FUYIJIEGOU KEKAODU LILUNJIQIYINGYONG
FUYIJIEGOU KEKAODU LILUNJIQIYINGYONG
FUYIJIEGOU KEKAODU LILUNJIQIYINGYONG

服役结构可靠度理论及其应用

杨伟军 著

中南工业大学出版社

服役结构可靠度理论及其应用

Fuyi Jiegou Kekaodu Lilun Jiqi Yingyong

杨伟军　著

中南工业大学出版社

服役结构可靠度理论及其应用

杨伟军　著

责任编辑：邓立荣

*

中南工业大学出版社出版发行

长 沙 交 通 学 院 印 刷 厂 印 装

湖 南 省 新 华 书 店 经 销

*

开本：787×1092　1/16　印张：12.75　字数：320 千字

2000 年 3 月第 1 版　2000 年 3 月第 1 次印刷

印数：0001－1000

*

ISBN 7－81061－305－7/TU·005

定价：20.00 元

内容提要

本书比较全面、系统地阐述了服役结构可靠度的基本理论、分析计算方法及其应用。全书共分4篇16章，第1篇为结构可靠性数学基础；第2篇为结构可靠度基本理论，着重介绍了常用的可靠度计算和设计方法以及统一标准与现行设计规范的联系；第3篇为服役结构可靠性分析，着重介绍了服役结构动态可靠性理论与应用研究概况，讨论了服役结构的荷载和抗力分析、服役结构动态可靠度分析方法、结构疲劳可靠度分析方法；第4篇为服役结构可靠性理论应用，着重讨论了基于动态可靠性的服役结构维修加固策略、结构可靠性优化设计、基于动态可靠度的钢筋混凝土结构耐久性分析、服役结构可靠性评定和基于动态可靠度的服役结构保险。

本书可供高等院校土木工程专业的学生和研究生使用，也可供土木工程结构设计人员、科技研究人员和高等院校有关教师参考。

前　言

服役结构的诊断、加固、维修与改造是目前我国及世界其他各国普遍关注的问题(英国旧房改造的工程量已占全部建筑总工程量的三分之一;瑞典占一半左右;我国"一五"期间新建建筑投资占基建投资的95.8%,而"六五"期间只占45%),我国20世纪五六十年代兴建的大批工业与民用房屋,现均已陆续进入老年期,存在的隐患和缺陷较多,甚至有些安全性低于设计规范要求。因此,对这些服役结构进行动态可靠性分析,合理和科学地利用这些服役结构显得尤为重要。

结构可靠性的分析计算,一般只对两种情况进行,即设计中的结构和现存结构(本书称之为服役结构)。这两种结构尽管事实上存在着巨大的差别,但无论是结构本身的特征还是外部作用,都存在某种程度的不确定性。当前,结构可靠性研究的趋势是由单纯的结构设计可靠性(静态)到结构生命全过程(建造、使用、维修、老化等)的可靠性(动态)研究。近10余年来,国内外虽已出版了不少结构可靠度的专著,但这些专著无不以设计中的结构可靠性理论(也为一般人谈到结构可靠性所指的)为主,而专门论述服役结构可靠性理论及其应用的著作极少见到。目前有关服役结构可靠性理论及其应用的文章很多,各种期刊均有涉及。为了让大家对服役结构可靠性理论及其应用的研究现状和全貌有一个全面、系统的了解。作者在多年从事服役结构可靠性理论及其应用研究工作的基础上,吸收国内外该领域的最新科研成果,写成了本书。

本书比较全面、系统地阐述了服役结构可靠度的基本理论、分析计算方法及其应用。全书共分4篇16章,第1篇为结构可靠性数学基础;第2篇为结构可靠度基本理论,着重介绍了常用的可靠度计算和设计方法以及统一标准与现行设计规范的联系;第3篇为服役结构可靠性分析,着重介绍了服役结构动态可靠性理论与应用研究概况,讨论了服役结构的荷载和抗力分析、服役结构动态可靠度分析方法、结构疲劳可靠度分析方法;第4篇为服役结构可靠性理论应用,着重讨论了基于动态可靠性的服役结构维修加固策略、结构可靠性优化设计、基于动态可靠度的钢筋混凝土结构耐久性分析、服役结构可靠性评定和基于动态可靠度的服役结构保险。

本书试图起到抛砖引玉的作用,使该方面的研究能有较大的进展,为国家经济建设做出贡献。若如此,作者将不胜荣幸。

作者的很多研究工作是在湖南大学施楚贤教授、武汉工业大学李桂青教授和武汉科技大学赵传智教授的指导下完成的。在此表示衷心的感谢!

限于作者水平,书中难免有不妥之处,恳请有关专家和广大读者批评指正。

杨伟军

1999年12月于长沙

目　录

第1篇　结构可靠性数学基础

第2篇　结构可靠度基本理论

第 3 篇　服役结构可靠性分析

第 4 篇　服役结构可靠性理论应用

第1篇　结构可靠性数学基础

第1章　概率论基础

1.1　基本概念

1.1.1　随机事件

在自然界里，人们观察到的现象大体可归结为两种类型：一类是可事前预言的，即在准确地重复某些条件下，它的结果总是肯定的；或是根据它过去的状态，在相同条件下完全可以预言将来的发展。例如：重物在高处总是垂直落到地面；在一个大气压下，水在100℃时会沸腾；质量为 m 的质点，受力 F 作用时，其加速度必为 $a=F/m$，且沿作用力 F 的方向。这种在一定条件下必然会出现的现象称必然事件。反之，如果在一定条件下必然不出现的现象，则称不可能事件。早期的科学就是研究这一类现象的规律性，所应用的数学工具如数学分析、几何、代数、微分方程等都是大家所熟悉的。但人们还逐渐发现了另一类型的现象，它是事前不可预言的，即在相同条件下重复进行试验，每次结果未必相同；或是知道它过去的状况，在相同条件下，未来的发展事前却不能完全肯定。这一类型的现象我们称之随机事件，通常简称为事件。例如：(A_1)某地今后10年内要遭受烈度为8度的地震；(A_2)某地今后10年内要遭受烈度不超过8度地震；(A_3)抛掷一个质地均匀的对称的硬币，结果是正面向上，或背面向上；(A_4)新生的婴儿是男或是女。

事件之间存在着一些关系，常见的有：

(1)包含关系：若事件 A 发生必然导致事件 B 发生，则称事件 B 包含了事件 A。

(2)不相容关系：若事件 A 与 B 总不能同时发生，则称事件 A 与事件 B 不相容。

(3)对立关系：若事件 A 不发生，则事件 B 必然发生，而两者又不能同时发生，那么称事件 B 为事件 A 的对立事件。显然，如果 B 是 A 的对立事件，则 A 也是 B 的对立事件。换句话说 A、B 是互为对立的。

(4)事件的和：事件 A 和事件 B 中至少有一个发生的事件叫做 A 与 B 的和，记为

$$A \cup B$$

(5)事件的积：事件 A 与事件 B 同时发生的事件叫做 A 与 B 的积，记为

$$A \cap B$$

有时也简记为 $A \cdot B$ 或 AB。

1.1.2 概率

从上面所举的事例可以看出，每一事件都有某种程度的可能性，但事件(A_1)的可能性要比事件(A_2)的可能性要小一些。为了从数量上比较事件可能性的程度，必须对每一个事件给予一个数字，这个数字就是事件的概率。也就是说，事件的概率是该事件客观可能性的数值测度。

有些事件的概率是可以直接计算的。典型的例子是古典概型，即具有下列两个性质的试验：

(1)试验的可能结果只有有限多个。在概率论中，所谓试验是指在一定条件下的实践。试验中每一个可能的结果，称为该试验的一个基本事件。

(2)所有基本事件都是等可能的。

对于古典型试验，若试验结果由 n 个基本事件组成，而事件 A 由其中的 m 个基本事件组成，则定义 A 的概率 $P(A)$ 为

$$P(A) = m/n \tag{1-1}$$

不难看出，$P(A)$ 介于 0 与 1 之间，即

$$0 < P(A) < 1$$

若 $P(A)=1$，则 A 为必然事件；若 $P(A)=0$；则 A 为不可能事件。

但工程中很多问题不能归结为古典概型，因而不能应用式(1-1)计算其概率。对于这类事件，通常要通过大量重复试验来确定。若在 n 次试验中，某事件 A 出现 m 次，则称

$$P^*(A) = m/n \tag{1-2}$$

为事件 A 在 n 次试验中出现的频率；m 为 A 在这 n 次试验中出现的频数。

实践与理论已证明，当增加试验次数后，频率将通过随机波动而趋近于概率。

在计算事件的概率或频率时，常要利用概率加法定理与乘法定理。

概率的加法定理：n 个互不相容事件之和的概率，等于各事件的概率之和，即

$$P\left(\sum_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i) \tag{1-3}$$

概率的乘法定理：两事件乘积的概率等于一事件的概率，乘以在这一事件发生的条件下另一事件的条件概率，即

$$P(AB) = P(A)P(B|A) = P(B)P(A|B) \tag{1-4}$$

式中，$P(B|A)$ 是指事件 B 在事件 A 发生的条件下的概率，称为条件概率。

当 $P(A) \neq 0$ 时，有

$$P(B|A) = \frac{P(AB)}{P(A)} \tag{1-5}$$

同样，当 $P(B) \neq 0$ 时，有

$$P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)} \tag{1-6}$$

所谓两事件 A 与 B 之积，是指 A 与 B 同时实现的意思。若 A 与 B 中任一事件的概率与另一事件是否发生无关，则称 A、B 是相互独立的。在这种情况下：

$$P(B|A) = P(B); \quad P(A|B) = P(A)$$

两独立事件之积的概率等于各事件的概率之积：

$$P(AB)=P(A)P(B) \tag{1-7}$$

n 个相互独立事件乘积的概率为

$$P(\prod_{i=1}^{n}A_i)=\prod_{i=1}^{n}P(A_i) \tag{1-8}$$

在实践中还有两个与条件概率有关的常用公式。

全概率公式：设事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 互不相容，且其和$(A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n)$为必然事件 U，则对任一事件 B 恒有

$$P(B)=\sum_{k=1}^{n}P(A_k)P(B\mid A_k) \tag{1-9}$$

贝叶斯(Bayes)公式：在全概率公式的条件下，如果事件 B 为非不可能事件，即 $P(B)>0$，则有

$$P(A_i\mid B)=\frac{P(A_i)P(B\mid A_i)}{\sum\limits_{k=1}^{n}P(A_k)P(B\mid A_k)} \tag{1-10}$$

1.1.3 随机变量

与随机事件有密切联系的一个重要概念是随机变量。这个概念的产生推动了概率理论的研究和应用，使其研究的对象由随机事件扩大为随机变量。

所谓随机变量，是指在一定条件的实验中，每次都取一个不能预先确知数值的变量。

例如，某混凝土制品厂每天不出废品的概率为0.8，出一件废品的概率为0.2，出两件及两件以上废品的概率为0，5天中的废品总数设它为 X，显然它可能取的值是0或1，2，3，4，5，但是不能预先确知取哪一个，因而是随机变量。

在上面的例子中，随机变量 X 的取值为可预先列举的有限个值（有时是可列个值），称为离散型随机变量。反之，若随机变量的取值为充满某一区间的任何数值，则称为非离散型随机变量（或连续型随机变量）。例如，某地区地震地面最大加速度是一个变量，每次都有一个具体值，但究竟是一个什么样的数值，事前不可能预知，因而是随机变量。它可以在某个实数范围内，或者说在某个区间内，或者说在某个区间内取任意的数值，即其可能值可以充满某个区间，因而是非离散型随机变量。这类例子很多，如某地区的年最大风速、年最大积雪深度、年最大降雨量，以及材料强度等都属于非离散型随机变量。我们常用大写字母表示随机变量，小写字母表示它可能取的值。

1.2 随机变量的分布

若 X 是一个随机变量，x 为任意一个实数$(-\infty<x<\infty)$，则$\{\omega\mid X(\omega)\leqslant x\}$（简记为$\{X\leqslant x\}$）是一个随机事件。它有一个确定的概率，这样就定义了一个 $x(-\infty<x<\infty)$的函数，其函数值在区间$[0,1]$上，这样的函数称为随机变量 X 的分布函数，即

$$F(x)=P(\{X\leqslant x\})\quad(-\infty<x<\infty) \tag{1-11}$$

分布函数具有以下性质：

(1) $0\leqslant F(x)\leqslant 1\quad(-\infty<x<\infty)$

(2) $F(x_1) \leqslant F(x_2) \quad (x_1 \leqslant x_2)$

即任一分布函数都是单调非减的。

(3) $\lim\limits_{x \to -\infty} F(x) = 0$; $\lim\limits_{x \to \infty} F(x) = 1$

我们说,分布函数全面地反映了随机变量取值统计规律,有了这个分布函数,随机变量 X 按任何方式取值的概率便可依靠分布函数计算出来,例如按分布函数定义立即可知

$$P\{a < X \leqslant b\} = P\{X \leqslant b\} - P\{X < a\} = F(b) - F(a)$$

即事件 $\{X \in (a, b)\}$ 的概率等于分布函数 $F(x)$ 在该区间上的增量。

常见的随机变量可以有离散型随机变量与连续型随机变量。后者是非离散型随机变量中最重要的一类,可靠度理论讨论中主要用的概率模型就是这一类。这是因为建筑结构设计中遇到的基本变量,比如材料强度、几何尺寸、弹性模量、裂缝、挠度、恒载、风、雪和临时楼面活荷载等取值都是充满某一区间,均可用连续型随机变量模型来描述。

如果随机变量 X 的分布函数 $F(x)$ 可表示为

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(x) \mathrm{d}x \tag{1-12}$$

其中 $f(x) \geqslant 0$,则称 X 为连续型随机变量,称 $f(x)$ 为 X 的分布密度(简称密度),可以证明连续型随机变量的分布函数是连续函数。

分布密度具有下列性质:

(1) $f(x) \geqslant 0$

(2) $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) \mathrm{d}x = 1$

(3) $P\{a < X \leqslant b\} = F(b) - F(a) = \int_{a}^{b} f(x) \mathrm{d}x$

由于连续型随机变量的分布函数与密度函数有如此紧密关系,所以连续型随机变量的统计规律也完全可以用密度函数来描述。

在实际问题中,试验结果有时往往需要用两个或两个以上随机变量来描述,要研究这些随机变量之间的联系,就需同时考虑若干个随机变量即多维随机变量及其取值规律,下面将简单介绍这方面内容。为了简明起见,只介绍二维情形,其余可仿此类推。

例如,在研究某族人的身长与体重之间的联系,要从这族人中抽出若干个来,测量他们的身长与体重。每抽一个人出来,就有一个由身长、体重组成的有序数组 (X, Y),这个有序数组是根据试验结果(抽到的人)而确定的。

一般地,如果有两个变量所组成的有序数组即二维变量 (X, Y),它的取值是随着试验结果而确定,那末称这个二维变量 (X, Y) 为二维随机变量,与一维时相仿,我们定义二维随机变量 (X, Y) 的分布函数为

$$F(x, y) = P\{X \leqslant x, Y \leqslant y\}$$

其中 x, y 为任意实数,这就是说,二维分布函数 $F(x, y)$ 表示 (X, Y) 取图 1-1 所示区域 D_{xy} 内的值的概率,即

$$F(x, y) = P\{(X, Y) \in D_{xy}\}$$

与一维连续型随机变量类似,设 (X, Y) 为一个二维随机变量,如果存在着一个定义域为整个 $x0y$ 平面的非负函数,使 (X, Y) 的分布函数可表示为

$$F(x, y) = \iint\limits_{D_{xy}} f(x, y) \mathrm{d}\sigma = \int_{-\infty}^{x} \int_{-\infty}^{y} f(x, y) \mathrm{d}y \mathrm{d}x \tag{1-13}$$

其中 D_{xy} 为图 1－1 所示的无界区域，那末称 (X,Y) 为二维连续型随机变量，称 $f(x,y)$ 为 (X,Y) 的分布密度。

二维分布密度具有下列性质：

(1) $f(x,y)\geqslant 0$

(2) $\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\mathrm{d}y\mathrm{d}x = 1$

(3) $P\{(X,Y)\in D\} = \iint\limits_{D} f(x,y)\mathrm{d}\sigma$

其中 D 为 $x0y$ 平面内任意区域。

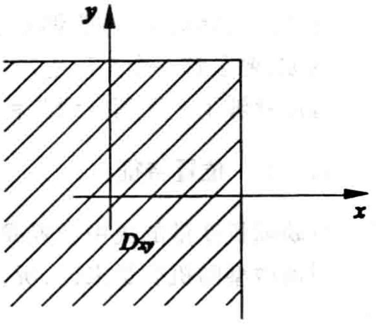

图 1－1

设二维连续型随机变量 (X,Y) 分布密度为 $f(x,y)$。关于 X 的分布函数

$$F_1(x) = P\{X\leqslant x\} = P\{X\leqslant x,\ -\infty< Y<\infty\}$$
$$= \int_{-\infty}^{x}\left[\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\mathrm{d}y\right]\mathrm{d}x \qquad (1-14)$$

所以，关于 X 的分布密度为

$$f_1(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\mathrm{d}y \qquad (1-15)$$

同理，关于 Y 的分布函数为

$$F_2(y) = P\{Y\leqslant y\} = P\{-\infty< X<\infty, Y\leqslant y\}$$
$$= \int_{-\infty}^{y}\left[\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\mathrm{d}x\right]\mathrm{d}y \qquad (1-16)$$

所以，关于 Y 的分布密度为

$$f_2(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\mathrm{d}x \qquad (1-17)$$

下面我们将借助于随机事件的相互独立性概念，引进随机变量的相互独立性。

设 X,Y 为随机变量，如果对于任意实数 x,y，事件 $\{X\leqslant x\}$、$\{Y\leqslant y\}$ 是相互独立的，即

$$P\{X\leqslant x, Y\leqslant y\} = P\{X\leqslant x\}P\{Y\leqslant y\}$$

那末称 X,Y 是相互独立的。我们也可以把相互独立性概念推广到两个以上的随机变量上去。

设 (X,Y)，X，Y 的分布函数依次为 $F(x,y)$，$F_1(x)$，$F_2(y)$，那末由上式即可得：若 X，Y 相互独立，则有

$$F(x,y)=F_1(x)F_2(y) \qquad (1-18)$$

反之亦然。

现在设二维连续型随机变量 (X,Y) 的分布密度为 $f(x,y)$。如果 X,Y 相互独立，则由上式有

$$f(x,y)= f_1(x)\ f_2(y) \qquad (1-19)$$

这里 $f_1(x)$，$f_2(y)$ 分别为 X,Y 的分布密度。

反之，如果有 $f(x,y)= f_1(x)\ f_2(y)$ 成立，则有 $F(x,y)=F_1(x)F_2(y)$，故 X,Y 相互独立。

1.3 随机变量的数字特征

在许多实际场合,并非都要了解其概率分布,有时只要了解其某些主要的统计参数就行了。例如,要了解一个工厂生产的某种产品的质量情况,有时只要了解产品质量的平均水平和均匀程度就够了。下面介绍几种常用的统计参数,如平均数、方差、变异系数等。

1.3.1 位置特征

反映随机变量的集中位置或分布中心的数学特征有数学期望、众数或中位数等。

对离散型随机变量来说,所有可能值与其对应概率乘积的总和称为该随机变量的数学期望。

例如,设离散型随机变量的可能值为 $x_1,x_2,\cdots,x_n$,其对应的概率分别为 $p_1,p_2,\cdots,p_n$,则 X 的数学期望,记为 $M[X]$或 μ_x,定义为

$$M[X]=\sum_{i=1}^{n}x_ip_i \tag{1-20}$$

若 X 以等概率 $p_i=1/n$ 取 $x_i(i=1,2,\cdots,n)$,则

$$M[X]=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i$$

即随机变量的数学期望就是其所有可能值 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 的平均值。

在一般情况下,随机变量 X 取 x_i 的概率 p_i 是不相等的,设

$$p_i=\frac{m_i}{N};\quad \sum_{i=1}^{n}m_i=N$$

则

$$M[X]=\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{n}m_ix_i \tag{1-21}$$

即随机变量 X 的数学期望是所有可能值$x_1,x_2,\cdots,x_n$ 的加权平均值,m_i 称为 x_i 的权数。

由上述可见,随机变量的数学期望实际上是平均值的推广,并常常把数学期望就称为平均值。

对于连续型随机变量来说,由于它的可能值是不可列的,是连续地充满某个区间的,因而式(1-20)中的离散值 x_i 替换为连续变量 x,x_i 对应的概率 p_i 则替换为概率元 $f(x)\mathrm{d}x$,且总和改为积分,即得非离散型随机变量的数学期望:

$$M[X]=\int_{-\infty}^{\infty}xf(x)\mathrm{d}x \tag{1-22}$$

当已确知随机变量 X 的取值范围为(a,b)时,则上式积分可改为从 a 到b。

在位置特征中,除了最常用的数学期望外,有时也用众数和中位数,分别记为 μ_{1x}和 μ_{2x}。对离散型随机变量来说,众数是概率为最大的可能值;对连续型随机变量来说,众数则是概率密度为极大的值。由于工程中常遇到的概率密度是单峰铃形曲线,故众数可由下式求得:

$$\frac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x}=0 \tag{1-23}$$

随机变量的中位数,也常称中值,是满足等式

$$P(X<\mu_{2x})=P(X>\mu_{2x}) \tag{1-24}$$

的 μ_{2x}值。从几何上说，中位数将分布曲线下的面积划分为相等的两半，即随机变量取小于 μ_{2x}值的概率和大于 μ_{2x}值的概率相等。通常中位数只适用于连续型随机变量，对离散型随机变量也可给予适当定义，但是用处不大，故不详述。

当分布曲线为对称且单峰时，数学期望、众数、中位数三者重合为一。若分布是非对称的，则因数学期望受较大可能值的影响最大，故离众数最远，且偏于分布曲线的长尾部，中位数总是介于众数与数学期望之间。三者还有如下经验关系：对连续型随机变量来说，众数与中位数之间的距离，一般约为两倍于中位数与数学期望之间的距离。

1.3.2 原点矩和中心矩

数学期望是表达随机变量的集中位置或者说分布中心的数字特征。求出了数学期望，就知道了随机变量的一切可能值是围绕什么值分布的，因此数学期望是最重要的数字特征。但是，随机变量的一切可能值围绕数学期望究竟怎样分布，是比较集中或比较分散的，还需要其它的数字特征来说明。

我们知道，在力学中常用矩来描述质量或面积的分布特征。例如，截面惯性矩的大小可以表示面积的分布情况。当截面积相同时，则惯性矩大者，面积分布离重心远。与此类似，在概率论中也用矩来描述随机变量集中程度及分布特征。

对离散型随机变量，所有可能值的 k 次方与其对应概率的乘积的总和称为该随机变量的 k 阶原点矩。

例如，设离散型随机变量的可能值为 $x_1, x_2, \cdots, x_n$，其对应的概率分别为 $p_1, p_2, \cdots, p_n$，则 X 的 k 阶原点矩为

$$m_k[X] = \sum_{i=1}^{n} x_i^k p_i \tag{1-25}$$

对于连续型随机变量，则如前述，应将离散值的求和，改为对连续变动的参数 x 的积分，且将 p_i 代之以概率元 $f(x)\mathrm{d}x$ 即

$$m_k[X] = \int_{-\infty}^{\infty} x^k f(x)\mathrm{d}x \tag{1-26}$$

比较式(1－20)与式(1－25)、式(1－22)与式(1－26)可以看出，数学期望就是一阶原点矩，而 k 阶原点矩则是随机变量 X 的 k 次方的数学期望：

$$m_k[X] = M[X^k]$$

随机变量 X 与其数学期望 μ_x 之差称为中心化随机变量，即为 $X-\mu_x$，它的 k 阶原点矩称为随机变量的 k 阶中心矩，记为 $\mu_k[X]$，计算公式为

$$\mu_k[X] = M[(X-\mu_x)^k] \tag{1-27}$$

对于离散型随机变量：

$$\mu_k[X] = \sum_{i=1}^{n} (x_i - \mu_x)^k p_i \tag{1-28}$$

对于连续型随机变量：

$$\mu_k[X] = \int_{-\infty}^{\infty} (x-\mu_x)^k f(x)\mathrm{d}x \tag{1-29}$$

一阶中心矩恒等于零。将式(1－28)中的 $(x_i-\mu_x)^k$ 或式(1－29)中的 $(x-\mu_x)^k$ 用二项式定理展开，则可求得中心矩与原点矩的下述关系：

$$\mu_2 = m_2 - \mu_x^2$$
$$\mu_3 = m_3 - 3m_2\mu_x + 2\mu_x^3$$
$$\mu_4 = m_4 - 4m_3\mu_x + 6m_2\mu_x - 3\mu_x^4$$
……

1.3.3 方差、标准差、变异系数

众所周知,惯性矩是面积对通过形心主轴的二阶矩,它反映了面积围绕形心的分布特征。与此相对应,随机变量对数学期望的二阶矩,即二阶中心矩,描述了随机变量围绕数学期望的分布特征,通常称为方差,记为 $D[X]$

$$D[X] = \mu_2[X] = M[(X - \mu_x)^2] \tag{1-30}$$

即方差是随机变量相对其数学期望的偏差的平方的数学期望。

对于离散型随机变量:

$$D[X] = \sum_{i=1}^{n}(x_i - \mu_x)^2 p_i \tag{1-31}$$

对于连续型随机变量:

$$D[X] = \int_{-\infty}^{\infty}(x - \mu_x)^2 f(x)\mathrm{d}x \tag{1-32}$$

从方差的定义及计算公式可以看出,方差是恒为正的。若方差是一个很小的正数,则表示随机变量的一切可能值高度集中在数学期望附近;反之,若方差是一个很大的正数,则表示随机变量的取值是很分散的,即与数学期望的偏差很大。因此,方差是描述随机变量的离散性的数字特征。

由于方差具有随机变量二次方的量纲,用起来不方便,因而常取方差的平方根作为描述随机变量离散性的数字特征,称为均方差或标准(离)差,记为 $\sigma[X]$或 σ_x。

$$\sigma[X] = \sqrt{D[X]} \tag{1-33}$$

但是,随机变量均方差的大小除了与离散性有关外,还与其数学期望值的大小有关,因此不能仅用均方差来比较随机变量的离散度,而应采用均方差与数学期望的比值作为判据。这个比值称为离散系数或变异系数,记为 δ,

$$\delta = \sigma/\mu \tag{1-34}$$

1.3.4 偏态系数和峰度系数

当分布曲线为对称时,不难证明所有奇次阶的中心矩等于零。

如果 $\mu_{2k+1}[X] \neq 0(k=1,2,\cdots)$,则说明分布曲线不是对称的。由于一阶中心矩是恒等于零的,因此第一个可能不等于零的奇次阶中心矩是三阶中心矩 μ_3,故通常选用 μ_3 表征随机变量分布的不对称性。但考虑到三阶矩的量纲是随机变量的三次方,为了得到无量纲的数字特征,一般采用三阶中心矩与均方差的三次方的比值,称为偏态系数或简称偏态,记为 C_s。

$$C_s = \mu_3/\sigma^3 \tag{1-35}$$

当 $C_s > 0$ 时,分布曲线称为正偏态曲线;当 $C_s < 0$ 时,分布曲线称为负偏态曲线(如图 1-2)。

4 阶中心矩描述了分布曲线顶峰的突出程度。鉴于 4 阶中心矩具有随机变量的 4 次方量

纲,故常采用4阶中心矩与均方差的4次方的比值,即 μ_4/σ^4。同时,又因正态曲线的 μ_4/σ^4 值等于3,故定义

$$C_e=\frac{\mu_4}{\sigma^4}-3 \tag{1-36}$$

为峰度系数或简称峰度。

当 $C_e<0$ 时,表示分布曲线的峰度比正态曲线低,即比较平坦,称低峰度曲线;当 $C_e>0$ 时,则曲线比较尖峭,称高峰度曲线(图1-3)。

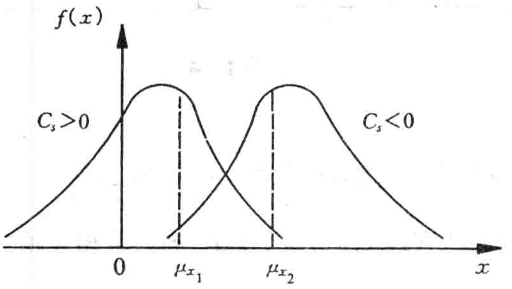

图1-2

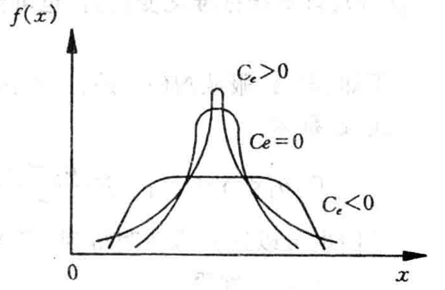

图1-3

在大多数实际问题中,最常用的数字特征是数学期望及方差(或均方差)、离散系数,其次是偏态,再次是峰度。而采用更多和更高阶的矩,从理论上说能够更多地描述随机变量的分布特征,但在实际统计中,用高阶矩将可能产生很大误差,故极少采用。

1.4 结构可靠度分析中常用的概率分布

1.4.1 正态分布

在许多实际问题中,遇到的实际变量常受到许多相互独立的随机因素的影响,而每个个别因素的影响都不起决定性的作用,但这些影响是可以叠加的。例如,电灯泡的耐用时数(寿命)受到原料、工艺、保管条件等因素的随机变动的影响,而这些因素的波动在正常情况下是相互独立的且每一个都不起决定性作用,并可认为是可以叠加的。在概率论的极限理论中可以证明:具有上述特点的随机变量一般都具有以函数

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right)\qquad(-\infty<\mu<\infty,\sigma>0) \tag{1-37}$$

为密度的连续型分布,称这种分布为正态分布或高斯分布。它依赖于两个常数 μ 及 σ,以后,把这种分布简记为 $N(\mu,\sigma)$。特殊地,$\mu=0,\sigma=1$ 的分布称为标准正态分布(图1-4)。

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) \tag{1-38}$$

正态分布 $N(\mu,\sigma)$ 中的常数 μ、σ 依次是按这个分布的随机变量的平均值与标准差。从而,对于正态分布,只要利用平均值及标准差这两个统计参数便能完全定出这个分布。

正态分布 $N(\mu,\sigma)$ 的变异系数为

$$\delta=\sigma/\mu$$