高等学校“十二五”应用型本科规划教材

线性代数

◎主　编　乔宝明
◎副主编　伊晓玲　谢丽娟　黄小平
朱雅敏　付纪刚

西安电子科技大学出版社
http://www.xduph.com

高等学校“十二五”应用型本科规划教材

线性代数

主　编　乔宝明
副主编　伊晓玲　谢丽娟　黄小平
　　　　朱雅敏　付纪刚

西安电子科技大学出版社

内容简介

"线性代数"是高等学校大多数专业的学生必修的一门数学基础课．本书为满足应用型本科学生系统学习的需要，强化了实用性、科学性、针对性，实现了知识结构的整体优化．本书叙述通俗易懂，语言简洁明快，并根据线性代数少学时的特点，对其深度和广度进行了适度调整．全书共分5章：行列式、矩阵及其运算、矩阵的初等变换与线性方程组、向量组的线性相关性、相似矩阵及二次型．每章后配有一定数量的习题，书末附有习题答案．

本书可作为高等学校工科及经济类专业"线性代数"课程的教材，也可作为自学人员的参考书．

图书在版编目(CIP)数据

线性代数/乔宝明主编．—西安：西安电子科技大学出版社，2014.8
高等学校"十二五"应用型本科规划教材
ISBN 978-7-5606-3448-7

Ⅰ．① 线…　Ⅱ．① 乔…　Ⅲ．① 线性代数—高等学校—教材
Ⅳ．① O151.2

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2014)第 176594 号

策划编辑　戚文艳
责任编辑　王　瑛
出版发行　西安电子科技大学出版社(西安市太白南路2号)
电　　话　(029)88242885　88201467　　邮　　编　710071
网　　址　www.xduph.com　　电子邮箱　xdupfxb001@163.com
经　　销　新华书店
印刷单位　陕西天意印务有限责任公司
版　　次　2014年8月第1版　2014年8月第1次印刷
开　　本　787毫米×1092毫米　1/16　印张　8
字　　数　179千字
印　　数　1～3000册
定　　价　14.00元
ISBN 978-7-5606-3448-7/O
XDUP　3740001-1

出版说明

本书为西安科技大学高新学院课程建设的最新成果之一．西安科技大学高新学院是经教育部批准，由西安科技大学主办的全日制普通本科独立学院．学院秉承西安科技大学50余年厚重的历史文化传统，充分利用西安科技大学优质教育教学资源，闯出了一条以“产学研”相结合为特色的办学路子，成为一所特色鲜明、管理规范的本科独立学院．

学院开设本、专科专业32个，涵盖工、管、文、艺等多个学科门类，在校学生1.5万余人，是陕西省在校学生人数最多的独立学院．学院是“中国教育改革创新示范院校”，2010、2011连续两年被评为“陕西最佳独立学院”．2013年被评为“最具就业竞争力”院校．学院部分专业现已被纳入二本招生，成为陕西首批纳入二本招生的独立学院．

学院注重教学研究与教学改革，实现了陕西独立学院国家级教改项目零的突破．学院围绕“应用型创新人才”这一培养目标，充分利用合作各方在能源、建筑、机电、文化创意等方面的产业优势，突出以科技引领、产学研相结合的办学特色，加强实践教学，以科研、产业带动就业，为学生提供了实习、就业和创业的广阔平台．学院注重国际交流合作和国际化人才培养模式，与美国、加拿大、英国、德国、澳大利亚以及东南亚各国进行深度合作，开展本科双学位、本硕连读、本升硕、专升硕等多个人才培养交流合作项目．

在学院全面、协调发展的同时，学院以人才培养为根本，高度重视以课程设计为基本内容的各项专业建设，以扎扎实实的专业建设，构建学院社会办学的核心竞争力．学院大力推进教学内容和教学方法的变革与创新，努力建设与时俱进、先进实用的课程教学体系，在师资队伍、教学条件、社会实践及教材建设等各个方面，不断增加投入、提高质量，为广大学子打造能够适应时代挑战、实现自我发展的人才培养模式．为此，学院与西安电子科技大学出版社合作，发挥学院办学条件及优势，不断推出反映学院教学改革与创新成果的新教材，以逐步建设学校特色系列教材为又一举措，推动学院人才培养质量不断迈向新的台阶，同时为在全国建设独立本科教学示范体系，服务全国独立本科人才培养，做出有益探索．

西安科技大学高新学院

西安电子科技大学出版社

2014年6月

高等学院“十二五”应用型本科规划教材
编审专家委员会名单

前　言

应用型本科教育的发展是高等教育进入大众化阶段的必然趋势，已成为我国高等教育的重要组成部分．线性代数作为应用型本科院校大多数专业的基础课程，其在学生的本科学习中有着举足轻重的作用，本书就是结合上述需求，由长期从事应用型本科院校数学教学的一线教师执笔编写而成的．

为满足应用型本科学生系统学习的需要，本书强化了实用性、科学性、针对性，实现了知识结构的整体优化．与同类教材相比，本书在章节上进行了适度的调整，并结合应用型本科教学的特点，对定理的证明及理论性过强的内容作了适当的淡化处理．本书每章的习题配置丰富多样，安排上由易到难，深入浅出，既注重对基础知识点的训练，又注重必要的技巧的强化．

本书由乔宝明（西安科技大学）担任主编，由伊晓玲（西安科技大学高新学院）、谢丽娟（西安科技大学高新学院）、黄小平（西安科技大学高新学院）、朱雅敏（西安工业大学）和付纪刚（西安科技大学高新学院）担任副主编．具体编写分工如下：第 1 章由伊晓玲编写，第 2 章由谢丽娟编写，第 3 章由黄小平编写，第 4 章由朱雅敏编写，第 5 章由付纪刚编写．全书由乔宝明统稿．

限于编者水平，书中难免存在不足之处，恳请各位专家、同行和读者批评指正．

编　者

2014 年 6 月

目　录

第1章　行　列　式

行列式是线性代数中的重要工具. 本章主要介绍行列式的定义、性质与计算方法，以及求解线性方程组的克拉默(Cramer)法则.

1.1　二阶与三阶行列式

在初等数学中，已通过解二元、三元线性方程组引出二、三阶行列式的定义，此处简单进行回顾.

1.1.1　二元线性方程组与二阶行列式

对于二元线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 \end{cases} \tag{1.1.1}$$

在初等数学中，主要通过消元法来进行求解，消元法的基本过程如下：

首先，第一个方程两端同时乘 a_{22}，第二个方程两端同时乘 a_{12}，然后两个方程相减，这样就可以消去未知数 x_2，得

$$(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x_1 = b_1a_{22} - a_{12}b_2$$

类似地，第一个方程两端同时乘 a_{21}，第二个方程两端同时乘 a_{11}，两个方程相减消去 x_1，得

$$(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x_2 = b_2a_{11} - a_{21}b_1$$

当 $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0$ 时，求得方程组(1.1.1)的解为

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{b_1a_{22} - a_{12}b_2}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}} \\[2ex] x_2 = \dfrac{a_{11}b_2 - a_{21}b_1}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}} \end{cases} \tag{1.1.2}$$

仔细观察式(1.1.2)会发现，x_1 和 x_2 的解具有相同的结构特征，具体如下：

(1) 都是分式形式，且分母相同；

(2) 分子、分母都是两项的代数和；

(3) 参与代数和的每一项都是两个元素的乘积.

为了方便记忆，根据上述特征引入二阶行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \tag{1.1.3}$$

其中，数 $a_{ij}(i=1, 2; j=1, 2)$ 称为行列式(1.1.3)的元素. 元素 a_{ij} 的下标表示该元素在行列式中的位置，第一个下标 i 称为行标，表明该元素位于第 i 行，第二个下标 j 称为列标，表明该元素位于第 j 列.

上述二阶行列式的定义，可用对角线法则来记忆. 如图 1.1.1 所示，把 a_{11} 到 a_{22} 的实连线称为主对角线，a_{12} 到 a_{21} 的虚连线称为副对角线，于是二阶行列式便是主对角线上两元素之积减去副对角线上两元素之积所得的差.

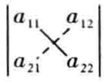

图 1.1.1

若记

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix},\quad D_1=\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix},\quad D_2=\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}$$

那么式(1.1.2)可写成

$$\begin{cases} x_1=\dfrac{D_1}{D}=\dfrac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}} \\ x_2=\dfrac{D_2}{D}=\dfrac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}} \end{cases} \tag{1.1.4}$$

值得说明的是：式(1.1.4)中的分母 D 是由方程组(1.1.1)的系数所确定的二阶行列式(称其为系数行列式)，x_1 的分子 D_1 是用常数项 b_1、b_2 替换 D 中 x_1 的系数 a_{11}、a_{21} 所得的二阶行列式，x_2 的分子 D_2 是用常数项 b_1、b_2 替换 D 中 x_2 的系数 a_{12}、a_{22} 所得的二阶行列式. 可以简单地理解为“求谁换谁”，即求未知数 x_1 时就将分母 D 中 x_1 的系数用相应的常数项换掉，从而形成分子 D_1；求未知数 x_2 时就将分母 D 中 x_2 的系数用相应的常数项换掉，从而形成分子 D_2.

例 1.1.1　求解二元线性方程组：

$$\begin{cases} 3x_1+x_2=5 \\ 2x_1-x_2=1 \end{cases}$$

解　由于

$$D=\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}=-3-2=-5\neq 0$$

$$D_1=\begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}=-5-1=-6$$

$$D_2=\begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}=3-10=-7$$

所以原方程组的解为

$$\begin{cases} x_1=\dfrac{D_1}{D}=\dfrac{-6}{-5}=\dfrac{6}{5} \\ x_2=\dfrac{D_2}{D}=\dfrac{-7}{-5}=\dfrac{7}{5} \end{cases}$$

1.1.2 三阶行列式

与二元线性方程组类似，含有三个未知量三个方程式的线性方程组的一般形式为

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 \end{cases} \tag{1.1.5}$$

同样可以利用消元法对方程组(1.1.5)进行求解. 当

$$a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{13}a_{22}a_{31}\neq 0$$

时，有

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{b_1a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}b_3+a_{13}b_2a_{32}-b_1a_{23}a_{32}-a_{12}b_2a_{33}-a_{13}a_{22}b_3}{a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{13}a_{22}a_{31}} \\ x_2 = \dfrac{a_{11}b_2a_{33}+b_1a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}b_3-a_{11}a_{23}b_3-b_1a_{21}a_{33}-a_{13}b_2a_{31}}{a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{13}a_{22}a_{31}} \\ x_3 = \dfrac{a_{11}a_{22}b_3+a_{12}b_2a_{31}+b_1a_{21}a_{32}-a_{11}b_2a_{32}-a_{12}a_{21}b_3-b_1a_{22}a_{31}}{a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{13}a_{22}a_{31}} \end{cases} \tag{1.1.6}$$

这就是三元方程组的解的公式. 这个公式形式比较繁琐，为了便于记忆，下面引进三阶行列式的概念.

定义 1.1.1 设有 9 个数排成 3 行 3 列的数表

$$\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{matrix} \tag{1.1.7}$$

记

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{13}a_{22}a_{31} \tag{1.1.8}$$

式(1.1.8)称为数表(1.1.7)所确定的三阶行列式.

上述定义表明三阶行列式含 6 项，每项均为不同行不同列的三个元素的乘积再冠以正负号，其规律遵循图 1.1.2 所示的对角线法则，即图中三条实线上三个元素的乘积冠正号，三条虚线上三个元素的乘积冠负号.

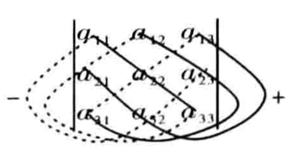

图 1.1.2

同样采用二元线性方程组求解中“求谁换谁”的思想，令

$$D_1=\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix},\quad D_2=\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix},\quad D_3=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}$$

则方程组(1.1.5)的解(即式(1.1.6))可改写为

$$\begin{cases} x_1=\dfrac{D_1}{D} \\ x_2=\dfrac{D_2}{D} \\ x_3=\dfrac{D_3}{D} \end{cases}$$

例 1.1.2 计算三阶行列式：

$$D=\begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ -2 & 2 & 1 \\ -3 & 4 & -2 \end{vmatrix}$$

解 按对角线法则，有

$$\begin{aligned} D &= 1\times2\times(-2)+2\times1\times(-3)+(-3)\times(-2)\times4-1\times1\times4 \\ &\quad -2\times(-2)\times(-2)-(-3)\times2\times(-3) \\ &= -4-6+24-4-8-18 \\ &= -16 \end{aligned}$$

例 1.1.3 解方程组：

$$\begin{cases} x_1-2x_2+x_3=-2 \\ 2x_1+x_2-3x_3=1 \\ -x_1+x_2-x_3=0 \end{cases}$$

解 由于系数行列式

$$\begin{aligned} D &= \begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & -3 \\ -1 & 1 & -1 \end{vmatrix} \\ &= 1\times1\times(-1)+(-2)\times(-3)\times(-1)+1\times2\times1 \\ &\quad -1\times1\times(-1)-(-2)\times2\times(-1)-1\times(-3)\times1 \\ &= -5\neq0 \end{aligned}$$

同理，得

$$D_1=\begin{vmatrix} -2 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix}=-5$$

$$D_2=\begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & -3 \\ -1 & 0 & -1 \end{vmatrix}=-10$$

$$D_3=\begin{vmatrix} 1 & -2 & -2 \\ 2 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{vmatrix}=-5$$

故该方程组的解为

$$\begin{cases} x_1=\dfrac{D_1}{D}=1 \\ x_2=\dfrac{D_2}{D}=2 \\ x_3=\dfrac{D_3}{D}=1 \end{cases}$$

例 1.1.4 求 a、b 满足什么条件时，有

$$\begin{vmatrix} a & b & 0 \\ -b & a & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}=0$$

解 由于

$$\begin{vmatrix} a & b & 0 \\ -b & a & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}=a^2+b^2$$

因此，若要使 $a^2+b^2=0$，则要求 a、b 同时为零. 即当 $a=0,b=0$ 时，给定的行列式等于零.

1.2 全排列与逆序数

1.2.1 全排列

定义 1.2.1(排列) 由 n 个不同的元素 1，2，3，…，n 排成的任一有序数组，称为一个 n 级全排列，简称 n 级排列.

例如，1 3 2 是一个 3 级排列，1 2 3 4 5 是一个 5 级排列.

n 个不同元素的所有排列的个数通常用 P_n 表示，即

$$\mathrm{P}_n=n\cdot(n-1)\cdot\cdots\cdot3\cdot2\cdot1=n!$$

例如，由 1、2、3 这三个元素可以排出 3！=6 个 3 级排列，它们是：

1 2 3，1 3 2，2 1 3，2 3 1，3 1 2，3 2 1

一般地，我们将一个 n 级排列记为 i_1，i_2，…，i_n，其中 i_1 是 1，2，…，n 中的某一个数，i_2 是余下的 $n-1$ 个数中的某一个数，依此类推.

1.2.2 逆序数

对于 n 个不同的元素，先规定各元素之间的一个标准次序(例如 n 个不同的自然数，可规定由小到大为标准次序)，于是在这 n 个元素的任一排列中，当某两个元素的先后次序与标准次序不同时，则称发生了一个逆序.

定义 1.2.2 在 n 级排列 i_1，i_2，…，i_n 中，如果有较大的数 i_j 排在较小的数 i_k 前面(即 $j<k$，但是 $i_j>i_k$)，则称 i_j 与 i_k 构成了一个逆序. 一个排列中所有逆序的总数称为这个排列的逆序数. 排列 i_1，i_2，…，i_n 的逆序数记为 $t(i_1, i_2, \cdots, i_n)$.

逆序数为奇数的排列称为奇排列，逆序数为偶数的排列称为偶排列.

下面讨论计算排列的逆序数的方法.

不失一般性，不妨设 n 个元素为 1 至 n 这 n 个自然数，并规定由小到大为标准次序.

设 $p_1p_2\cdots p_n$ 为这 n 个自然数的一个排列，考虑元素 $p_i(i=1,2,\cdots,n)$，如果比 p_i 大的且排在 p_i 前面的元素有 t_i 个，就说 p_i 这个元素的逆序数是 t_i. 全体元素的逆序数总和

$$t=t_1+t_2+\cdots+t_n=\sum_{i=1}^{n}t_i \quad (i=1,2,\cdots,n) \tag{1.2.1}$$

就是这个排列的逆序数.

例 1.2.1　求排列 6 3 5 1 2 4 的逆序数，并判断此排列的奇偶性.

解　在排列 6 3 5 1 2 4 中，

6 排在首位，前面没有比它更大的数，故其逆序数为 0；

3 的前面只有 6 比它大，故 3 的逆序数为 1；

5 的前面也只有 6 比它大，故 5 的逆序数为 1；

1 的前面有 3 个数(6、3、5)比它大，故 1 的逆序数为 3；

2 的前面有 3 个数(6、3、5)比它大，故 2 的逆序数为 3；

4 的前面有 2 个数(6、5)比它大，故 4 的逆序数为 2.

于是这个排列的逆序数为

$$t=0+1+1+3+3+2=10$$

因此该排列为偶排列.

1.3　n 阶行列式的定义

为了作出 n 阶行列式的定义，先来回顾二、三阶行列式的结构. 二、三阶行列式的定义分别为

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{13}a_{22}a_{31}$$

通过仔细观察可以看出二、三阶行列式的结构具有如下特点：

(1) 二阶行列式由 2！项的代数和构成；三阶行列式由 3！项的代数和构成.

(2) 二阶行列式的代数和的每一项是两个元素的乘积，且这两个元素来自于不同行不同列；三阶行列式的代数和的每一项是三个元素的乘积，且这三个元素来自于不同行不同列.

(3) 代数和中的每一项，行标都是标准次序，若列标的逆序数为偶数(即列标为偶排列)，则该项前面为正号；若列标的逆序数为奇数(即列标为奇排列)，则该项前面为负号.

由此，二、三阶行列式还可以改写为

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}=\sum_{2!}(-1)^{t(p_1p_2)}a_{1p_1}a_{2p_2}$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=\sum_{3!}(-1)^{t(p_1p_2p_3)}a_{1p_1}a_{2p_2}a_{3p_3}$$

根据这一特点，我们可以把行列式推广到一般情形.

定义 1.3.1 由 n^2 个数 $a_{ij}(i, j=1, 2,\cdots, n)$组成的记号

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

称为 n 阶行列式. 它是由 n! 项构成的代数和，每一项都是来自不同行不同列的 n 个元素的乘积. 当这 n 个元素的行标按升序排列时，以列标的逆序数作为-1 的幂次为该项冠以相应的符号，即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{n!} (-1)^{t(p_1 p_2 \cdots p_n)} a_{1p_1} a_{2p_2} \cdots a_{np_n}$$

行列式通常用字母 D 表示，也可简记为 $\det(a_{ij})$.

需要说明的是，按定义 1.3.1 形成的二、三阶行列式与 1.1 节中用画对角线的方法形成的二、三阶行列式是一致的，而高于三阶的行列式不能用画对角线的方法定义. 同时，根据定义 1.3.1，一阶行列式$|a_{11}|=a_{11}$，注意不要与绝对值记号相混淆.

根据定义 1.3.1，容易得到以下常用结论：

(1)

$$\begin{vmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{vmatrix} = \lambda_1 \lambda_2 \cdots \lambda_n$$

(2)

$$\begin{vmatrix} & & & \lambda_1 \\ & & \lambda_2 & \\ & ⋰ & & \\ \lambda_n & & & \end{vmatrix} = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} \lambda_1 \lambda_2 \cdots \lambda_n$$

(3)

$$\begin{vmatrix} a_{11} & & & \\ a_{21} & a_{22} & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11} a_{22} \cdots a_{nn}$$

(4)

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11} a_{22} \cdots a_{nn}$$

上述(1)～(4)所示行列式中未写出的元素均为“0”，(1)和(2)的左端称为对角行列式，(3)和(4)的左端分别称为下三角形行列式和上三角形行列式.

例 1.3.1　设

$$D_1=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},\quad D_2=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12}b^{-1} & \cdots & a_{1n}b^{1-n} \\ a_{21}b & a_{22} & \cdots & a_{2n}b^{2-n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1}b^{n-1} & a_{n2}b^{n-2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

证明：$D_1=D_2$.

证明　根据行列式的定义可得

$$D_1=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=\sum_{n!}(-1)^{t(p_1p_2\cdots p_n)}a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots a_{np_n}$$

$$\begin{aligned} D_2 &= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12}b^{-1} & \cdots & a_{1n}b^{1-n} \\ a_{21}b & a_{22} & \cdots & a_{2n}b^{2-n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1}b^{n-1} & a_{n2}b^{n-2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \\ &= \sum_{n!}(-1)^{t(p_1p_2\cdots p_n)}a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots a_{np_n}b^{(1+2+\cdots+n)-(p_1+p_2+\cdots+p_n)} \end{aligned}$$

由于 $p_1+p_2+\cdots+p_n=1+2+\cdots+n$，故

$$\begin{aligned} D_2 &= \sum_{n!}(-1)^{t(p_1p_2\cdots p_n)}a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots a_{np_n}b^{(1+2+\cdots+n)-(p_1+p_2+\cdots+p_n)} \\ &= \sum_{n!}(-1)^{t(p_1p_2\cdots p_n)}a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots a_{np_n} \end{aligned}$$

故 $D_1=D_2$.

1.4　对　　换

为了研究 n 阶行列式的性质，先来讨论对换以及它与排列的奇偶性的关系.

定义 1.4.1(对换)　在一个排列 $i_1\cdots i_s\cdots i_t\cdots i_n$ 中，如果只将 i_s 与 i_t 的位置互换(其余均不动)，得到另一个排列 $i_1\cdots i_t\cdots i_s\cdots i_n$，这样的变换称为一次对换.

例如，在排列 3 2 1 4 5 中，将 2 与 4 对换，得到新的排列 3 4 1 2 5. 我们会发现，奇排列 3 2 1 4 5 经对换 2 与 4 之后，变成了偶排列 3 4 1 2 5. 反之，也可以说偶排列 3 4 1 2 5 经对换 4 与 2 之后，变成了奇排列 3 2 1 4 5.

定理 1.4.1　一个排列中的任意两个元素对换，排列改变奇偶性.

证明　先证相邻对换的情形.

设排列为 $a_1\cdots a_labb_1\cdots b_m$，对换 a 与 b，变为 $a_1\cdots a_lbab_1\cdots b_m$. 显然，$a_1,\cdots,a_l$ 和 $b_1,\cdots,b_m$ 这些元素的逆序数经过对换并不改变，而 a、b 两元素的逆序数改变为：当 $a<b$ 时，经对换后 a 的逆序数增加 1 而 b 的逆序数不变；当 $a>b$ 时，经对换后 a 的逆序数不变而 b 的逆