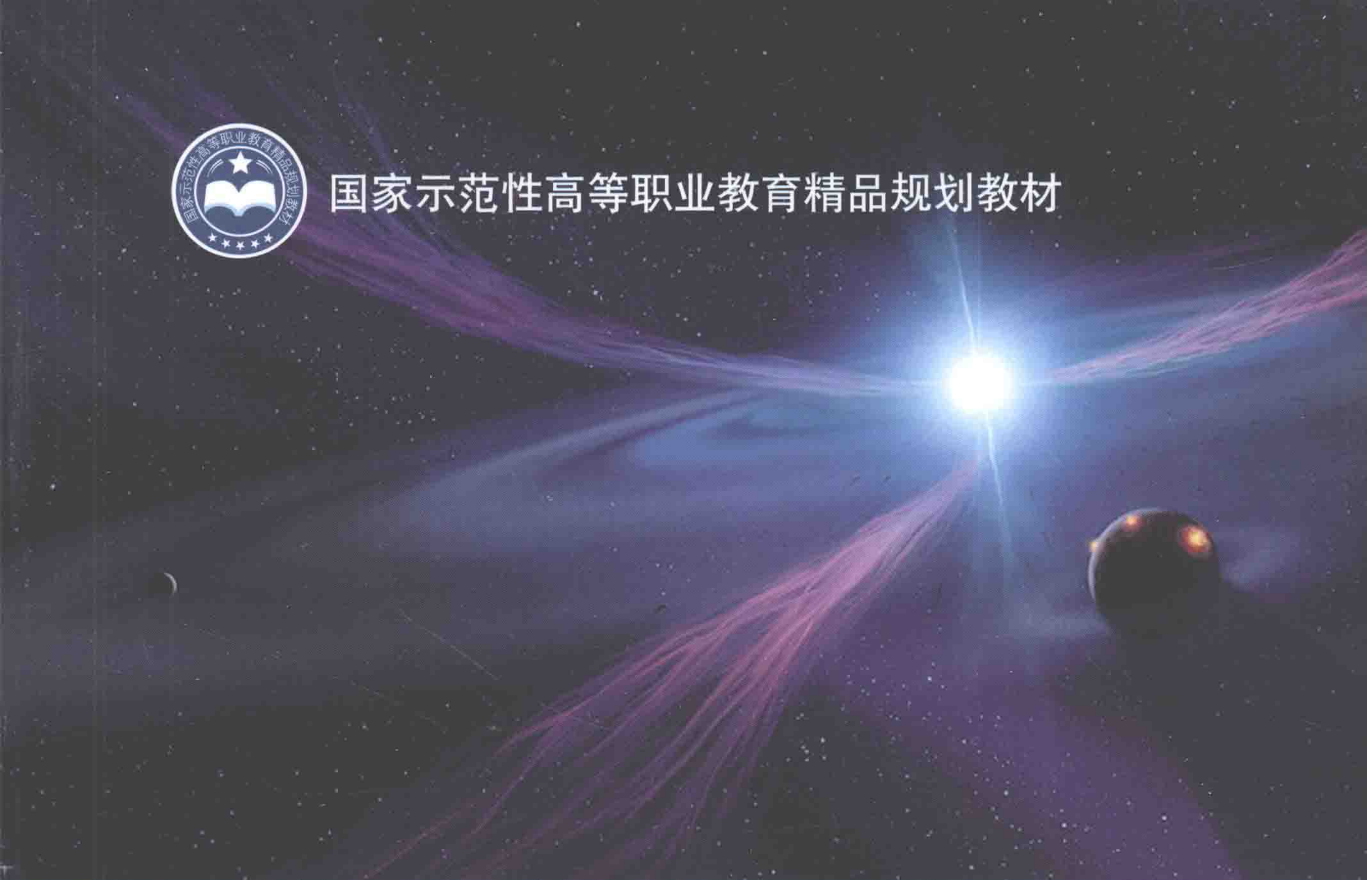
国家示范性高等职业教育精品规划教材



物理学

WULIXUE

主　编　何根基
主　审　饶瑞昌

北京理工大学出版社
BEIJING INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

物 理 学

主　编　何根基
副主编　吴春晓　王　斌　刘艳华
主　审　饶瑞昌
参　编　李　健

北京理工大学出版社
BEIJING INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

内 容 简 介

本书根据高职高专人才培养模式，在“以应用为目的，以必需够用为度”的原则下构建物理学的基本内容，包括力学（第二、三、四章）、波动学（第五、六、十一章）、热学（第七章）、电磁学（第八、九、十章）和近代物理学（第十二章）。

本书内容简明扼要，语言通俗易懂，在基本理论和基本概念的阐述上力求清晰、透彻，力求突出物理思想和方法。

本书可作为全日制普通专科学校的物理教材，也可作为职业大学、成人和电视大学的物理教材。

图书在版编目（CIP）数据

物理学：含解题指南 / 何根基主编 .—北京：北京理工大学出版社，2011.8

ISBN 978-7-5640-4913-3

Ⅰ.①物… Ⅱ.①何… Ⅲ.①物理学-高等职业教育-教材 Ⅳ.①O4

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2011）第 160959 号

出版发行 / 北京理工大学出版社
社　　址 / 北京市海淀区中关村南大街 5 号
邮　　编 / 100081
电　　话 / (010)68914775(办公室)　68944990(批销中心)　68911084(读者服务部)
网　　址 / http：//www.bitpress.com.cn
经　　销 / 全国各地新华书店
印　　刷 / 北京兆成印刷有限责任公司
开　　本 / 787 毫米×1092 毫米　1/16
印　　张 / 18.25
字　　数 / 411 千字
版　　次 / 2011 年 8 月第 1 版　2011 年 8 月第 1 次印刷
印　　数 / 1～4000 册
定　　价 / 36.00 元

责任编辑 / 钟　博
责任校对 / 陈玉梅
责任印制 / 王美丽

前　　言

物理学是研究物质的基本结构，相互作用和物质最基本最普遍的运动形式及其相互转化规律的学科，它所阐述的基本概念、基本规律和基本方法，不仅是学生继续学习专业课程和其他科学技术的基础，而且也是培养和提高学生科学素质、科学思维方法和科学研究能力的重要内容。

本书编写过程中注意处理好以下问题：第一，力求以简明、准确的语言阐述物理学中的原理、定律、定理和定义，引导、启发学生理解物理学的基本概念和基本规律。在保证全书必要的系统性、完整性和科学性的基础上，尽量以较短的篇幅反映物理学的主要内容。第二，注意大学物理与中学物理的衔接，避免对已学知识的简单重复，在充分利用中学阶段已有物理知识的基础上引入专科物理教学内容。第三，对例题和习题进行了精选，例题以紧扣教学内容的典型题为主，习题的选择与各知识点紧密相关。

由于编者水平有限，书中缺点与错误在所难免，尚祈读者惠予指正。

编者

目　　录

绪　　论

一、物理学研究对象及内容

自然科学，包括物理学在内是以认识物质世界的基本属性、研究物质运动的基本规律为对象的。所谓物质，就是我们周围的客观实在。日月星辰、山川草木、飞禽走兽是物质，各种固体、气体、液体和等离子体是物质，电场、磁场、重力场和引力场这些场也是物质。一句话，我们周围的一切都是物质，一切物质都在永不停息运动着，而宇宙间的一切现象都是物质运动的表现形式。

物理学研究物质运动最基本最普遍的形式，从宇宙天体到微观粒子，从接近光速的高速运动到远小于光速的低速运动，从无生命的物体到有生命的世界，物理学研究对象的普遍性，使得它成为自然科学的基础。物理理论大体分为两部分，19 世纪以前物理学的成就称为经典物理学，它包括力学、热学、电磁学和波动光学；20 世纪初以来物理学发生的革命性成就称为近代物理学，它的主要支柱是相对论和量子论。

二、物理学与工程技术

物理学研究的重大突破，往往导致生产技术的飞跃发展。在 19 世纪，这一过程需要几十年，而现在往往只要花上几年。

18 世纪 60 年代，由于力学和热学的发展，使机器和蒸汽机得到改进和推广，人类结束了单纯依靠人力和畜力作功的局面，掌握了向大自然索取能源的能力，借助自然能源，工业生产迅速发展。19 世纪电磁学的研究成果，导致了电力的应用，电机电器的研究成果，无线电通信的实现，使人们学会了把其他形式的能量转化为电能和把电能转化为其他形式的能量，社会生产力跃上新的台阶，世界面貌因之发生了深刻的变化。

进入 20 世纪以来，物理学的研究深入到物质结构的微观领域，产生了量子理论，使人类不仅释放并获得了核能，并且对固体和液体内部微观粒子的运动规律作了成功的描述，成为材料科学的理论依据，促使新材料、新器件、新能源、新的通信和控制手段如雨后春笋般涌现，电子计算机广泛应用，从根本上改变了工农业生产和科学研究的面貌。

如上所述，物理学虽然是自然科学的基础学科，但它的基本理论和基本知识，广泛应用于各种工程技术和工艺过程中，它们对于工程技术学科的发展起着不可估量的作用。因此，物理学是高等学校专科教育的一门重要基础课，只有较好地掌握物理学的基本理论、基本知识和基本技能，才能为今后学习专门知识及近代科学技术打下坚实的基础。

三、努力学好物理学

物理学的研究方法一般是在观察和实验的基础上，对物理现象进行分析、抽象和概括，从而建立物理定律，进而形成物理理论，再回到实践中去经受检验，物理学的这一研究方法也是其他科学领域研究的一般方法。

时至今日，物理学取得了辉煌的成就，这些成就的取得首先归功于实验。实验，是物理学的根本，精确的、能够反复重复的实验是决定物理学的一切，具有最高权威，每一个假说、原理和定律，都是对大量实验事实进行分析、处理和总结之后提出的。自 1901 年以来的诺贝尔物理学奖，大约 70％奖给了物理实验或与实验有关的项目。实验，又是检验理论真理性的最终标准，当新发现的实验事实无情地违背旧有理论时就导致新理论的建立。

真实的物理世界是非常复杂的，为分析的方便常常提出理想化模型，它以所研究对象为依据，突出主要矛盾，忽略次要因素，从中得出现象或过程的基本规律，然后，将所得到的规律再回到实验中去，使其与实验结果相比较，观察其正确程度，并进行必要的修正。实践证明，这是一种十分重要的科学研究方法，不这样做，我们甚至连最简单的现象也会感到难以处理或束手无策。

在学习过程中，我们将会看到，在物理学的每一个领域里都会遇到理想模型，如质点、刚体、完全弹性体、理想气体、弹簧振子、理想弹性介质、卡诺循环和点电荷等。可以毫不夸张地说，没有理想模型就没有物理学。

在学习物理学时，首先要理解物理模型的建立过程及其具体意义，进而正确理解物理学理论和概念，掌握现象和过程的物理图像，弄清定理和定律的条件、适用范围及应用方法，通过学习和掌握物理知识的过程来培养自己的创新意识和创造能力。

第一章

数学准备

为了学好物理学，更深入地理解物理学的概念和规律，需要补充一些数学知识。本章介绍有关微积分和矢量的基本概念及运算方法。

第一节　导数和微分

一、导数

设变量 y 是自变量 x 的函数，$y=f(x)$，为了形象地表示出函数 y 随自变量 n 变化的情况，可以以自变量 x 为横坐标，函数 y 为纵坐标，画出 $y=f(x)$ 的图形，称为 $y-x$ 图线，如图 1－1 所示。

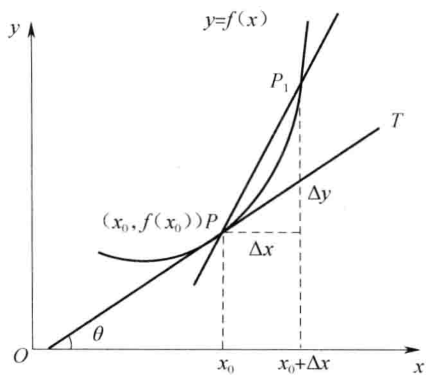


图 1－1

当自变量 x 由 x_0 增加到 $x_1=x_0+\Delta x$，函数 y 相应地由 $y=f(x)$ 改变到 $y_1=f(x_1)=f(x_0+\Delta x)$，于是，它的增量为 $\Delta y=y_1-y=f(x_0+\Delta x)-f(x)$。比值 $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ 反映函数 $y=f(x)$ 在自变量由 x_0 到 $x_1=x_0+\Delta x$ 这一间隔内变化的平均快慢情况，把它称为平均变化率。在图 1－1 中，平均变化率就是 $y-x$ 图线的割线 $\overline{PP_1}$ 的 $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ 斜率，显然，间隔 Δx 越小，平均变化率 $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ 就越能精确反映出函数 $y=f(x)$ 在 x 处变化的快慢情况。因此，把当 $\Delta x\to 0$ 时平均变化率之极限称为函数 $y=f(x)$ 在 x_0 处的变化率，或称为函数 $y=f(x)$ 对 x 的导数，并记作 y'，则

$$y'=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} \qquad (1-1)$$

在图 1－1 上，函数 $y=f(x)$ 的导数 y'，就是 $y-x$ 图线在 P 点的切线 T 的斜率。

一般来说，函数 $y=f(x)$ 对 x 的导数 y' 本身还是 x 的函数，所以还可以再取它对 x 的导数，称为函数 $y=f(x)$ 对 x 的二阶导数，记作 y''。依次类推，可以得出三阶导数、四阶导数等高阶导数。

二、微分

我们把自变量 x 的无限小增量称为 x 的微分，记作 $\mathrm{d}x$；一个函数 $y=f(x)$ 的导数 y' 乘

以自变量的微分 dx 称为函数 y 的微分，记作 dy。即

$$dy = y'dx \tag{1-2}$$

这个式子可以改写成 $y'=\frac{dy}{dx}$，可见函数 y 对 x 的导数可以写成函数 y 的微分 dy 和自变量 x 微分 dx 的商的形式，因此，导数又称为微商

$$y' = \frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} \tag{1-3}$$

二阶导数 y''用微商的形式，也可记作

$$y'' = \frac{dy'}{dx} = \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right) \tag{1-4}$$

高阶导数类推。

三、导数的运算

根据导数的定义，可以推算出几个物理学中常用的基本导数和微分公式，如表 1-1 所示。

表 1-1 基本的导数和微分公式

导数公式	微分公式
$\frac{d}{dx}(C) = 0$ （C 是常数）	$d(C) = 0$ （C 是常数）
$\frac{d}{dx}(x^n) = Nx^{n-1}$ （n 是任意常数）	$d(x^n) = nx^{n-1}dx$（n 是任意常数）
$\frac{d}{dx}(\sin x) = \cos x$	$d(\sin x) = \cos x dx$
$\frac{d}{dx}(\cos x) = -\sin x$	$d(\cos x) = -\sin x dx$
$\frac{d}{dx}(e^x) = e^x$	$d(e^x) = e^x dx$
$\frac{d}{dx}(\ln x) = \frac{1}{x}$	$d(\ln x) = \frac{1}{x}dx$
$\frac{d}{dx}(a^x) = a^x(\ln a)$ （a 是任意常数）	$d(a^x) = a^x \ln a dx$ （a 是任意常数）

下面给出四个导数运算定理。

定理 1-1 如果 $y=f(x)=u(x)\pm v(x)$，则有

$$y' = f'(x) = u'(x) \pm v'(x)$$

定理 1-2 如果 $y=f(x)=u(x)v(x)$，则有

$$y' = f'(x) = u'(x)v(x) + u(x)v'(x)$$

定理 1-3 如果 $y=f(x)=\frac{u(x)}{v(x)}$，则有

$$y' = f'(x) = \frac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{[v(x)]^2}$$

定理 1-4 设 y 是 u 的函数，而 u 是 x 的函数，即 $u=u(x)$，$y=y(u)=y[u(x)]$，则 y 对 x 的导数为

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}u} \cdot \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}$$

例 1-1 求 $y=\sin x-\cos x$ 的导数。

解 令 $u(x)=\sin x$，$v(x)=\cos x$，则 $y=u(x)-v(x)$，由定理 1-1 得

$$y' = (\sin x)' - (\cos x)' = \cos x - (-\sin x) = \cos x + \sin x$$

例 1-2 求 $y=x\ln x$ 的导数。

解 令 $u(x)=x$，$v(x)=\ln x$，则 $y=u(x)v(x)$，由定理 1-2 得

$$y' = (x)'\ln x + x(\ln x)' = \ln x + x \cdot \frac{1}{x} = \ln x + 1$$

例 1-3 求 $y=\dfrac{1-x}{1+x}$的导数。

解 令 $u(x)=1-x$，$v(x)=1+x$，则 $y=\dfrac{u(x)}{v(x)}$，由定理 1-3 得

$$y' = \frac{(1-x)'(1+x)-(1-x)(1+x)'}{(1+x)^2} = \frac{(-1)(1+x)-(1-x)}{(1+x)^2} = -\frac{2}{(1+x)^2}$$

例 1-4 求 $y=(3x+5)^3$ 的导数。

解 令 $u=3x+5$，则有 $y=u^3$，由定理 1-4 得

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}u} \cdot \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = (u^3) \cdot (3x+5)' = 3u^2 \cdot 3 = 9(3x+5)^2$$

第二节 不定积分

若 $f'(x)=f(x)$，则称 $F(x)$ 为 $f(x)$ 的原函数。求已知函数 $f(x)$ 的原函数的运算，是求导（微商）运算的逆运算，称为不定积分，写为 $\int f(x)\mathrm{d}x$，它和原函数 $F(x)$ 的关系为

$$\int f(x)\mathrm{d}x = F(x) + C \tag{1-5}$$

式中，$\int$ 为积分号，$f(x)$ 为被积函数，x 为积分变量或积分元，$f(x)\mathrm{d}x$ 为被积式，常数 C 为积分常数。

若有 $F'(x)=f(x)$，则也有 $[F(x)+C]'=f(x)$，所以原函数并不是唯一的，可以相差任意一个常数，故称运算式 $\int f(x)\mathrm{d}x$ 为不定积分。

根据不定积分的含义，由给出的基本导数公式很容易得出表 1-2 所示的基本不定积分公式。

表 1-2 基本不定积分公式

$\int dx = x + C$	$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$ （a 为常数）
$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$ （n 为$\neq -1$的常数）	$\int \sin x dx = -\cos x + C$
$\int \frac{1}{x} dx = \ln\lvert x \rvert + C$	$\int \cos x dx = \sin x + C$
$\int e^x dx - e^x + C$	

下面给出几个有关积分运算的定理。

定理 1-5 如果 $f(x) = au(x)$，a 为常数，则有

$$\int f(x) dx = a\int u(x) dx$$

定理 1-6 如果 $f(x) = u(x) \pm v(x)$，则有

$$\int f(x) dx = \int u(x) dx \pm \int v(x) dx$$

定理 1-7

$$\int f(x) dx = \int f[u(t)]u'(t) dt$$

定理 1-8

$$\int u dv = uv - \int v du$$

例 1-5 求 $\int \frac{dx}{3x^3}$。

解 $$\int \frac{dx}{3x^3} = \frac{1}{3}\int x^{-3} dx = \frac{x^{-3+1}}{3 \times (-3+1)} + C = -\frac{1}{6x^2} + C$$

例 1-6 求 $\int (3x^2 - 2x + 1) dx$。

解 $$\int (3x^2 - 2x + 1) dx = \int 3x^2 dx - \int 2x dx + \int 1 \cdot dx = x^3 - x^2 + x + C$$

例 1-7 求 $\int \sin(ax + b) dx$。

解 设 $u = ax + b$，则 $du = a dx$，于是有

$$\int \sin(ax + b) dx = \frac{1}{a}\int \sin u du = -\frac{1}{a}\cos u + C = -\frac{1}{a}\cos(ax + b) + C$$

例 1-8 求 $\int x \sin x dx$。

解 设 $u = x$，$dv = \sin x dx$，则 $du = dx$，$v = -\cos x$，由定理 1-8 得

$$\int x \sin x dx = -x\cos x + \int \cos x dx = -x\cos x + \sin x + C$$

第三节 定积分

许多物理问题的计算需要解决如下的数学问题：给定一个函数 $f(x)$，求 $f(x)-x$ 曲线下从 $x=a$ 到 $x=b$ 的面积，把自变量 x 的 $a \to b$ 区间等分成几个小段，各小段的大小为 Δx，即把自变量区间 $a \to b$ 等分成 $x_0 = a$，$x_1 = x_0 + \Delta x$，$x_2 = x_1 + \Delta x$，……，$x_n = b$，如图

1-2 所示。显然，在各小段中 $f(x)-x$ 曲线下的面积近似地等于 $f(x)\Delta x$，所以从 $a\to b$，$f(x)-x$ 曲线下的面积应等于 $\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x$，这个结果是近似的，显然分的段数越多，近似程度越好，在 $n\to\infty$，而 $\Delta x\to 0$ 时的极限 $\lim\limits_{\substack{n\to\infty\\ \Delta x\to 0}}\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x$ 就严格地等于 $a\to b$ 区间 $f(x)-x$ 曲线下的面积，通常用算式 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 表示这种形式的极限，即

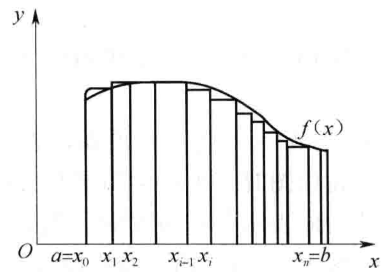


图 1-2

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \lim_{\substack{n\to\infty\\ \Delta x\to 0}}\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x$$

$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 称为 $x=a$ 到 $x=b$ 区间内 $f(x)$ 对 x 的定积分，b 和 a 分别称为定积分的上限和下限。

可以证明，若 $F(x)$ 是被积函数 $f(x)$ 的一个原函数，则有

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = F(x)\Big|_a^b = F(b)-F(a) \tag{1-6}$$

这个公式称为牛顿—莱布尼茨公式。它表明了定积分和不定积分的关系：一个函数的定积分 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 等于这个函数的不定积分在积分上下限处值的差。

例 1-9　计算 $\int_a^b \frac{\mathrm{d}x}{x}$。

解　$\int_a^b \frac{\mathrm{d}x}{x} = \ln x\Big|_a^b = \ln b - \ln a = \ln\frac{b}{a}$

例 1-10　已知 $\Delta x = \int_a^{t_1}(v_0 + at)\mathrm{d}t$，求 Δx。

解　设以 $x(t)$ 代表 $v=v_0+at$ 的不定积分，由式（1-5）应有

$$\begin{aligned}\Delta x &= \int_0^{t_1}(v_0+at)\mathrm{d}t = \int_0^{t_1} v_0\,\mathrm{d}t + \int_0^{t_1} at\,\mathrm{d}t\\ &= \left(v_0 t + \frac{1}{2}at^2\right)\Big|_0^{t_1}\\ &= v_0 t_1 + \frac{1}{2}at_1^2\end{aligned}$$

第四节　矢量

一、标量和矢量

在物理学中，我们经常遇到两类物理量，一类是标量物理量（简称标量），如质量、时间、体积等，它们只有数值的大小，没有方向，运算时服从代数法则。另一类是矢量物理量（简称矢量），如位移、速度、力等。它们不仅有大小，而且有方向，运算时服从矢量运算

法则。

印刷品中矢量常用黑粗体字母例如 $\boldsymbol{A}$ 来表示，书写时用带箭头的字母例如 $\vec{A}$ 来表示。

$$\boldsymbol{A}=|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{A}_0=A\boldsymbol{A}_0$$

式中，$|\boldsymbol{A}|=A$ 为矢量的模，表示矢量的大小；$\boldsymbol{A}_0$ 是矢量 $\boldsymbol{A}$ 方向的单位矢量，$|\boldsymbol{A}_0|=1$。

在作图时，矢量常用带箭头的线段来表示。线段的长短按一定比例表示矢量的大小，箭头的指向表示矢量的方向。例如，一列高速火车以 40 m/s 的速度向东行驶，则速度矢量 $\boldsymbol{v}$ 可用图 1－3 所示的有向线段表示。

矢量的运算不同于标量运算，在物理学中常遇到以下几种矢量的运算。

二、矢量的加法

两矢量相加服从平行四边形法则，两矢量 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 相加的合矢量是以这两矢量为邻边的平行四边形的对角线矢量 $\boldsymbol{C}$，如图 1－4 所示，写成 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}=\boldsymbol{C}$。

图 1－3

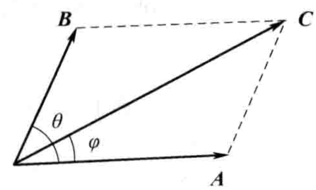


图 1－4

两矢量合成的平行四边形法则可简化为两矢量合成的三角形法则。如图 1－5 所示，自矢量 $\boldsymbol{A}$ 的末端起画出矢量 $\boldsymbol{B}$，则矢量 $\boldsymbol{A}$ 的始端到矢量 $\boldsymbol{B}$ 的末端画出的矢量 $\boldsymbol{C}$，就是 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 的合矢量。由于矢量 $\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$ 与合矢量 $\boldsymbol{C}$ 构成一个三角形，故这种方法称为矢量合成的三角形法则。对于多个矢量的合成，原则上可以逐次采用三角形法则进行，先求出其中两个矢量的合矢量，然后，将该合矢量再与第三个矢量相加，求得三个矢量的合矢量，依次类推，即得到多个矢量合成的多边形法则。如图 1－6 所示，若要求出 $\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$、$\boldsymbol{C}$、$\boldsymbol{D}$ 四个矢量的合矢量，可以从 $\boldsymbol{A}$ 矢量出发，首尾相接地依次画出 $\boldsymbol{B}$、$\boldsymbol{C}$、$\boldsymbol{D}$ 各矢量，然后由第一个矢量 $\boldsymbol{A}$ 的始端到最后一个矢量 $\boldsymbol{D}$ 的末端，作一矢量 $\boldsymbol{R}$，这个矢量 $\boldsymbol{R}$ 就是 $\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$、$\boldsymbol{C}$、$\boldsymbol{D}$ 四个矢量的合矢量。

合矢量的大小和方向，除了上述几何作图法外，还可以根据计算求得。

设矢量 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 的夹角为 θ，合矢量 $\boldsymbol{C}$ 与矢量 $\boldsymbol{A}$ 的夹角为 φ，如图 1－7 所示，由图可知

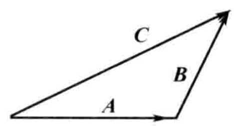


图 1－5

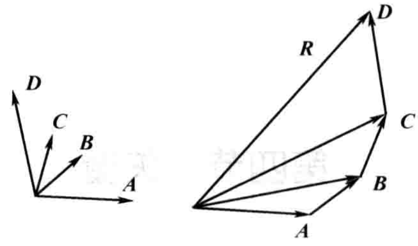


图 1－6

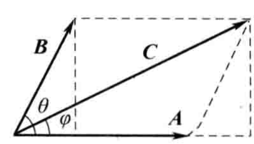


图 1－7

$$|\boldsymbol{C}|^2=A^2+B^2+2AB\cos\theta \tag{1-7}$$

$$\tan\varphi=\frac{B\sin\theta}{A+B\cos\theta} \tag{1-8}$$

故 $$|\boldsymbol{C}| = \sqrt{A^2 + B^2 + 2AB\cos\theta} \tag{1-9}$$

$$\varphi = \arctan\frac{B\sin B}{A + B\cos\theta} \tag{1-10}$$

式（1-7）～式（1-10）给出了矢量的大小 C 及方向 φ。

三、矢量的减法

两个矢量 **A** 与 **B** 之差也是一个矢量，可用 **A**－**B** 表示。因为

$$\boldsymbol{A} - \boldsymbol{B} = \boldsymbol{A} + (-\boldsymbol{B}) \tag{1-11}$$

其中－**B** 表示与矢量 **B** 的大小相等而指向相反的另一矢量。所以，矢量 **A** 与 **B** 之差就可以看成 **A** 与－**B** 之和，同样可以采用平行四边形法则，从图 1-8 所示中也可以看出，自 **B** 末端向 **A** 末端作一矢量，就是矢量 **A** 与 **B** 之差 **A**－**B**。

求矢量差的大小和方向，仍可用式（1-7）～式（1-10）进行计算。但必须注意这时角 θ 不是矢量 **A**、**B** 之间的夹角，而是这个夹角的补角。

四、矢量的乘法

在物理学中，两个矢量或矢量与标量相乘的情形是经常遇到的。

（1）矢量的数乘：设 m 为实数，**A** 为任意矢量，则 $C = m\boldsymbol{A}$，$m > 0$ 时，**C** 的方向与 **A** 相同，$m < 0$ 时，**C** 的方向与 **A** 相反。

（2）矢量点乘（标积）：设 **A**、**B** 为任意两个矢量，它们的夹角为 θ，则

$$\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B} = AB\cos\theta,\quad \text{为标量。} \tag{1-12}$$

（3）矢量叉乘（矢积）：设 **A**、**B** 为任意两个矢量，它们的夹角为 θ，则

$$\boldsymbol{C} = \boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}$$

矢量 **C** 的大小为 $$C = AB\sin\theta \tag{1-13}$$

其中 θ 为 **A** 和 **B** 之间小于 180°的角，矢量 **C** 的方向垂直于 **A** 和 **B** 所在的平面，其指向用右手螺旋法确定，如图 1-9 所示，当右手拇指从 **A** 经小于 180°的角转向 **B** 时，右手拇指的指向（即右螺旋前进的方向）就是 **C** 的方向。如果以 **A** 和 **B** 构成平行四边形的邻边，则 **C** 是这样一个矢量，它垂直于四边形所在的平面，且指向代表着此平面的正法线方向，而它的大小则等于平行四边形的面积，如图 1-10 所示。

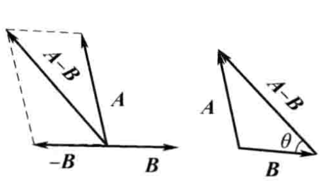


图 1-8

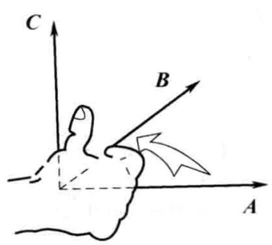


图 1-9

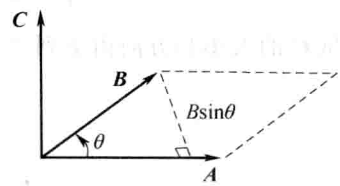


图 1-10

五、矢量的平面坐标轴上的分矢量

设矢量 **A** 在平面直角坐标系 xOy 上，**A** 与 x 轴的夹角为 θ，其始端位于原点 O，如图

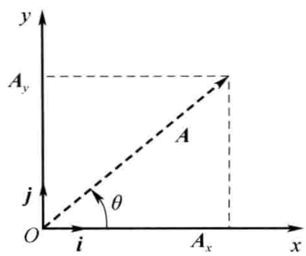


图 1-11

1-11所示。

从图中可见，矢量 $\boldsymbol{A}$ 在 x 轴上的分矢量 $\boldsymbol{A}_x$ 和在 y 轴上的分矢量 $\boldsymbol{A}_y$ 都是一定的，即

$$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{A}_x+\boldsymbol{A}_y \tag{1-14}$$

若沿 x 轴的正向取一长度为 1 的单位矢量 $\boldsymbol{i}$，沿 y 轴的正向取一长度为 1 的单位矢量 $\boldsymbol{j}$，则分矢量 $\boldsymbol{A}_x$ 和 $\boldsymbol{A}_y$ 为

$$\boldsymbol{A}_x=A_x\boldsymbol{i},\quad \boldsymbol{A}_y=A_y\boldsymbol{j} \tag{1-15}$$

其中 $A_x=A\cos\theta,\quad A_y=A\sin\theta$

应当注意，θ 角是由 x 轴按逆时针方向旋转至 $\boldsymbol{A}$ 的角度，于是式（1-14）可写成

$$\boldsymbol{A}=A_x\boldsymbol{i}+A_y\boldsymbol{j} \tag{1-16}$$

A_x 和 A_y 分别称为矢量 $\boldsymbol{A}$ 在 x 轴和 y 轴的分量。显然，矢量 $\boldsymbol{A}$ 的模与分量 A_x、A_y 之间的关系为

$$A=\sqrt{A_x^2+A_y^2} \tag{1-17}$$

矢量 $\boldsymbol{A}$ 与 x 轴的夹角 θ 与分量 A_x、A_y 之间的关系为

$$\theta=\arctan\frac{A_y}{A_x} \tag{1-18}$$

分量 A_x、A_y 的值可正可负，取决于矢量 $\boldsymbol{A}$ 与 x 轴的夹角，由式（1-15）可见，当 $\boldsymbol{A}$ 与 x 轴的夹角 $\theta=0$ 时，$A_x=A$，$A_y=0$，当 $\theta=\pi$ 时，$A_x=-A$，$A_y=0$。

六、矢量合成的解析法

运用矢量的分量表示法，可以使矢量加减运算简化。设平面直角坐标系内有矢量 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$，它们与 x 轴的夹角分别为 α 和 β。如图 1-12 所示，求合矢量 $\boldsymbol{C}$。

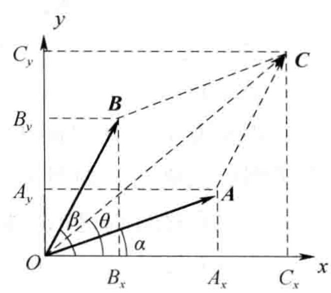


图 1-12

根据式（1-15），矢量 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 在两坐标上的分量可分别表示为

$$\begin{cases}A_x=A\cos\alpha\\A_y=A\sin\alpha\end{cases}\quad 及 \quad \begin{cases}B_x=B\cos\beta\\B_y=B\sin\beta\end{cases}$$

由图 1-12 可以看出，合矢量 $\boldsymbol{C}$ 在两坐标轴上的分量 C_x 和 C_y，与矢量 $\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$ 的分量之间的关系为

$$\begin{cases}C_x=A_x+B_x\\C_y=A_y+B_y\end{cases}$$

矢量 $\boldsymbol{C}$ 的大小和方向由下列二式确定

$$|\boldsymbol{C}|=\sqrt{C_x^2+C_y^2} \tag{1-19}$$

$$\theta=\arctan\frac{C_y}{C_x} \tag{1-20}$$

习题一

1-1 求下列函数的导数。

（1）$y=x^2+a^2$（a 是常数）；（2）$y=(x^2+4)(x+5)$；