1089 and All That: A Journey into Mathematics

大衛・艾契森
David Acheson
著

洪萬生
洪碧芳
黃俊瑋
譯

★臺灣師範大學數學系退休教授
洪萬生老師 專文導讀・合譯

玉米罐頭上的π和掉進牛奶裡的e

從1089開始的16段不思議數學之旅

1089大驚奇，讓數學家也瘋狂的神奇數學！

一位愛玩爵士吉他的數學家擔任我們的
福爾摩斯抽絲剝繭，

有趣的謎題＋世界知名漫畫家的插畫＝
一本最容易閱讀、最具想像力的數學書

可能是史上最棒的
一本數學書
──《神奇酷數學》
作者查坦・波斯基

所有數學家
也都應該多買幾本……
的無比熱愛這本書
《數學可以救羅馬？！》
作者伊恩・史都華

一本可愛的小書
──《費馬最後定理》
作者賽門・辛

當代的經典……
一部啟發智慧的
小品傑作
──美國數學協會

誰會喜歡這本書？
絕對是任何人都會喜歡！
──權威數學網路雜誌
Plus Magazine

1089 and All That: A Journey into Mathematics

玉米罐頭上的π和掉進牛奶裡的e

從1089開始的16段不思議數學之旅

大衛・艾契森
（David Acheson）
著

洪萬生
洪碧芳
黃俊瑋
譯

國家圖書館出版品預行編目資料

掉進牛奶裡的e和玉米罐頭上的π：從1089開始的16段不思議數學之旅／大衛・艾契森（David Acheson）著；洪萬生、洪碧芳、黃俊瑋譯.-- 初版.-- 臺北市：臉譜，城邦文化出版：家庭傳媒城邦分公司發行，2013.02
面； 公分. --（科普漫遊；FQ1029）
譯自：1089 and All That: A Journey into Mathematics

ISBN 978-986-235-233-5（平裝）

1. 數學 2. 通俗作品

310　　102000652

科普漫遊 FQ1029

掉進牛奶裡的e和玉米罐頭上的π
從1089開始的16段不思議數學之旅

作　　者　大衛・艾契森（David Acheson）
譯　　者　洪萬生、洪碧芳、黃俊瑋
副總編輯　劉麗真
主　　編　陳逸瑛、顧立平
美術設計　陳瑀聲

發 行 人　凃玉雲
出　　版　臉譜出版
城邦文化事業股份有限公司
台北市中山區民生東路二段141號5樓
電話：886-2-25007696　傳真：886-2-25001952
發　　行　英屬蓋曼群島商家庭傳媒股份有限公司城邦分公司
台北市中山區民生東路二段141號11樓
客服服務專線：886-2-25007718；25007719
24小時傳真專線：886-2-25001990；25001991
服務時間：週一至週五上午09:30-12:00；下午13:30-17:00
劃撥帳號：19863813　戶名：書虫股份有限公司
讀者服務信箱：service@readingclub.com.tw
香港發行所　城邦（香港）出版集團有限公司
香港灣仔駱克道193號東超商業中心1樓
電話：852-25086231　傳真：852-25789337
E-mail : hkcite@biznetvigator.com
馬新發行所　城邦（馬新）出版集團 Cité (M) Sdn Bhd
41, Jalan Radin Anum, Bandar Baru Sri Petaling, 57000 Kuala Lumpur, Malaysia
電話：603-90578822　傳真：603-90576622
E-mail: cite@cite.com.my

初版一刷　2013年2月6日

城邦讀書花園
www.cite.com.tw

ISBN 978-986-235-233-5

定價：260元

1089 and All That: A Journey into Mathematics

玉米罐頭上的π和掉進牛奶裡的e

從1089開始的16段不思議數學之旅

大衛・艾契森
（David Acheson）
著

洪萬生
洪碧芳
黃俊瑋
譯

〈導讀〉

數學列車 1089 號啟程

洪萬生

一、前言

一本數學普及小品竟然運用一個「等式」充當書名，而且，其中還有一個十分特別的數目 1089！事實上，本書是作者大衛．艾契森（David Acheson）從 1089 啟程的一趟數學列車之旅。

1089 為何有趣？原來它相當魔幻！任選一個三位數，譬如說 752 好了。將它的百位數與個位數對調，得 257，再將這兩個三位數相減（大減小），得 752 − 257 = 495。現在，再將 495 的百位數與個位數對調，得 594。最後，將 495 與 594 相加：495 + 594 = 1089。這是一個對於數學再怎麼無感的人都會好奇的問題，緊接著，或許我們就可以討論它的所以然之故了。

一般而言，應用數學家書寫科普或進行數學通識教學，大都喜歡強調數學知識的有用面向（utility）。本書作者大衛·艾契森是一位應用數學家，目前是英國牛津大學耶穌學院終身會士（Emeritus Fellow），為什麼他將這個挑起讀者好奇心的數目 1089 當作本書的引子呢？原來在十歲時——十歲果然重要，安德魯·懷爾斯（Andrew Wiles）也是在十歲時，邂逅了費馬最後定理——艾契森從一本兒童普及刊物《I-SPY Annual》（1956 年）讀到魔術師如何運用這個魔幻數目。也因此忽忽四十年過去了，他總是念茲在茲第一流數學定理或結果所真正製造的驚奇（wonder）！

二、內容簡介

這本小書總共有 16 章，目錄依序如下：

1. 1089 and All That
2. 'In Love with Geometry'
3. But…that's Absurd…

4. The Trouble with Algebra
5. The Heavens in Motion
6. All Change!
7. On Being as Small as Possible
8. 'Are We Nearly There?'
9. A Brief History of π
10. Good Vibrations
11. Great Mistakes
12. What is the Secret of All Life?
13. e = 2.718...
14. Chaos and Catastrophe
15. Not Quite the Indian Rope Trick
16. Real or Imaginary?

現在，我們依序簡介各章內容。在第 1 章中，作者從 1089 的驚奇（wonder）說起，希望帶領讀者（不管多大多小）搭上數學快車，一同欣賞數學中的令人驚奇定理（wonderful theorems）、美麗證明（beautiful proofs）以及偉大應用（great applications）。

第 2 章一開始的插曲，則是英國 17 世紀唯物機械論哲學家霍布斯（Thomas Hobbes, 1588-1679）學習歐幾里得《幾何原本》的插曲。霍布斯四十歲那一年才初識《幾何原本》所呈現的數學知識之確定性，他的切入點是畢氏定理的證明——《幾何原本》第一冊第 47 命題。在研讀此一證明時，他發現他必須逆溯第一冊第 1 到第 46 的某些命題。這種確定性（certainty）讓他「愛上了幾何」（in love with geometry），終生不渝！除了畢氏定理之外，本章也討論圓面積公式，特別是圓周率 π 及其展開式——萊布尼茲級數：

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \ldots$$

類似這種令人驚奇的連結（connections），譬如 π 與奇數的關係，在數學中處處可見。還有，作者還提及叫人討喜的拓樸學圖形，以及最重要的，舉例說明證明在數學中是如何重要，尤其是我們將某些延拓（generalization）視為理所當然時：由於

圓周上 2 點之連線可將此圓分為 2 個區域；
圓周上 3 點之連線可將此圓分為 4 個區域；

圓周上 4 點之連線可將此圓分為 8 個區域；

圓周上 5 點之連線可將此圓分為 16 個區域；

依此類推（analogy），「圓周上 6 點之連線」當然「可將此圓分為 32 個區域」了！然而，此一猜測卻是大錯特錯，[1] 因此，證明就變得不可或缺了。

在第 3 章一開始，作者引述柯南．道爾的《綠玉冠探案》（*The Adventure of the Beryl Coronet*）結語，讓福爾摩斯說明歸謬法的重要性。作者的第一個例子，是歐拉（Euler）的克尼斯堡七橋問題。第二是有關質數是無窮多的證明。第三則是費馬最後定理。針對最後這個例子，作者說明 $n = 3$ 的情況差一點成立：

$$729^3 + 244^3 = 401{,}947{,}273$$

$$738^3 = 401{,}947{,}272$$

第 4 章主題是（中學）代數。作者的引子有 19 世紀早期法

1 在本書中，作者提供了正確答案 31，至於通式則是 $\frac{1}{24}(n^4 - 6n^3 + 23n^2 - 18n + 24)$。

國小說家斯湯達爾（Stendhal），以及 1953 年英國一個童話故事主角莫思渥斯（Molesworth）的認知困擾。[2] 針對後者，作者認為運用代數方法證明 1089 何以魔幻，應該足以說明代數如何有用了。此外，作者還引進座標概念，說明代數更是有助於解決幾何問題。

第 5 章主題是天體運動，作者首先引述美國媒體有關哈雷彗星在 1910 年接近地球軌道時社會大眾如何恐慌的新聞。然後，進一步說明克卜勒與牛頓的傑出貢獻。其中，作者當然頗多仰賴於當時的數學文本，譬如牛頓的經典《原理》（*Principia*）。

第 6 章主題是變化率（rate of change），並藉以引出微積分。不過，它的重點擺在微分法上。至於第 7 章則是運用微分法來處理自然界中的極值問題。在一般人所熟悉的問題之外，作者也提及最小曲面與最速降線等問題及其求解。此外，他還介紹路線網路問題（road network problem）：如何運用路線網路連結不同的城鎮，使得路線越短越好。對於四個城鎮來說，最短的路線網路長度恰好等於 $1 + \sqrt{3}$。至於此一路徑如何取得，則可以運

2 此一主角出自威藍斯（Geoffrey Willans）與賽爾（Ronald Searle）合著的《打倒學校！》（*Down with Skool!*）。

用肥皂泡膜來試驗。輔以實驗，這是本書作者闡揚數學真理的一個重要進路。

第 8 章主題是無窮級數（收斂與發散），並且利用它來定義曲線邊界的平面區域之面積，以及像$\sqrt{2}$ 這樣的無理數。為何$\sqrt{2}$ 是無理數呢？顯然，這就需要證明了。除了這個歸謬證明（reductio ad absurdum）之外，作者也引進了數學歸納法。

在第 9 章中，作者介紹了圓周率 π 的簡史。這個題材一向為科普書寫所歡迎。作者先定義 π，然後，由於該定義與圓面積無涉，因此，吾人必須證明何以圓面積 = πr^2。作者所提供的證法，是將圓面積近似為

$$\frac{1}{2} \times (\text{圓內接正 } n \text{ 邊形的周長}) \times (\text{等腰三角形的高})$$

其中這個等腰三角形是由圓內接正 n 邊形分解而成，直觀而自然，值得肯定。當然由於本章主題是 π 的簡史，所以，作者緊接著概述了 π 的近似值發展史，其中作者尤其指出萊布尼茲級數與歐拉級數之意義，另外，他還介紹 18 世紀法國數學家卜豐（Buffon）如何從機率來看 π。

第 10 章主題是樂音、弦振與正餘弦函數之關係。這是主要

訴求實用的一章，作者也提及他自己玩爵士吉他的經驗。到了第 11 章，作者又拉回數學有趣的面向。現在，他的主題是「驟下結論」（jump to conclusion）難以避免的風險。他所舉出的第一個例子是瑪菲堤問題（Malfatti's problem），亦即：給定一個三角形內，作出三個不重疊的圓形，使得它們所占的面積最大。這是 1803 年瑪菲堤所提出並宣稱解決的問題，但是，直到 1967 年，才被古柏格（Michael Goldberg）指出其誤謬，並提供正確解答。數學家的這種「大膽假設」，歐拉絕不缺席。作者提及他在證明費馬最後定理在 $n = 3$ 為真之後，即猜測三個四次方的和等於一個四次方，四個五次方之和等於一個五次方等等，也都是不可能。沒想到到了 1966 年，蘭德（Lander）和帕金（Parkin）提出反例：$27^5 + 84^5 + 110^5 + 133^5 = 144^5$。對於歐拉的賢者之失，數學社群不管是 18 世紀或 21 世紀，一點都不介意，真是令人羨慕。有關驟下結論之例子，作者還提出無窮級數求和問題，以及 1917 年由日本數學家掛谷所提出的所謂掛谷問題（Kakeya's problem）。

第 12 章主題是微分方程。作者以 18 世紀的力學、19 世紀的電磁學、20 世紀的量子力學，以及 21 世紀的生物學為例，說明微分方程及其求解的核心位置。作者在本章一開始所運用的引