot(10+n)}{2\cdot 5\cdot 8\cdot\cdots\cdot(3n-1)}$,则

$$0<x_n=\frac{11}{1}\cdot\frac{12}{2}\cdot\frac{13}{5}\cdot\cdots\cdot\frac{10+n}{3n-4}\cdot\frac{1}{3n-1}.$$

显然,当 $n>7$ 时就有 $3n-4>10+n$,此时(即当 $n>N=7$ 时)

$$0<x_n<\frac{C}{3n-1},$$

其中 $C=\dfrac{11}{1}\cdot\dfrac{12}{2}\cdot\dfrac{13}{5}\cdot\cdots\cdot\dfrac{17}{17}$. 若取 $y_n=0,z_n=\dfrac{C}{3n-1}$,则 $y_n\leqslant x_n\leqslant z_n$. 由于$\lim\limits_{n\to\infty}y_n=\lim\limits_{n\to\infty}z_n=0$,故所求极限为$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=0.$

16. 原式 $=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x(1-x^{x-1})}{1-x+\ln x}=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x[1-e^{(x-1)\ln x}]}{1-x+\ln x}$

$$=-\lim_{x\to1}\frac{x[e^{(x-1)\ln x}-1]}{1-x+\ln x}=\lim_{x\to1}\frac{-x(x-1)\ln x}{1-x+\ln x}$$

(因 $e^{(x-1)\ln x}-1\sim(x-1)\ln x,x\to1$ 时)

$$\xlongequal[\text{法则}]{\text{洛必达}}-\lim_{x\to1}\frac{(2x-1)\ln x+(x-1)}{(1/x)-1}=-\lim_{x\to1}\left[\frac{(2x^2-x)\ln x+x(x-1)}{1-x}\right]$$

$$=1-\lim_{x\to1}\frac{(2x^2-x)\ln x}{x-1x}\xlongequal[\text{法则}]{\text{洛必达}}1-\lim_{x\to1}\frac{(4x-1)\ln x+(2x-1)}{-1}$$

$$=1+\lim_{x\to1}[(4x-1)\ln x+(2x-1)]=1+1=2.$$

17. 原式$\xlongequal[\text{法则}]{\text{洛必达}}\lim\limits_{\varphi\to0}\left[\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{\cos\varphi}\dfrac{\sin\varphi}{\varphi}+\dfrac{2}{\cos2\varphi}\dfrac{\sin2\varphi}{2\varphi}+\cdots+\dfrac{n}{\cos\varphi}\cdot\dfrac{\sin n\varphi}{n\varphi}\right)\right.$

$$\left.\cdot\cos\varphi\sqrt{\cos2\varphi}\cdots\sqrt[n]{\cos n\varphi}\right]$$

$$=\frac{1}{2}(1+2+\cdots n)=\frac{n(n+1)}{4}.$$

18. 利用$\dfrac{1}{n(n+1)(n+2)}=\dfrac{1}{2}\left[\dfrac{1}{n(n+1)}-\dfrac{1}{(n+1)(n+2)}\right]$,分别取 $n=1,2,\cdots$,

求和得 $\dfrac{1}{1\cdot2\cdot3}+\dfrac{1}{2\cdot3\cdot4}+\cdots+\dfrac{1}{n(n+1)(n+2)}$

$$=\frac{1}{2}\left[\left(\frac{1}{1\cdot2}-\frac{1}{2\cdot3}\right)+\left(\frac{1}{2\cdot3}-\frac{1}{3\cdot4}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n(n+1)}-\frac{1}{(n+1)(n+2)}\right)\right]$$

$$=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{1\cdot2}-\frac{1}{(n+1)(n+2)}\right].$$

故 原式 $=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{2}\left[\dfrac{1}{1\cdot2}-\dfrac{1}{(n+1)(n+2)}\right]=\dfrac{1}{4}.$

19. 设 $x_n=\dfrac{(2n-1)!!}{(2n)!!}=\dfrac{1\cdot3\cdot5\cdot\cdots\cdot(2n-1)}{2\cdot4\cdot6\cdot\cdots\cdot(2n)}$. 因为 $x_{n+1}=x_n\cdot\dfrac{2n+1}{2n+2}<x_n$,且 $x_n>0$,所以由单调有界准则知$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 存在.

又因为

$$\frac{1}{x_n}=\frac{2\cdot4\cdot6\cdot\cdots\cdot(2n)}{1\cdot3\cdot5\cdot\cdots\cdot(2n-1)}>\frac{3\cdot5\cdot7\cdot\cdots\cdot(2n+1)}{2\cdot4\cdot6\cdot\cdots\cdot2n}=x_n\cdot(2n+1),$$

即 $x_n^2<\dfrac{1}{2n+1}$，所以 $0<x_n<\dfrac{1}{\sqrt{2n+1}}$，由夹逼准则知 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=0$.

20. 先将 n 项乘积化简为下述形式：

$$\sqrt{2}\cdot\sqrt[4]{2}\cdot\sqrt[8]{2}\cdot\cdots\cdot\sqrt[2^n]{2}=2^{1/2+1/4+1/8+\cdots+1/2^n}=2^{[1-(1/2)^n]},$$

再在上式两端求极限，得到

$$\lim_{n\to\infty}(\sqrt{2}\cdot\sqrt[4]{2}\cdot\sqrt[8]{2}\cdot\cdots\cdot\sqrt[2^n]{2})=\lim_{n\to\infty}2^{[1-(1/2^n)]}=2.$$

21. 因为 $x\to1$ 时，$\sin(x-1)\sim x-1$，所以原式 $=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{(x-1)^2}{x^2+ax+b}=1$.

又因为 $\lim\limits_{x\to1}(x-1)^2=0$，所以 $\lim\limits_{x\to1}(x^2+ax+b)=0$. 由此得 $1+a+b=0$. 把 $b=-1-a$ 代入原式得

$$原式=\lim_{x\to1}\frac{(x-1)^2}{(x-1)(x+1+a)}=\lim_{x\to1}\frac{x-1}{x+1+a}=1.$$

因为 $\lim\limits_{x\to1}(x-1)=0$，所以 $\lim\limits_{x\to1}(x+1+a)=0$，故得 $a=-2,b=1$.

22. 用等价无穷小代换分别得到：

$$\lim_{x\to0}\frac{(x^2/2)\cdot x^2}{x\cdot x^n}=\frac{1}{2}\lim_{x\to0}x^{3-n}=0,\quad \lim_{x\to0}\frac{x\cdot x^n}{x^2}=\lim_{x\to0}x^{n-1}=0,$$

因而 $3-n>0,n-1>0$. 由 $1<n<3$ 得 $n=2$.

23. 因为分母为 x^2，将 $\ln(1+x)$ 展成2阶带拉格朗日型余项的麦克劳林公式：

$$\ln(1+x)=x-(1/2)x^2+o(x^2),$$

则

$$\begin{aligned}原式&=\lim_{x\to0}\frac{x-(1/2)x^2+o(x^2)-(ax+bx^2)}{x^2}\\&=\lim_{x\to0}\frac{(1-a)x-(1/2+b)x^2+o(x^2)}{x^2}=2.\end{aligned}$$

于是必有 $1-a=0,-(1/2+b)=2$，解之得：$a=1,b=-5/2$.

24. 注意到 $\lim\limits_{x\to0+0}2^{\frac{1}{x}}=\infty$，$\lim\limits_{x\to0-0}2^{\frac{1}{x}}=0$，应先计算 $f(x)$ 在点 $x=0$ 处的左、右极限：

$$f(0+0)=\lim_{x\to0+0}f(x)=\lim_{x\to+0}\frac{1-(1/2^{\frac{1}{x}})}{1+(1/2^{\frac{1}{x}})}=1,$$

$$f(0-0)=\lim_{x\to0-0}f(x)=\lim_{x\to-0}\frac{2^{\frac{1}{x}}-1}{2^{\frac{1}{x}}+1}=-1.$$

因 $f(0+0)\neq f(0-0)$，故 $f(x)$ 在 $x=0$ 处的极限不存在，因而在 $x=0$ 处不连续.

25. (1) 若 $x=0$ 是 $f(x)$ 的无穷间断点，则必要求

$$\lim_{x\to0}\frac{e^x-b}{(x-a)(x-1)}=\infty，即\lim_{x\to0}\frac{(x-a)(x-1)}{e^x-b}=\frac{(-a)(-1)}{e^0-b}=\frac{a}{1-b}=0.$$

因此，当 $a=0,b\neq1$ 时，$x=0$ 是 $f(x)$ 的无穷间断点.

(2) 若 $x=1$ 是 $f(x)$ 的可去间断点，则 $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{e^x-b}{(x-a)(x-1)}$ 存在. 因为

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n-1}e^{\frac{k+1}{n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}e^{\frac{k+1}{n}}=1\cdot(e-1)=e-1,$$

由夹逼准则得$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=e-1$.

15. 令 $x_n=\dfrac{11\cdot12\cdot13\cdot\cdots\cdot(10+n)}{2\cdot5\cdot8\cdot\cdots\cdot(3n-1)}$,则

$$0<x_n=\frac{11}{1}\cdot\frac{12}{2}\cdot\frac{13}{5}\cdot\cdots\cdot\frac{10+n}{3n-4}\cdot\frac{1}{3n-1}.$$

显然,当 $n>7$ 时就有 $3n-4>10+n$,此时(即当 $n>N=7$ 时)

$$0<x_n<\frac{C}{3n-1},$$

其中 $C=\dfrac{11}{1}\cdot\dfrac{12}{2}\cdot\dfrac{13}{5}\cdot\cdots\cdot\dfrac{17}{17}$. 若取 $y_n=0,z_n=\dfrac{C}{3n-1}$,则 $y_n\leqslant x_n\leqslant z_n$. 由于$\lim\limits_{n\to\infty}y_n=\lim\limits_{n\to\infty}z_n=0$,故所求极限为$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=0$.

16. 原式 $=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x(1-x^{x-1})}{1-x+\ln x}=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x[1-e^{(x-1)\ln x}]}{1-x+\ln x}$

$$=-\lim_{x\to1}\frac{x[e^{(x-1)\ln x}-1]}{1-x+\ln x}=\lim_{x\to1}\frac{-x(x-1)\ln x}{1-x+\ln x}$$

(因 $e^{(x-1)\ln x}-1\sim(x-1)\ln x,x\to1$ 时)

$$\xlongequal[\text{法则}]{\text{洛必达}}-\lim_{x\to1}\frac{(2x-1)\ln x+(x-1)}{(1/x)-1}=-\lim_{x\to1}\left[\frac{(2x^2-x)\ln x+x(x-1)}{1-x}\right]$$

$$=1-\lim_{x\to1}\frac{(2x^2-x)\ln x}{x-1x}\xlongequal[\text{法则}]{\text{洛必达}}1-\lim_{x\to1}\frac{(4x-1)\ln x+(2x-1)}{-1}$$

$$=1+\lim_{x\to1}[(4x-1)\ln x+(2x-1)]=1+1=2.$$

17. 原式$\xlongequal[\text{法则}]{\text{洛必达}}\lim\limits_{\varphi\to0}\Big[\dfrac{1}{2}\Big(\dfrac{1}{\cos\varphi}\dfrac{\sin\varphi}{\varphi}+\dfrac{2}{\cos2\varphi}\dfrac{\sin2\varphi}{2\varphi}+\cdots+\dfrac{n}{\cos\varphi}\cdot\dfrac{\sin n\varphi}{n\varphi}\Big)$

$$\cdot\cos\varphi\sqrt{\cos2\varphi}\cdots\sqrt[n]{\cos n\varphi}\Big]$$

$$=\frac{1}{2}(1+2+\cdots n)=\frac{n(n+1)}{4}.$$

18. 利用$\dfrac{1}{n(n+1)(n+2)}=\dfrac{1}{2}\left[\dfrac{1}{n(n+1)}-\dfrac{1}{(n+1)(n+2)}\right]$,分别取 $n=1,2,\cdots$,

求和得 $\dfrac{1}{1\cdot2\cdot3}+\dfrac{1}{2\cdot3\cdot4}+\cdots+\dfrac{1}{n(n+1)(n+2)}$

$$=\frac{1}{2}\left[\left(\frac{1}{1\cdot2}-\frac{1}{2\cdot3}\right)+\left(\frac{1}{2\cdot3}-\frac{1}{3\cdot4}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n(n+1)}-\frac{1}{(n+1)(n+2)}\right)\right]$$

$$=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{1\cdot2}-\frac{1}{(n+1)(n+2)}\right].$$

故　原式 $=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{2}\left[\dfrac{1}{1\cdot2}-\dfrac{1}{(n+1)(n+2)}\right]=\dfrac{1}{4}$.

19. 设 $x_n=\dfrac{(2n-1)!!}{(2n)!!}=\dfrac{1\cdot3\cdot5\cdot\cdots\cdot(2n-1)}{2\cdot4\cdot6\cdot\cdots\cdot(2n)}$. 因为 $x_{n+1}=x_n\cdot\dfrac{2n+1}{2n+2}<x_n$,且 $x_n>0$,所以由单调有界准则知$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 存在.

又因为

$$\frac{1}{x_n}=\frac{2\cdot4\cdot6\cdot\cdots\cdot(2n)}{1\cdot3\cdot5\cdot\cdots\cdot(2n-1)}>\frac{3\cdot5\cdot7\cdot\cdots\cdot(2n+1)}{2\cdot4\cdot6\cdot\cdots\cdot2n}=x_n\cdot(2n+1),$$

即 $x_n^2<\frac{1}{2n+1}$,所以 $0<x_n<\frac{1}{\sqrt{2n+1}}$,由夹逼准则知 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=0$.

20. 先将 n 项乘积化简为下述形式:

$$\sqrt{2}\cdot\sqrt[4]{2}\cdot\sqrt[8]{2}\cdot\cdots\cdot\sqrt[2^n]{2}=2^{1/2+1/4+1/8+\cdots+1/2^n}=2^{[1-(1/2)^n]},$$

再在上式两端求极限,得到

$$\lim_{n\to\infty}(\sqrt{2}\cdot\sqrt[4]{2}\cdot\sqrt[8]{2}\cdot\cdots\cdot\sqrt[2^n]{2})=\lim_{n\to\infty}2^{[1-(1/2^n)]}=2.$$

21. 因为 $x\to1$ 时,$\sin(x-1)\sim x-1$,所以原式 $=\lim\limits_{x\to1}\frac{(x-1)^2}{x^2+ax+b}=1$.

又因为 $\lim\limits_{x\to1}(x-1)^2=0$,所以 $\lim\limits_{x\to1}(x^2+ax+b)=0$. 由此得 $1+a+b=0$. 把 $b=-1-a$ 代入原式得

$$原式=\lim_{x\to1}\frac{(x-1)^2}{(x-1)(x+1+a)}=\lim_{x\to1}\frac{x-1}{x+1+a}=1.$$

因为 $\lim\limits_{x\to1}(x-1)=0$,所以 $\lim\limits_{x\to1}(x+1+a)=0$,故得 $a=-2,b=1$.

22. 用等价无穷小代换分别得到:

$$\lim_{x\to0}\frac{(x^2/2)\cdot x^2}{x\cdot x^n}=\frac{1}{2}\lim_{x\to0}x^{3-n}=0,\quad \lim_{x\to0}\frac{x\cdot x^n}{x^2}=\lim_{x\to0}x^{n-1}=0,$$

因而 $3-n>0,n-1>0$. 由 $1<n<3$ 得 $n=2$.

23. 因为分母为 x^2,将 $\ln(1+x)$ 展成2阶带拉格朗日型余项的麦克劳林公式:

$$\ln(1+x)=x-(1/2)x^2+o(x^2),$$

则

$$\begin{aligned}原式&=\lim_{x\to0}\frac{x-(1/2)x^2+o(x^2)-(ax+bx^2)}{x^2}\\&=\lim_{x\to0}\frac{(1-a)x-(1/2+b)x^2+o(x^2)}{x^2}=2.\end{aligned}$$

于是必有 $1-a=0,-(1/2+b)=2$,解之得:$a=1,b=-5/2$.

24. 注意到 $\lim\limits_{x\to0+0}2^{\frac{1}{x}}=\infty$,$\lim\limits_{x\to0-0}2^{\frac{1}{x}}=0$,应先计算 $f(x)$ 在点 $x=0$ 处的左、右极限:

$$f(0+0)=\lim_{x\to0+0}f(x)=\lim_{x\to+0}\frac{1-(1/2^{\frac{1}{x}})}{1+(1/2^{\frac{1}{x}})}=1,$$

$$f(0-0)=\lim_{x\to0-0}f(x)=\lim_{x\to-0}\frac{2^{\frac{1}{x}}-1}{2^{\frac{1}{x}}+1}=-1.$$

因 $f(0+0)\neq f(0-0)$,故 $f(x)$ 在 $x=0$ 处的极限不存在,因而在 $x=0$ 处不连续.

25. (1) 若 $x=0$ 是 $f(x)$ 的无穷间断点,则必要求

$$\lim_{x\to0}\frac{e^x-b}{(x-a)(x-1)}=\infty,即\lim_{x\to0}\frac{(x-a)(x-1)}{e^x-b}=\frac{(-a)(-1)}{e^0-b}=\frac{a}{1-b}=0.$$

因此,当 $a=0,b\neq1$ 时,$x=0$ 是 $f(x)$ 的无穷间断点.

(2) 若 $x=1$ 是 $f(x)$ 的可去间断点,则 $\lim\limits_{x\to1}\frac{e^x-b}{(x-a)(x-1)}$ 存在. 因为

$$\frac{e^x-b}{(x-a)(x-1)}=e\left(e^{x-1}-\frac{b}{e}\right)\Big/[(x-a)(x-1)],$$

又当 $x\to 1$ 时，$x-1\to 0$，$e^{x-1}-1\sim x-1$，所以当 $b=e$ 时，有

$$\lim_{x\to 1}\frac{e^x-b}{(x-a)(x-1)}=\lim_{x\to 1}\frac{e(e^{x-1}-1)}{(x-a)(x-1)}=\lim_{x\to 1}\frac{e(x-1)}{(x-a)(x-1)}$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{e}{x-a}=\frac{e}{1-a}.$$