

强度稳定综合理论

罗培林 著

Combined Theory of Strength and Stability



科学出版社

C14055629

0346
59

强度稳定综合理论

Combined Theory of Strength and Stability

罗培林 著



北航 C1741350

科学出版社

北京

0346
59

014022828

内 容 简 介

本书用含有多个参变量的二项式幂函数,将各种材料的应力应变曲线格式化为量纲为一的数值曲线。据此,将胡克定律的有效作用范围拓展到材料应力应变曲线的比例极限以上的非线性区域,说明杆、板、薄壳等结构的强度、稳定、断裂、疲劳寿命诸性能,都是材料应力应变曲线的力学性能的体现,都可以用材料的应力应变曲线格式化后的算式来显示,合并组成一种新的强度稳定综合理论。该综合理论使许多力学理论有所创新,并在系统化、简约化、实用化等方面都有长足的进展。本书内容涉及材料力学、结构力学、实验力学、断裂力学、弹性力学、强度理论、稳定理论、预测理论、薄壳理论等学科和理论。

本书是一个新的理论体系。可作为高等学校的教学参考书,或作为“强度稳定综合理论”课程的教科书,也可作为科研院所和企业科技人员的参考文献或工具书。

图书在版编目(CIP)数据

强度稳定综合理论/罗培林著. —北京:科学出版社,2014

ISBN 978-7-03-038541-3

I. ①强… II. ①罗… III. ①强度理论 IV. ①0346

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2014)第 211355 号

责任编辑:周 炜 / 责任校对:李 影

责任印制:肖 兴 / 封面设计:蓝 正

科 学 出 版 社 出 版

北京东黄城根北街 16 号

邮政编码:100717

<http://www.sciencep.com>

中国科学院印刷厂印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2014 年 5 月第 一 版 开本:720×1000 1/16

2014 年 5 月第一次印刷 印张:15 1/4

字数:287 000

定价:88.00 元

(如有印装质量问题,我社负责调换)

前 言

本书命名为“强度稳定综合理论”,将迄今为止彼此独立的强度理论与稳定理论推进到一个新的历史阶段,即两者结合为一个强度稳定综合理论的历史阶段。

本书用 11 章的篇幅,从概念、模型、方法、算式、应用等方面,对强度稳定综合理论进行系统阐释论证,证明此综合理论是建立在革新胡克定律的基础上的一个新的理论体系。胡克定律的这种革新有非凡的物理意义,它使强度稳定综合理论成为基础理论中的一个新成员,具有深远的影响。

本书的独特建树主要体现在以下几个方面。

1) 继承与发展,对胡克定律进行革新,奠定建立强度稳定综合理论的基础

以前,在应用胡克定律的基础上建立的各种线性理论,只在应力小于材料比例极限的区域内有效。本书用数学格式化方法来革新胡克定律,使其有效地延伸到比例极限以上的非线性区域,并与弹性模量定律、割线模量定律、切线模量定律、折算模量定律等相结合,将应用胡克定律建立的各种线性理论,如线性强度理论、线性稳定理论等,都分别转化为用割线模量定律、切线模量定律和折算模量定律显示的非线性理论,并将这些非线性理论都归并在一个统一的、格式化的算式中,实现各种理论的综合,显示为一个统一的强度稳定综合理论。这是一种有普遍意义的构建非线性理论的方法,是本书在构建非线性理论方面的一个重大成就。

2) 破旧立新,将复杂弯曲强度理论与稳定理论相结合,构成强度稳定综合理论

人类生产和使用的各种工程建筑和机械、交通工具及设施,都是历史和当代科学技术成果积累和应用的产物。这些设施和工具在使用过程中,受到某种力的作用而发生的损坏现象,可分为材料的损伤和物件形状剧变两大类。前一类称为强度破坏,后一类称为形状失稳。在研究这两类损坏现象的基础上,产生了强度理论和稳定理论,用来指导科研和工程实践。

强度理论与稳定理论各自研究物体损坏的不同物理现象,彼此是独立的,因此,各种结构的承载能力都必须用它们分别进行校核计算。然而,在工程实践中,很多情况下,强度破坏和形状失稳这两类损坏现象是结合在一起而不可分割的,这两者的“耦合作用”形成一种新的综合性能,这是单独用强度理论或单独用稳定理论所无法诠释和校核的,由此出现长期无法解决的重大应用难题。这些问题呼唤新理念和新技术的产生,推动科学知识与时俱进。基于此,作者重新审视了彼

此独立的强度理论与稳定理论的创建过程,构建了统一的强度稳定综合理论,用来弥补两个彼此独立的理论的不足。这是对两种理论的革新,这种革新有下面的一些实践和研究作为依据。

在强度理论与稳定理论的创建过程中,各自使用了两个简化的直杆模型:①直杆是只承受弯曲载荷的梁,梁的承载能力受制于材料的强度,据此建立强度理论;②直杆是只承受轴心压力的柱,柱的承载能力取决于保持其原有直立形状的稳定性,据此建立稳定理论。

但是,这两种工作状态往往是相互结合而不可分割的。例如,帆船上的桅杆所承受的风的侧面推力是桅杆作为梁所承受的弯曲载荷;悬挂在桅杆上的风帆重量是桅杆作为柱所承受的轴心压力。这两种载荷同时作用,桅杆就成为将上述①和②两种工作状态结合在一起的梁柱。梁柱的这种工作状态是更为常见的、直杆的第三种工作状态,即在承受弯曲载荷的同时还承受轴心压力。直杆的第三种工作状态已在强度理论中作为梁的复杂弯曲强度来计算。本书的研究说明:在这种工作状态时,应用于梁的强度理论和应用于柱的稳定理论同时起作用,可以用这两种理论之间互相耦合、协同作用的机理来阐释梁柱的这种承载能力。本书剖析这种承载能力的机理,规范其表达形式,研究其应用条件,用新的概念来说明强度理论和稳定理论除了原有的独立性之外,还有更为重要的、能用强度稳定综合理论来显示的互相关联性,科学地诠释和测度了作用在梁柱上的轴向压力和弯曲载荷的耦合作用。测度的结果表明,梁柱的承载能力既低于单独用强度理论计算的结果,又低于单独用稳定理论计算的结果,有力地证明了强度稳定综合理论能弥补强度理论和稳定理论的不足,成为不可或缺的一种基础理论。

强度理论与稳定理论由分到合,这是科学发展必然会出现的、物理概念上的革新。这既提高了理论本身的科学性和计算准确性,又使强度理论与稳定理论无需再分开使用而提高了科研和工程设计的工作效率。在基础理论建设中,这是一项有历史性标志的贡献。

3) 开拓薄壳稳定理论新篇章,将强度稳定综合理论运用于球壳承压能力的计算和圆柱壳的设计与校核

(1) 运用强度稳定综合理论完成了深潜器耐压球壳的准确计算。20世纪人类向海洋深处进军,面对新的挑战。物体在海水中的深度每增加10米,就大约要多承受一个大气压力,在水下几千米深处的物体,要承受几百个大气压力的作用。球壳是最合理可用的在海洋深处抵抗外部水压力的容器,世界各海洋强国都争先研制以球壳作为耐压壳的深潜器。

深潜器的耐压球壳能承受的压力是必须要准确计算的。传统的观念认为,球壳和圆柱壳等薄壳结构承受外压能力取决于其稳定性,可用稳定理论来计算。但是球壳承受外压能力的实验结果,却远远低于用稳定理论计算得到的数值,这

说明稳定理论在准确计算球壳承受外压能力的问题方面已无能为力。为什么会出现这种状态?这是薄壳稳定理论在20世纪数十年中未能回答的一个老大难的问题。

作者基于承担我国海军装备研制项目的需要,在20世纪70年代开始研究解决上述难题。根据“点动成线,线动成面,面动成体”这个众所周知的几何原理,作者设想圆柱壳和球壳等薄壳结构是通过直杆的某种运动而形成的,所以在这些薄壳结构中也会有类似直杆的强度理论、稳定理论与强度稳定综合理论的机理。

作者运用强度稳定综合理论的原理来研究圆柱壳和球壳的承压能力,揭示了球壳的实际承压能力远低于稳定理论中计算值的原因,建立起计算球壳实际承压能力的可靠方法,运用该原理和方法完成了深潜器耐压球壳的准确计算。用这种新的原理和方法来解决准确计算球壳承受外压的能力问题,是薄壳理论中的新篇章,是强度稳定综合理论的一个重大贡献。

(2) 本书用强度稳定综合理论证明圆柱壳有低于“稳定性能”的“强度稳定综合性能”。这是在薄壳理论中的一个新建树。书中首创“弯曲弹性基础”的概念,用来计算圆柱壳的经、纬线两个方向的加强肋骨对圆柱壳的稳定性的影响,大大地简化了在民用和军用的各种结构中广泛使用的圆柱壳的设计与校核计算工作。

4) 原理相通,将断裂理论纳入强度稳定综合理论

本书将拉力作用下裂纹扩展时的断裂临界应力和拉压交变载荷作用下的疲劳寿命计算也列为强度稳定综合理论的内容。这是因为疲劳寿命是裂纹扩展的结果,裂纹扩展是裂纹尖端处的集中应力达到材料的屈服极限时的现象,是应该纳入强度理论的内容,而强度理论又是强度稳定综合理论的一个组成部分,裂纹扩展时的断裂临界应力和疲劳寿命都能用强度稳定综合理论的格式化算式来计算。书中创立了用“折算裂纹长度”来显示疲劳寿命、用裂纹的长度为直径的裂纹圆模型来剖析断裂临界应力的新方法,在这种新方法中无需利用裂纹尖端应力场的分布剖析,避开了复杂的数学运算,使断裂理论有了空前的简化,易于掌握与应用。这是强度稳定综合理论中的又一创新内容。

5) 创新实验技术,为模型实验开辟新天地

在结构的承载能力的研究工作中,实验研究比理论研究更为重要。这是因为理论研究总是在某些假定的条件下进行的,但实验研究却保存了影响实验结果的各种因素。用统计方法来整理实验结果,就能弥补理论研究结果的缺陷。

实验研究分为实物实验和模型实验。实物实验得到的数据是可靠的,但不是所有的结构都能进行实物实验,所以最常用的实验研究方法是模型实验。相似理论说明结构承载能力的模型实验要满足三个基本的条件,即在模型与实物之间必须:①材料相同;②结构几何形状相似;③作用载荷相同。由于强度理论与稳定理论二者彼此分离,实验被分为强度实验和稳定实验两大类,各自为政,不能兼顾,

并且稳定实验的技术条件要求很高,难度很大,花费很多。

强度稳定综合理论的格式化算式只给结构模型实验提出了两个基本要求:①材料应力应变曲线的格式化曲线相似(简称为相似材料);②结构的极限平衡状态参数的数值相等(简称为相当结构)。满足这两个基本要求的实验,就会在结构实物和模型之间有强度利用率相等的关系。这是用数学函数相同的概念新开辟出来的一个新的模型实验原理,它既包容了上面提到的老实验原理,同时又说明模型实验有材料不相同、几何形状不相似、作用载荷不相同等许多新的实验方案存在,并且无须再去区分强度实验或稳定实验。这就为模型实验的筹划与实施、实验数据的整理和利用开辟了新天地,有极大的科学价值和经济效益。

6) 创建预测结构承载能力的格式化算式,并在多个预测领域中应用

用本书构建的强度稳定综合理论的格式化算式与实验数据相结合,能准确地预测结构的承载能力。该格式化算式有广泛的应用价值,既可以用于结构的承载能力的预测,也可以用于工农业产品生产量、生物繁殖量、灾害预报等许多项目的灰色预测,说明诸学科有许多共同的变化规律,知识可以举一反三、触类旁通。

综上所述,强度稳定综合理论的创建是力学理论与时俱进的表现。在力学知识的更新、科学化、系统化、简约化、实用化等方面有独到的建树,能解决工程结构设计、建造中某些重大疑难问题。将其用于统一整理各个行业的结构设计规范,对于提高工程设计的效率和质量,具有重要的学术价值和应用前景。

强度稳定综合理论是哈尔滨工程大学,在中国船舶工业奋发图强的大环境中,将教学与科学研究相结合取得的重大成果。此成果的取得,得到哈尔滨工程大学和船舶工程学院各级领导的关怀、鼓励和支持。本书的出版得到学校科研基金的资助,在此表示深切的感谢。为反映佟福山研究员、石德新教授、刘康林教授等在应用和拓展强度稳定综合理论研究工作中的成果,在书后的附录中,列入了他们及其指导的研究生的有关论文。书中还引用了他们的某些工作成果。

在本书付梓之际,作者寄厚望于进一步扩大强度稳定综合理论在国内外的应用,使这一具有国际先进水平的科学成果,作为国人对发展基础科学理论的一项贡献,在世界范围产生更广泛和深远的影响。

符 号 表

σ	应力
ε	应变
E	弹性模量
E_s	割线模量
E_t	切线模量
ε_t	切影应变
E_{st}	双模量
ε_{st}	与双模量对应的应变
σ_s	材料屈服极限
σ_0	应力常量
$\bar{\sigma}_s = \sigma_s / \sigma_0$	量纲为一的屈服极限
$\bar{\sigma}_p = \sigma_p / \sigma_0$	量纲为一的比例极限
$\bar{\sigma} = \sigma / \sigma_0$	相对应力
$\bar{\varepsilon} = \varepsilon / \varepsilon_0$	相对应变
σ_p	比例极限
A, B, c, m	材料常数, PL(c, m)算式的参数值
σ_L	理想弹性应力
Φ_t	平衡状态参数, 切线模量因子
σ_E	欧拉应力
σ_{cr}	临界应力
$\phi = \sigma_0 / \sigma_E$	强度稳定因子
n	综合因子
$\Phi = n\phi$	综合平衡状态参数
λ	杆的长细比
μL	折算长度
q	均布载荷
N	轴向压力
W	应变能密度
w	圆柱壳、球壳的径向挠度
e	初挠度

目 录

前言

符号表

第 1 章 材料应力应变曲线格式化算式的原理和应用	1
1.1 材料应力应变曲线的格式化算式	1
1.1.1 割线模量定律的格式化算式的拟定	1
1.1.2 割线模量定律的格式化算式中常数的取值	4
1.1.3 割线模量定律的格式化算式的一阶导数与应用	5
1.1.4 格式化算式的应用实例	7
1.2 从割线模量定律导出的切线模量定律和双模量定律	9
1.3 独立自主的切线模量定律	12
1.4 从切线模量定律的格式化算式积分出割线模量定律的格式化算式	17
1.5 割线模量定律的格式化算式及其微分算式	21
1.6 三个比例定律的格式化算式	24
1.7 材料的相似性及相近性	26
1.8 弹性体平衡状态的标识和平衡状态曲线	29
1.9 弹性体平衡状态曲线的功用	33
参考文献	34
第 2 章 强度稳定综合理论的由来与实际应用	35
2.1 梁柱的强度稳定综合性能	35
2.1.1 梁柱的平衡状态	35
2.1.2 梁柱平衡状态的稳定性	38
2.1.3 梁柱弹性弯曲的极限平衡状态	39
2.2 强度稳定综合理论的内涵与外观	41
2.2.1 梁柱弹性弯曲极限平衡状态的性质分类	41
2.2.2 强度稳定综合理论的格式化算式	43
2.2.3 等效初挠度	43
2.3 强度稳定综合理论的应用实例	44
2.3.1 我国《钢结构设计规范》中 a, b, c, d 四条曲线的算式	44

2.3.2 美国结构稳定研究委员会制定的三条曲线的 $PL(c, m)t$ 算式	48
2.3.3 临界应力几何和物理非线性系数及强度利用率函数	50
参考文献	51
第3章 弹性基础梁的稳定性及其在薄壳结构中的应用	52
3.1 弹性基础梁的弯曲挠度函数	52
3.2 弹性基础梁的临界载荷	55
3.3 弹性基础梁的折算长度	57
3.4 圆柱壳的弹性基础梁模型	58
3.5 球壳的稳定性	60
3.6 圆柱壳和球壳在外部均匀压力作用下的强度稳定综合性能	62
参考文献	63
第4章 加肋圆柱壳与平板的弹性稳定性	64
4.1 加肋圆柱壳的基本微分方程	64
4.2 临界载荷方程及其第一近似计算公式	66
4.2.1 临界载荷方程	66
4.2.2 临界载荷的第一近似计算公式	68
4.2.3 临界载荷计算公式的另一种推导	71
4.3 圆柱形的壳块的临界载荷计算公式	71
4.3.1 圆柱形的壳块的临界载荷简化算式	73
4.3.2 结构载荷的物理意义	74
4.3.3 整圆柱壳失稳时圆周上的波形	75
4.4 Mises 算式的简化形式	76
4.5 肋骨对圆柱壳的临界载荷的影响	78
4.5.1 纵、横方向的加强肋骨各自相同且按等间距配置	78
4.5.2 圆柱壳只有断面相等、均匀布置的纵向加强肋骨	80
4.5.3 圆柱壳只有均匀布置的横向加强肋骨,但其中一部分被特殊加强	81
4.6 加肋圆柱形壳板的弹性稳定性算式	82
4.7 平板的稳定性	83
参考文献	84
第5章 圆柱壳的强度稳定综合性能	85
5.1 圆柱壳轴对称变形的弯曲平衡方程	85
5.2 圆柱壳经线壳带的均匀挠度与屈服压力	88
5.3 圆柱壳在压力作用下的轴对称弯曲挠度	90
5.4 轴对称弯曲挠度函数中的常数	92

5.5 肋骨处和肋间距中点处的挠度	94
5.6 圆柱壳在均匀压力作用下的轴对称弯曲屈服	95
5.7 在均匀压力作用下圆柱壳的两种失稳形态的临界压力	97
5.7.1 轴对称失稳形态的临界压力参数	97
5.7.2 轴对称和非轴对称两种失稳形态的临界压力参数的比较	98
5.7.3 加肋圆柱壳模型实验数据的分析	99
5.8 加肋圆柱壳的强度利用率函数	102
参考文献	103
第6章 球冠的强度稳定综合性能	104
6.1 球壳弹性失稳屈曲的小变形理论	104
6.2 球冠的弯曲平衡状态方程	105
6.3 球冠的复杂弯曲挠度函数	109
6.4 球冠的稳定性和顶点的屈服强度	111
6.4.1 球冠的稳定性	111
6.4.2 球冠顶点的屈服强度	112
6.5 球冠在 $\gamma < 1.0$ 时的弯曲挠度函数与临界应力系数	114
6.6 球冠承压能力的实验数据检验	119
6.7 球冠的临界弧长和完整球壳的临界应力系数	123
6.8 切线模量 E_t 和割线模量 E_s 对球冠稳定性的影响	124
6.9 两种计算方法的比较	127
参考文献	127
第7章 裂纹扩展断裂临界应力的格式化算法	129
7.1 裂纹圆模型和裂纹扩展的能量判据	129
7.2 裂纹尖端张开位移判据	131
7.3 裂纹扩展的应力强度因子判据	134
7.4 非线性断裂临界应力的算式	135
7.4.1 非线性断裂临界应力的格式化算式	135
7.4.2 非线性断裂临界应力的 CTOD- δ 算式	136
7.4.3 非线性断裂临界应力的经验算式	137
7.5 几个非线性临界应力算式的比较	138
7.6 裂纹长度曲线	140
参考文献	141
第8章 材料疲劳断裂寿命曲线的格式化算式与构件的剩余疲劳寿命	143
8.1 材料疲劳性能的平衡状态参数图	143

8.2	疲劳寿命的折算裂纹长度	146
8.3	疲劳寿命折算裂纹长度的应用	147
8.3.1	应用于计算有初始裂纹 $\bar{a}_0$ 的构件的剩余疲劳寿命	147
8.3.2	应用于计算有裂纹 $\bar{a}$ 的构件的实际断裂临界应力	148
8.4	应变疲劳寿命的 $PL(s, t)$ 算式和应用	149
	参考文献	151
第9章	结构强度稳定综合性能的模型实验原理与应用	152
9.1	强度稳定综合理论的建立与表达方式	152
9.2	综合参数 $\bar{e}_L$ 的物理意义和格式化算式	155
9.3	强度利用率函数的实际应用	158
9.3.1	在钢结构设计规则中的应用	158
9.3.2	在研究球冠的承压能力方面的应用	160
9.3.3	在研究半球和完整球壳的承压能力方面的应用	162
9.4	非线性强度稳定综合理论及其应用	165
9.4.1	非线性强度稳定综合理论的应用之一	168
9.4.2	非线性强度稳定综合理论的应用之二	169
9.4.3	非线性强度稳定综合理论的应用之三	174
9.4.4	非线性强度稳定综合理论的应用之四	183
9.5	强度利用率相等原理	187
9.5.1	强度利用率相等模型实验原理	187
9.5.2	强度利用率相等模型实验原理在《钢结构设计规范》中的应用	189
9.5.3	强度利用率相等模型实验原理在圆柱壳和球壳设计中的应用	190
9.6	强度利用率相等模型实验原理中的基本概念	192
	参考文献	194
第10章	强度稳定综合理论用于结构承载能力的预测	196
10.1	结构承载能力的预测方法	196
10.2	结构承载能力的灰色预测方法	199
10.2.1	用割线模量定律曲线的格式化算式预测材料的屈服应力	200
10.2.2	用切线模量定律曲线的格式化算式预测材料的屈服应力	201
10.3	$PL(c, m)$ 算式在灰色系统预测理论中的功用	204
10.4	$PL(c, m)$ 算式与灰色预测理论的 $GM(1, N)$ 模型的关系	206
	参考文献	210
第11章	内容归纳与研究展望	211
11.1	内容归纳	211

11.2 对强度稳定综合理论的后续研究和应用前景的展望	215
附录 与强度稳定综合理论有关的论文	217
索引	223
后记	225

第 1 章 材料应力应变曲线格式化算式的原理和应用

将各种材料的应力应变曲线格式化成为量纲为一的二项式函数曲线,就能将原来只用于胡克(Hooke)定律的比例定律概念加以扩充,使胡克定律延伸到材料的比例极限以上,展现为弹性模量定律、割线模量定律、切线模量定律和用割线模量定律与切线模量定律合建起来的折算模量定律;并建立这四个定律之间的、以弹性模量定律为比较对象的三个新的比例定律,并通过这三个新的比例定律将建立在胡克定律基础上的各种线性理论直接转换为在实际应力应变曲线上的非线性的理论。这种用说明材料应力应变曲线自身本构关系的函数来说明固体力学中的线性理论和非线性理论关系的做法,彻底地消除了建立非线性理论工作中的麻烦与困难。

此外,采用解析函数来表达材料自身的本构关系,就能将用胡克定律计算出的各种各样的线性理论应力汇集在一起,共存于一种统一的格式化的算式中,构成一种强度稳定综合理论新体系。这个新体系具有高度的学术和实用价值。

1.1 材料应力应变曲线的格式化算式

1.1.1 割线模量定律的格式化算式的拟定

用材料试件和实验方法测定出的材料应力应变实验曲线显示了弹性体内应力发展变化的规律。比例极限 σ_P 将该实验曲线分为线性和非线性两部分,弹性模量 E 将应力 σ 和应变 ϵ 之间的线性函数关系显示为胡克定律

$$\sigma = E\epsilon \quad (1.1.1)$$

因为弹性模量 E 是常数, σ 与 ϵ 成正比,所以式(1.1.1)常被称为比例定律。

非线性部分用 $E_s = \sigma/\epsilon$ 将应力和应变的函数关系显示为割线模量定律

$$\sigma = E_s \epsilon \quad (1.1.2)$$

在材料的应力应变实验曲线上有屈服极限 σ_s 。为了便于说明和应用材料应力应变实验曲线的上述规律性,用一个近似等于材料屈服极限 σ_s 的应力常量 σ_0 和弹性模量 E 将材料应力 σ 和应变 ϵ 格式化为量纲为一的数

$$\bar{\sigma} = \sigma/\sigma_0 = y, \quad \bar{\epsilon} = E\epsilon/\sigma_0 = x \quad (1.1.3)$$

这两个量纲为一的数使胡克定律在图 1.1.1 中的坐标系 ($y=\bar{\sigma}, x=\bar{\epsilon}$) 中简化为

$$\bar{\sigma}=\bar{\epsilon} \quad (1.1.4)$$

将此定律的使用范围向比例极限以上延伸, 就得到弹性模量定律

$$\bar{\sigma}_L=\bar{\epsilon}_L \quad (1.1.5)$$

式中, 角标 L 显示弹性模量定律与胡克定律的区别。

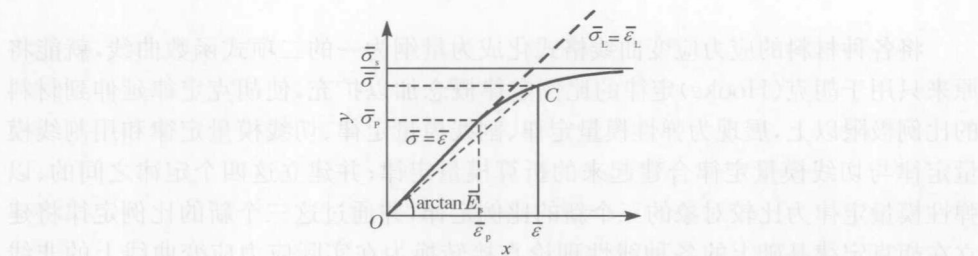


图 1.1.1 材料应力应变曲线的格式化

材料应力应变曲线的这种格式化使割线模量定律展示为

$$\bar{\sigma}=\bar{E}_s \bar{\epsilon} \quad \text{或者} \quad \bar{E}_s=\bar{\sigma} / \bar{\epsilon} \quad (1.1.6)$$

应力应变曲线上的任意 C 点的两个坐标 $y=\bar{\sigma}, x=\bar{\epsilon}$ 的比值 $\bar{E}_s=\bar{\sigma} / \bar{\epsilon}$ 是材料割线模量的量纲为一的数。在以 $\bar{E}_s$ 为纵坐标、以 $\bar{\sigma}$ 为横坐标的图 1.1.2 中, 利用材料应力应变曲线上的割线模量 $\bar{E}_s$ 与应力 $\bar{\sigma}$ 的对应数据, 绘出了曲线 $\widehat{PCS}$ 。割线模量定律可用通过此曲线上 C 点处的直线 $\overline{OC}$ 的斜率表示为

$$\Phi_s=\tan \theta=\frac{\bar{E}_s}{\bar{\sigma}}=\frac{1}{\bar{\epsilon}} \quad (1.1.7)$$

在比例极限点 P 和屈服极限点 S 的连接直线 $\overline{PS}$ 上选出一一点 C_1 , 使 C_1 点的纵坐标与 C 点的纵坐标 $\bar{E}_s$ 相等, 将 C_1 点的横坐标记为 $\bar{\sigma}^{1/m}$, 则参数 m 就能用 C_1 和 C 两点之间的应力数值来确定。

直线 $\overline{OC}_1$ 的斜率为

$$\Phi_s^c=\tan \theta_1=\frac{\bar{E}_s}{\bar{\sigma}^{1/m}} \quad (1.1.8)$$

参数 C 的数值就显示了用 C 点确定的直线 $\overline{OC}$ 与用 C_1 点确定的直线 $\overline{OC}_1$ 的两个斜率 Φ_s 与 Φ_s^c 之间的几何关系。用直线 $\overline{PS}$ 为斜边的直角三角形的几何关系能确定 C_1 点的纵坐标值为

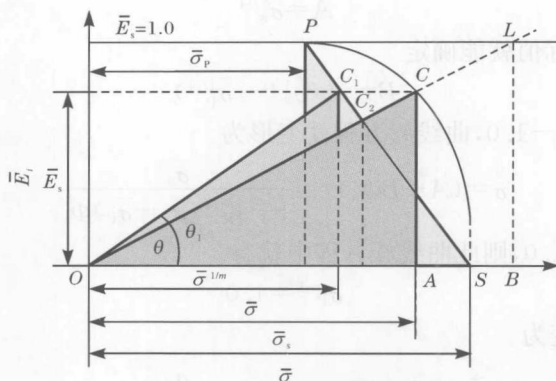


图 1.1.2 割线模量曲线的格式化

$$\bar{E}_s = \frac{\bar{\sigma}_s - \bar{\sigma}^{1/m}}{\bar{\sigma}_s - \bar{\sigma}_p} \quad (1.1.9)$$

从上面的两个算式得出 C_1 点的横坐标值为

$$\bar{\sigma}^{1/m} = \frac{\bar{\sigma}_s}{1 + (\bar{\sigma}_s - \bar{\sigma}_p)\Phi_s^c} \quad (1.1.10)$$

式(1.1.10)是用直线 $\overline{OC}_1$ 的斜率 Φ_s^c 为自变量的直线 $\overline{PS}$ 的数学表达式。

利用 c 和 m 这两个显示 C_1 点和 C 点的对应坐标之间关系的参数,就得到曲线 $\widehat{PCS}$ 上 C 点的横坐标 $\bar{\sigma}$ 的数学表达式

$$\bar{\sigma} = (\bar{\sigma}^{1/m})^m = \left[\frac{\bar{\sigma}_s}{1 + (\bar{\sigma}_s - \bar{\sigma}_p)\Phi_s^c} \right]^m = \left\{ \bar{\sigma}_s - \left[\frac{\bar{\sigma}_s(\bar{\sigma}_s - \bar{\sigma}_p)}{1 + (\bar{\sigma}_s - \bar{\sigma}_p)\Phi_s^c} \right] \Phi_s^c \right\}^m \quad (1.1.11)$$

这是用 Φ_s^c 为自变量、 c 和 m 为参变量来显示 C 点应力 $\bar{\sigma}$ 的二项式函数。在此函数中用待定值 A 取代二项式函数中的第一项 $\bar{\sigma}_s$,用待定值 B 取代二项式函数中的第二项中的 $\left[\frac{\bar{\sigma}_s(\bar{\sigma}_s - \bar{\sigma}_p)}{1 + (\bar{\sigma}_s - \bar{\sigma}_p)\Phi_s^c} \right]$,就得到以 Φ_s^c 为自变量和用四个参变量 A, B, c, m 表示曲线 $\widehat{PCS}$ 的二项式函数

$$\bar{\sigma} = (\bar{\sigma}^{1/m})^m = \left\{ \bar{\sigma}_s - \left[\frac{\bar{\sigma}_s(\bar{\sigma}_s - \bar{\sigma}_p)}{1 + (\bar{\sigma}_s - \bar{\sigma}_p)\Phi_s^c} \right] \Phi_s^c \right\}^m = (A - B\Phi_s^c)^m \quad (1.1.12)$$

式中,四个参变量(A, B, c, m)的任何一种组合都显示一条具体的曲线。所以此二项式函数是一个曲线族方程。

曲线 $\widehat{PCS}$ 与直线 $\overline{PS}$ 有两个共同的端点 P 和 S ,它们是此曲线族方程中的两条曲线。

用 S 点的坐标值就能确定

$$A = \bar{\sigma}_s^{1/m} \quad (1.1.13)$$

用 P 点的坐标值就能确定

$$B = \bar{\sigma}_P^c (\bar{\sigma}_s^{1/m} - \bar{\sigma}_P^{1/m}) \quad (1.1.14)$$

(1) 若取 $m = -1.0$, 曲线族方程就变形为

$$\bar{\sigma} = (A - B\Phi_s^c)^m = \frac{\bar{\sigma}_s}{1 + \bar{\sigma}_P^{c-1}(\bar{\sigma}_s - \bar{\sigma}_P)\Phi_s} \quad (1.1.15)$$

(2) 再取 $c = 1.0$, 则此曲线族方程中就有

$$\bar{\sigma}_P^{c-1} = 1.0$$

曲线族方程就再变为

$$\bar{\sigma} = (A - B\Phi_s)^m = \frac{\bar{\sigma}_s}{1 + (\bar{\sigma}_s - \bar{\sigma}_P)\Phi_s} \quad (1.1.16)$$

从图 1.1.2 中可以看出, 使 C 点和 C_1 点重合于直线 $\overline{PS}$ 上的 C_2 点, 就有坐标关系 $\bar{\sigma}^{1/m} = \bar{\sigma}$, $\Phi_s^c = \Phi_s$, C_1 点纵坐标值的表达式 (1.1.10) 就成为算式 (1.1.16)。所以直线 $\overline{PS}$ 是用 $c = 1.0$ 和 $m = -1.0$ 两个具体的数值从 $\widehat{PCS}$ 曲线族中得到的一条直线。显然, 若 c 和 m 取用其他的组合数值, 则 $\widehat{PCS}$ 曲线就不会是直线 $\overline{PS}$ 。

(3) 若取 $A = 0$, $B = c = -1.0$, $m = 1.0$, 则得到

$$\bar{\sigma} = 1/\Phi_s = \bar{\epsilon}, \quad \bar{E}_s = \bar{\sigma}/\bar{\epsilon} = 1.0 \quad (1.1.17)$$

这是比例极限以下的割线模量定律, 即胡克定律。

以上的分析说明, 显示 $\widehat{PCS}$ 曲线的二项式函数 $\bar{\sigma} = (A - B\Phi_s^c)^m$ 是割线模量定律的格式化算式, 它能描述割线模量定律曲线的各种形状。

1.1.2 割线模量定律的格式化算式中常数的取值

割线模量定律 $\sigma = E_s \epsilon$ 的格式化算式 $\bar{\sigma} = (A - B\Phi_s^c)^m = (A - B\bar{\epsilon}^{-c})^m$ 中的常数 A 和 B 已经在前面用曲线 $\widehat{PCS}$ 的两个端点 S 和 P 处的坐标值确定为

$$A = \bar{\sigma}_s^{1/m} \quad (1.1.18)$$

$$B = \bar{\sigma}_P^c (\bar{\sigma}_s^{1/m} - \bar{\sigma}_P^{1/m}) \quad (1.1.19)$$

图 1.1.2 显示, 当 $\bar{\sigma} < \bar{\sigma}_P$ 时,

$$\bar{E}_s = \bar{E} = 1.0, \quad \bar{\sigma} = \frac{1}{\Phi_s} = \bar{\epsilon} \quad (1.1.20)$$

式 (1.1.20) 是在割线模量定律的格式化算式 $\bar{\sigma} = (A - B\Phi_s^c)^m = (A - B\bar{\epsilon}^{-c})^m$ 中取

$$A = 0, \quad B = c = -1.0, \quad m = 1.0 \quad (1.1.21)$$

而得到的表达胡克定律的一个算式。

以上情况说明割线模量定律的格式化算式 (1.1.12) 能适应材料应力应变曲