21世纪独立本科院校规划教材

大学数学教程

概率论与数理统计简明教程

南京大学金陵学院大学数学教研室　编著

东南大学出版社
SOUTHEAST UNIVERSITY PRESS

大学数学教程

概率论与数理统计简明教程

南京大学金陵学院大学数学教研室 编著

东南大学出版社
·南京·

内 容 提 要

本书是普通高校"独立学院"本科"概率论与数理统计"课程的教材，简明介绍了概率论与数理统计最基本的理论与方法，内容包含随机事件与概率、随机变量及其分布、多维随机变量及其分布、随机变量的数字特征、大数定律与中心极限定理、数理统计的基本概念、参数估计、假设检验、方差分析与回归分析等九章.

本书在深度和广度上符合教育部审定的"高等数学课程教学基本要求"，并参照教育部考试中心颁发的报考硕士研究生《数学考试大纲》中数学一与数学三的知识范围. 编写的立足点是基础与应用并重，注重数学的思想和方法，注重经济背景和实际意义，适合独立学院培养高素质应用型人才的目标.

本书结构严谨，难易适度，语言简洁，可供独立学院、二级学院作为"概率论与数理统计"课程的教材，也可供科技工作者作为自学"概率论与数理统计"的参考书.

图书在版编目(CIP)数据

概率论与数理统计简明教程 / 南京大学金陵学院大学数学教研室编著. —南京：东南大学出版社，2014. 6

ISBN 978-7-5641-4997-0

Ⅰ. ①概… Ⅱ. ①南… Ⅲ. ①概率论—高等学校—教材 ②数理统计—高等学校—教材 Ⅳ. ①O21

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2014)第 111604 号

概率论与数理统计简明教程

出版发行	东南大学出版社
社　　址	南京市四牌楼 2 号(邮编：210096)
出 版 人	江建中
责任编辑	吉雄飞(办公电话：025-83793169)
经　　销	全国各地新华书店
印　　刷	南京京新印刷厂
开　　本	700mm×1000mm　1/16
印　　张	16. 5
字　　数	323 千字
版　　次	2014 年 6 月第 1 版
印　　次	2014 年 6 月第 1 次印刷
书　　号	ISBN 978-7-5641-4997-0
定　　价	32. 00 元

本社图书若有印装质量问题，请直接与营销部联系，电话：025-83791830。

前　言

在高等教育办学体制深化改革的大好形势下，高等教育的新模式“独立学院”应运而生.一流大学搞科研，培养研究型人才；高职高专学技术，培养技能型人才.而依托一流名校的独立学院的培养目标是培养高素质的具有创新精神的应用型人才.高素质的应用型人才，是既要动手又能动脑，既会应用又懂原理的高素质的、深受社会和大中企业欢迎的人才.认清这个培养目标，对我们编写独立学院“概率论与数理统计”课程的教材具有指导意义.

可以说，数学是科学的“语言”，是学习一切自然科学的“钥匙”，数学素养已成为衡量一个国家科技水平的重要标志.独立学院的“概率论与数理统计”课程，是培养应用型人才的重要基础课.我们编写本书的立足点是基础与应用并重，以提高数学素养为总目标.

在基础与应用并重的思想指导下，我们编写了“概率论与数理统计”课程的教学大纲，设计了课时安排，编写教材与教学实践密切结合，在实践中编写，编写后再实践，期待完善.在编写过程中，努力做到：

(1) 在深度和广度上符合教育部审定的高等院校“高等数学课程教学基本要求”，并参照教育部考试中心颁发的报考硕士研究生《数学考试大纲》中数学一与数学三的知识范围.在独立学院中有大约20%的优等生，他们因为高考失手，没有考上理想的高校，进入独立学院后他们发奋努力，励志考研.我们编写教材时在深度上不可能为他们考虑太多，但在广度上我们应尽可能达到考研的知识范围.

(2) 注重数学的思想和方法，适当地渗透现代数学思想，运用部分近代数学的术语与符号，以求符合独立学院培养高素质应用型人才的目标.我们的教学任务除使学生获得“概率论与数理统计”的基本概念、基本理论和基本方法外，还要使学生受到一定的科学训练，学到数学思想方法，提高逻辑推理能力，为学生学习后继课程提供必要的数学基础，为学生大学毕业后胜任工作或继续深造积累潜在的能力.

我们的目标是结构严谨、难易适度、语言简洁、适合培养目标、贴近教学实际、便于教与学.

本书简明介绍了概率论与数理统计最基本的理论与方法，内容包含随机事件与概率、随机变量及其分布、多维随机变量及其分布、随机变量的数字特征、大数定

律与中心极限定理、数理统计的基本概念、参数估计、假设检验、方差分析与回归分析等九章,适用于独立学院文理科各专业.本书可安排一个学期,每周4学时,共64学时讲授;学时少的,每周3学时,共48学时讲授也可.

本书中四周加框的内容是重要定义、重要方法、重要公式,是要求学生熟记的的主要知识点.书中用“*”标出的段落为较难内容,供任课教师选用,一般留给有兴趣的学生课外阅读或查阅.书中习题分A,B两组,A组为基本要求,B组为较高要求(供优秀学生和准备考研的学生选用),书末有习题答案与提示.

本书由南京大学金陵学院大学数学教研室编著,陈仲主编,张玉莲、袁明霞编写第1章与第5章,王夕予、林小围编写第2章与第3章,王培、马荣编写第4章与第6章,章丽霞、邓建平编写第7章与第8章,袁明霞编写第9章,全书由陈仲与袁明霞统稿.

感谢南京大学金陵学院将本课程建设项目立项进行教材建设(项目编号为0010111213).感谢南京大学金陵学院教务处和基础教学部对编者们的关心和支持.感谢南京大学朱乃谦教授、滕利邦教授、章德教授、钱钟教授、邵进教授、王均义教授、孔敏教授以及兄弟院校的魏云峰、邵宝刚二位老师对本课程的一贯支持.感谢东南大学出版社吉雄飞编辑的认真负责和悉心编校,使本书质量大有提高.

书中不足与错误难免,敬请智者不吝赐教.

陈　仲

2014年5月于南京大学

目　　录

1 随机事件与概率

1.1 随机事件

1.1.1 随机试验

在自然界里，人们在生产实践和科学实验中观察到的现象大体可归结为两种类型. 一类是在一定条件下必然会发生的，例如，一个标准大气压下水在 100℃ 时会沸腾，异性电荷必相互吸引等等，这类现象称为**确定性现象**. 但人们逐渐还发现另一类型的现象，它是事前不可预知的，即在相同条件下重复进行试验，每次结果未必相同，这一类现象称为**随机现象**. 例如，新生的婴儿可能是男，也可能是女；相同条件下抛同一枚硬币，结果可能是正面向上，也可能是反面向上. 类似的例子还能举出许多. 随机现象在个别试验中结果呈现出不确定性，但在大量重复观察下，结果却呈现出某种规律性. 例如，多次重复抛同一枚硬币得到正面向上的次数大致占一半. 这种大量重复观察中呈现出的固有规律性，称为随机现象的**统计规律性**. 概率论与数理统计就是研究随机现象统计规律性的一门数学学科.

为了叙述方便，我们把对某种自然现象作一次观察或进行一次科学试验统称为一个**试验**. 概率论里所研究的试验具有下列特点：

(1) 可以在相同的条件下重复进行；

(2) 每次试验的结果具有多种可能性，并且试验之前可以明确试验的所有可能结果；

(3) 进行一次试验之前不能确定哪一个结果会出现.

具有上述 3 个特点的试验称为**随机试验**，通常用字母 $E,E_1,E_2,\cdots$ 表示. 本书中以后提到的试验都是指随机试验.

1.1.2 随机事件与样本空间

在概率论中，将随机试验的结果称为**事件**. 每次随机试验中一定发生的事件称为**必然事件**，一定不发生的事件称为**不可能事件**. 而一个随机试验中，可能发生也可能不发生的事件称为**随机事件**，通常用字母 $A,B,C,\cdots$ 表示. 例如，掷一颗骰子，“出现的点数小于 7”是必然事件，“点数大于 8”是不可能事件，“点数为奇数”、“点数为 3”均为随机事件.

随机试验 E 中每一个可能出现的结果称为 E 的**样本点**，通常用 ω 表示. 随机试验的所有样本点构成的集合称为 E 的**样本空间**，记为

$$\Omega=\{\omega_1,\omega_2,\cdots,\omega_n,\cdots\}$$

或 $\Omega=\{\omega\mid\omega\text{ 具有某性质}\}$，简记为 $\Omega=\{\omega\}$. 随机试验的任一样本点也是随机事件，我们把样本点组成的单点集称为**基本事件**.

例 1 设随机试验为将一枚硬币抛掷两次.

(1) 如果观察其正面(H)和反面(T)出现的情况，则有样本点

$$\omega_1:(\mathrm{H},\mathrm{H});\quad \omega_2:(\mathrm{H},\mathrm{T});\quad \omega_3:(\mathrm{T},\mathrm{H});\quad \omega_4:(\mathrm{T},\mathrm{T})$$

此时，样本空间为四个样本点构成的集合，即

$$\Omega=\{\omega_1,\omega_2,\omega_3,\omega_4\}$$

(2) 如果观察正面出现的次数，则有样本点

$$\omega'_i:\text{正面出现 } i \text{ 次}\quad (i=0,1,2)$$

此时，样本空间为三个样本点构成的集合，即

$$\Omega'=\{\omega'_0,\omega'_1,\omega'_2\}$$

本例表明，随机试验的样本点与样本空间是由试验的条件和观察目的所决定的.

例 2 从一工厂的某种产品中抽取 n 件产品，观察次品件数. 该随机试验有样本点

$$\omega_i:\text{观察到 } i \text{ 件次品}\quad (i=0,1,\cdots,n)$$

样本空间为 $(n+1)$ 个样本点构成的集合，即

$$\Omega=\{\omega_0,\omega_1,\cdots,\omega_n\}$$

例 3 设随机试验为计算某电话站总机在 $(0,T]$ 内的呼叫次数，则有样本点

$$\omega_i:\text{有 } i \text{ 次呼叫}\quad (i=0,1,2,\cdots)$$

样本空间为可数无穷多个样本点构成的集合，即

$$\Omega=\{\omega_i\mid i=0,1,2\cdots\}$$

例 4 设随机试验为测试某一灯泡的使用寿命，则有样本点

$$\omega_t:\text{灯泡的使用寿命为 } t \text{ 小时}\quad (t\geqslant 0)$$

样本空间为不可数无穷多样本点构成的集合，即

$$\Omega = \{\omega_t \mid t \geqslant 0\}$$

例 5　向某一目标发射一枚炮弹，观察落点的分布情况. 该随机试验有样本点

$$\omega_{xy}: \text{落点的坐标为}(x,y)$$

样本空间为不可数无穷多样本点构成的集合，即

$$\Omega = \{\omega_{xy} \mid -\infty < x < +\infty, -\infty < y < +\infty\}$$

可以看到，在例 1 中，若随机事件 A 表示"两次掷硬币后正面至少出现一次"，则对样本空间 Ω 来说，$A = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3\}$；而对样本空间 Ω' 而言，$A = \{\omega'_1, \omega'_2\}$. 这表明，随机事件 A 是样本空间 Ω 或 Ω' 的一个子集.

任一随机事件 A 都是样本空间 Ω 的一个子集，该子集中任一样本点发生时事件 A 就发生. 因为在每次随机试验中至少有一个样本点发生，所以样本空间 Ω 作为一个事件，在一次随机试验中必然会发生，即 Ω 为必然事件. 今后我们就把必然事件记作 Ω. 空集 $\varnothing$ 作为一个事件，在每次随机试验中都不会发生，所以空集 $\varnothing$ 是不可能事件，今后将不可能事件用 $\varnothing$ 表示. 通常，我们将必然事件和不可能事件看作特殊的随机事件.

1.1.3　事件的关系与运算

事件是一个集合，因而事件间的关系和运算就可以用集合论的知识来解释. 设随机试验的样本空间为 Ω，而 $A, B, A_k(k = 1, 2, \cdots)$ 是 Ω 的子集.

(1) 如果事件 A 发生必然导致事件 B 发生，则称事件 A **包含于**事件 B，或称事件 B **包含**事件 A，并记为 $A \subset B$；若 $A \subset B$ 且 $B \subset A$，则称事件 A 与事件 B **相等**，记为 $A = B$；若 $A \subset B$，且在 B 中存在样本点 ω，使得 ω 不在 A 中，则称**事件 A 真包含于事件** B，或称**事件 B 真包含事件** A，记为 $A \subsetneq B$. ①

例如，在例 1 中，设事件 A 表示"两次掷硬币后正面至少出现一次"，B 表示"两次都是正面"，则 $B \subset A$. 若设 C 表示"两次都不是反面"，则 $B = C$.

(2) 两个事件 A 与 B 中至少有一个发生也是一个事件，称为 A 与 B 的**并**(或**和**)，记为 $A \cup B$.

例如，在例 1 中，设事件 A 表示"两次掷硬币后正面至少出现一次"，B 表示"两次都是正面"，则 $A \cup B$ 表示"正面至少出现一次"，即

$$A \cup B = \{(\mathrm{H},\mathrm{H}), (\mathrm{H},\mathrm{T}), (\mathrm{T},\mathrm{H})\}$$

类似的，称 $\bigcup\limits_{k=1}^{n} A_k = A_1 \cup \cdots \cup A_n$ 为 n 个事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 的**并**，表示 n 个

①在集合论中，包含与真包含有两种表示，一是 $\subseteq$ 与 $\subset$，二是 $\subset$ 与 $\subsetneq$，这里采用的第二种表示.

事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 中至少有一个发生；称 $\bigcup\limits_{k=1}^{\infty} A_k = A_1 \cup A_2 \cup \cdots$ 为可列无穷多个事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n, \cdots$ 的**并**，表示事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n, \cdots$ 中至少有一个发生.

(3) 两个事件 A 与 B 同时发生也是一个事件，称为 A 与 B 的**交**(或**积**)，记为 AB 或 $A \cap B$.

例如，在例 1 中，设事件 A 表示“两次掷硬币后正面至少出现一次”，B 表示“两次都是正面”，则 AB 表示“两次都是正面”，即

$$AB = \{(\mathrm{H}, \mathrm{H})\}$$

类似的，称 $\bigcap\limits_{k=1}^{n} A_k = A_1 \cap \cdots \cap A_n$ 为 n 个事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 的**交**，表示 n 个事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 同时发生；称 $\bigcap\limits_{k=1}^{\infty} A_k = A_1 \cap A_2 \cap \cdots$ 为可列无穷多个事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n, \cdots$ 的**交**，表示事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n, \cdots$ 同时发生.

(4) 事件 A 发生而事件 B 不发生也是一个事件，称为 A 与 B 的**差**，记为 $A - B$.

例如，在例 2 中，设 A_k 表示“取出的产品中次品件数不超过 k”($k = 1, \cdots, n$)，则 $A_k - A_{k-1}$ 表示“取出的产品中恰有 k 件次品”这一事件.

(5) 如果两个事件 A 与 B 不可能同时发生，即 $AB = \varnothing$，则称 A 与 B 是**互不相容的**(或**互斥的**).

(6) 如果两个事件 A，B 中至少有一个发生，且最多只有一个发生，即 $A \cup B = \Omega$ 且 $AB = \varnothing$，则称事件与事件互为**逆事件**(或**对立事件**). A 的对立事件记为 $\overline{A}$，$\overline{A} = \Omega - A$.

(7) 若事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 为两两互不相容的事件，且 $A_1 \cup \cdots \cup A_n = \Omega$，则称 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 构成一个**完备事件组**.

以上事件之间的关系与运算可用图直观地表示(如图 1.1 所示).

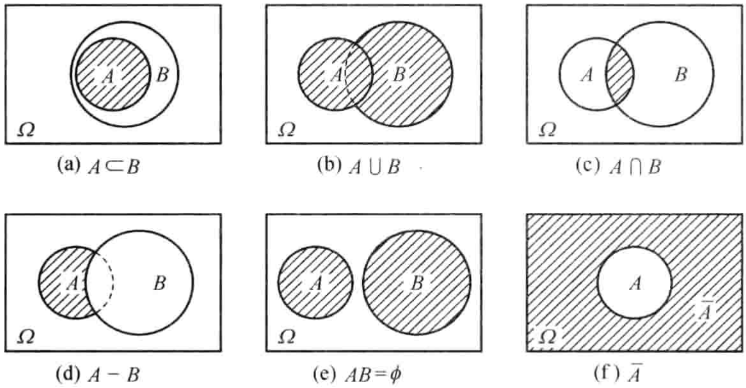

图 1.1

可以验证一般事件的运算满足如下运算规律(验证过程从略)：

(1) $A \cup B = B \cup A, A \cap B = B \cap A$;　**(交换律)**

(2) $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C, A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$;　**(结合律)**

(3) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C), A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$;　**(分配律)**

(4) $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}, \overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$.　**(德·摩根①律)**

例 6　掷一颗骰子,观察出现的点数.设事件 A 表示"出现偶数点",B 表示"出现的点数大于 2",C 表示"出现小于 5 的偶数点",则有

$$\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}, \quad A = \{2,4,6\}, \quad B = \{3,4,5,6\}, \quad C = \{2,4\}$$

$$A \cup B = \{2,3,4,5,6\}, \quad AB = \{4,6\}$$

$$A - B = \{2\}, \quad B - A = \{3,5\}, \quad \overline{A} = \{1,3,5\}$$

例 7　口袋内有 10 个白球,5 个红球,每次取出 1 球(不放回)观察颜色,事件 A_i 表示"第 i 次取到红球"($i = 1,2,3$).用事件的运算表示下列事件:(1) 三次都取到红球;(2) 三次中至少有一次取到红球;(3) 三次中最多有一次取到红球.

解　(1)"三次都取到红球"表明事件 A_1, A_2, A_3 同时发生,故可表示为 $A_1A_2A_3$.

(2)"三次中至少有一次取到红球"表明事件 A_1, A_2, A_3 至少发生 1 个,故可表示为 $A_1 \cup A_2 \cup A_3$.

(3)"三次中最多有一次取到红球"当且仅当"A_1, A_2, A_3 这 3 个事件都不发生或 3 个事件中刚好有 1 个发生",故可表示为 $\overline{A}_1\overline{A}_2\overline{A}_3 \cup \overline{A}_1\overline{A}_2A_3 \cup \overline{A}_1A_2\overline{A}_3 \cup A_1\overline{A}_2\overline{A}_3$.

另外,"三次中最多有一次取到红球"等价说法为"三次中至少有两次取到白球",故也可用 $\overline{A}_1\overline{A}_2 \cup \overline{A}_2\overline{A}_3 \cup \overline{A}_1\overline{A}_3$ 表示.

例 8　如图 1.2 所示的电路中,设事件 A, B, C 分别表示继电器接点 a, b, c 闭合,事件 D 表示信号灯亮,则当且仅当接点 a 闭合,而接点 b 与 c 中至少有 1 个闭合时,信号灯亮,所以有 $D = A(B \cup C)$.而接点 a 若不闭合,则信号灯不亮,故 $\overline{A}D = \varnothing$,即事件 $\overline{A}$ 与 D 是互不相容的.

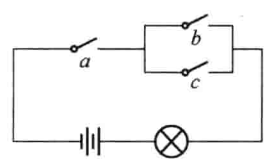

图 1.2

①德·摩根(De Morgan),1806—1871,英国数学家.

习题 1.1

A 组

1. 写出下列随机试验的样本空间：

1) 用步枪射击目标 10 次，观察目标被击中的次数；

2) 记录某一城市一日中发生的交通事故次数；

3) 向某一目标发射一枚炮弹，观察落点与目标的距离；

4) 在一个口袋里装有红(R)、黄(Y)、白(W) 三种球，每种球不止一个，一次任取两球，观察球的颜色.

2. 设 A,B,C 为三事件，用 A,B,C 的运算关系表示下列各事件：

1) A,B,C 都发生；

2) A,B,C 都不发生；

3) A,B,C 中至少有一个发生；

4) A 发生，B,C 不发生；

5) A,B 都发生，C 不发生；

6) A,B,C 中至少有两个发生；

7) A,B,C 中不多于一个事件发生；

8) A,B,C 中不多于两个事件发生.

3. 设 A,B 为任意两个随机事件，判断下列命题是否正确：

1) 若 $A \subset B$，则 $AB = A$；

2) 若 $A \subset B$，则 $\overline{A} \subset \overline{B}$；

3) $A \cup B = B \Leftrightarrow A \subset B$；

4) 若 $\overline{A}\overline{B} = \varnothing$，则 $A \cup B = \Omega$；

5) 若 $A\overline{B} = \varnothing$，则 $\overline{A} \cup B = \Omega$.

4. 设 $\Omega = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\}$，$A = \{2,3,4\}$，$B = \{3,4,5\}$，$C = \{5,6,7\}$，求下列事件：1) $\overline{\overline{A}B}$；2) $\overline{A(\overline{BC})}$.

B 组

1. 写出下列随机试验的样本空间：

1) 生产零件直到有 15 件合格品为止，记录生产零件的总件数；

2) 对某工厂出厂的产品进行检查，合格的记上“正品”，不合格的记上“次品”，规定连续查出 2 个次品就停止检查，或检查完 4 个产品就停止检查，试记录检查的结果.

3) 同时掷两枚骰子，观察各自出现的点数；

4) 同时掷两枚骰子，观察出现点数的总和.

2. 一工人负责生产4种不同型号的零件，以A_i表示"此工人生产的第i种型号的零件是合格品"($i=1,2,3,4$)，试用A_i及其运算表示下列事件：

1) 没有1种型号的零件是不合格品；

2) 至少有1种型号的零件是不合格的；

3) 仅有1种型号的零件是不合格的；

4) 至少有2种不同型号的零件不是不合格品.

1.2　频率与概率

我们观察一个随机试验的各种事件，一般来说，总会发现有些事件出现的可能性大些，有些事件出现的可能性小些. 我们希望找到一个合适的数来表征事件在一次试验中发生的可能性大小. 为此，首先引入频率的概念，它描述了事件发生的频繁程度，进而再引出概率的定义.

1.2.1　频率

定义1.2.1(频率)　在相同条件下进行了n次随机试验，事件A发生的次数m称为事件A发生的**频数**，比值$\frac{m}{n}$称为事件A发生的**频率**，记为$f_n(A)$.

显然，频率具有以下基本性质：

(1) $0 \leqslant f_n(A) \leqslant 1$；

(2) $f_n(\Omega)=1$；

(3) 如果事件$A_1, A_2, \cdots, A_k$两两互不相容，则

$$f_n(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_k) = f_n(A_1) + f_n(A_2) + \cdots + f_n(A_k)$$

由定义可见，频率$f_n(A)$表示事件A发生的频繁程度. 频率越大，说明事件A发生的越频繁，A在一次试验中发生的可能性就越大. 所以，直观的想法是用频率来表征事件A在一次试验中发生的可能性大小.

现将前人掷硬币试验的一些结果列于表1.1及表1.2中，其中n表示"掷硬币的次数"，n_{H}表示"正面出现的次数"，$f_n(\mathrm{H})=\frac{n_{\mathrm{H}}}{n}$表示"正面出现的频率".

表1.1

实验序号	$n=5$		$n=50$		$n=500$	
	n_{H}	$f_n(\mathrm{H})$	n_{H}	$f_n(\mathrm{H})$	n_{H}	$f_n(\mathrm{H})$
1	2	0.4	22	0.44	251	0.502
2	3	0.6	25	0.50	249	0.498
3	1	0.2	21	0.42	256	0.512