高等学校工科数学系列

# 高等数学及其实验

主　编　孙　平　张忠毅　范广玲

HEUP 哈尔滨工程大学出版社

# 高等数学及其实验

主　编　孙　平　张忠毅　范广玲
副主编　李征宇　徐启程

HEUP 哈爾濱工程大學出版社

## 内容简介

本书是编者在总结多年教学经验的基础上，为适应大学数学教学改革的要求，为培养学生的逻辑推理能力、科学计算能力的需要而编写的。

本书内容共9章：分别是函数与极限、导数与微分、微分中值定理与导数的应用、不定积分、定积分、多元函数微分法、二重积分、无穷级数、微分方程。每章后配有习题和实验习题。

本书结构严谨、逻辑清晰、重点突出、例题典型、习题丰富，引入数学软件求解问题有助于培养学生分析、计算和应用等能力。本书适合作为大学本科非数学专业的高等数学教材或教学参考书，也可作为本、专科院校的老师或其他读者的参考资料。

**图书在版编目(CIP)数据**

高等数学及其实验/孙平，张忠毅，范广玲主编.
—哈尔滨：哈尔滨工程大学出版社，2013.12
ISBN 978-7-5661-0717-6

Ⅰ.①高… Ⅱ.①孙… ②张… ③范… Ⅲ.①高等数学-高等教材-教材 Ⅳ.①O13

中国版本图书馆CIP数据核字(2013)第301898号



出版发行 哈尔滨工程大学出版社
社　　址 哈尔滨市南岗区东大直街124号
邮政编码 150001
发行电话 0451-82519328
传　　真 0451-82519699
经　　销 新华书店
印　　刷 黑龙江省地质测绘印制中心印刷厂
开　　本 787mm×960mm　1/16
印　　张 15
字　　数 324千字
版　　次 2013年12月第1版
印　　次 2013年12月第1次印刷
定　　价 32.00元
http://www.hrbeupress.com
E-mail:heupress@hrbeu.edu.cn

# 前　言

大学数学课程是高等教育中最基本最重要的课程,因此各个高等院校都高度重视大学数学基础课程的教学和研究。以微积分为主体的高等数学是大学数学课程之一,它不仅为后续课程和科技工作提供了必备的数学工具,而且对学生数学素质的培养产生重要而深远的影响。

本教材针对普通高等院校和重点院校中部分专业及自学高等数学爱好者的需要,集三所高校多年从事高等数学教学且具有丰富教学经验的骨干教师精心策划编写而成。其目的是通过合理组织教学内容,深入浅出地揭示概念和理论的本质;通过精心选择例题和习题,加强数学应用能力的训练;在章节内容上注重说明有关内容的关联和地位,易于教师组织教学和学生自学理解;引入数学软件教学, 有助于深入理解重要概念和定理,培养学生动手能力和利用数学知识和 mathematica 数学软件解决实际问题的能力;在知识讲解和内容选择上,力求做到通俗易懂,由浅入深,利于学生自学。

本教材内容包括:第 1 章函数与极限、第 2 章导数与微分、第 3 章微分中值定理与导数的应用、第 4 章不定积分、第 5 章定积分、第 6 章多元函数微分法、第 7 章二重积分、第 8 章无穷级数、第 9 章微分方程。

全书由沈阳建筑大学的孙平、长春师范大学的张忠毅、东北石油大学的范广玲担任主编,参加编写的还有徐启程、李征宇、潭吉春。各章编写人员如下:范广玲(第 1 章 1.1 ~ 1.5、第 2 章、第 3 章 3.1 ~ 3.4),潭吉春(第 1 章 1.6、习题 1、第 3 章 3.5、习题 3),张忠毅(第 4 章、第 5 章、第 6 章 6.1 ~ 6.6),徐启程(第 6 章 6.7、第 7 章),孙平(第 8 章),李征宇(第 9 章、习题 6)。全书由孙平统稿。编者在编写工作中得到了哈尔滨工程大学出版社的大力支持,在此表示衷心的感谢!

本书在编写过程中,参考或引用了国内一些专家学者的论著,在此表示衷心感谢!

由于编者水平所限,加之时间仓促,教材中难免有不妥之处,敬请专家、同行和读者批评指正,以便不断完善。

编　者

2013 年 3 月

# 目　　录

# 第1章　函数与极限

函数和极限是高等数学中最重要、最基本的概念,极限方法则是数学中最重要的一种思想方法. 本章首先引入数列极限的概念,然后着重讨论函数的极限以及函数连续的概念与性质.

## 1.1　函　　数

### 1.1.1　函数的概念

函数是用来描述变量之间存在的各种各样的依赖关系. 两个变量之间的相互依赖关系称为一元函数关系,下面给出一元函数定义.

设 $D$ 是一个非空实数集,$f$ 是定义在 $D$ 上的一个对应关系,若对于任意的实数 $x\in D$,都有唯一确定的实数 $y$ 通过 $f$ 与之对应,那么称 $f$ 是定义在 $D$ 上的一个函数,记作

$$y=f(x),x\in D$$

其中 $x$ 称为自变量,$y$ 称为因变量,自变量的取值范围 $D$ 称为函数的定义域,所有函数值构成的集合

$$W=\{y\mid y=f(x),x\in D\}$$

称为函数的值域.

从函数的定义可以看出,构成函数的要素是定义域和对应关系. 如果两个函数的定义域相同,对应关系也相同,那么这两个函数就是相同的,否则就是不同的.

### 1.1.2　函数的特性

1. 函数的有界性

设函数 $f(x)$ 在某一区间 $I$ 上有定义. 如果存在正数 $M$,使对任意 $x\in I$,有 $|f(x)|\leqslant M$,则称函数 $f(x)$ 在 $I$ 上有界;如果这样的正数 $M$ 不存在, 则称函数 $f(x)$ 在 $I$ 上无界.

如果存在一个数 $M$,使得对任意 $x\in I$,都有 $f(x)\leqslant M$ 成立,那么称 $f(x)$ 在 $I$ 上有上界,$M$ 是 $f(x)$ 在 $I$ 上的一个上界.

如果存在一个数 $m$,使得对任意 $x\in I$,都有 $f(x)\geqslant m$ 成立,那么称 $f(x)$ 在 $I$ 上有下界,$m$ 是 $f(x)$ 在 $I$ 上的一个下界.

如 $y=x^2$ 在 $[0,1]$ 上是有界函数,而在 $[0,+\infty)$ 上是无界函数.

有界和无界函数都与自变量的变化范围有关.

2. 函数的单调性

设函数$f(x)$的定义域为$D$,区间$I\subset D$,如果对于区间$I$上的任意两点$x_1$及$x_2$,当$x_1<x_2$时,恒有$f(x_1)<f(x_2)$,那么称函数$f(x)$在区间$I$上是单调增加的;如果对于区间$I$上的任意两点$x_1$及$x_2$,当$x_1<x_2$时,恒有$f(x_1)>f(x_2)$,那么称函数$f(x)$在区间$I$上是单调减少的. 单调增加和单调减少的函数统称为单调函数,使函数保持单调性的自变量区间叫单调区间.

3. 函数的奇偶性

设函数$f(x)$的定义域$D$关于原点对称(即若$x\in D$,则必有$-x\in D$). 如果对于任意$x\in D$,等式$f(-x)=f(x)$恒成立,那么称$f(x)$为偶函数. 如果对于任意$x\in D$,等式$f(-x)=-f(x)$恒成立,那么称$f(x)$为奇函数. 不是偶函数也不是奇函数的函数,称为非奇非偶函数.

研究函数的奇偶性的好处在于,如果知道一个函数是偶函数或奇函数,则知其一半即可知其全貌.

4. 函数的周期性

对于函数$y=f(x)$,如果存在一个非零常数$T$,对一切的$x$均有$f(x+T)=f(x)$,则称函数$f(x)$为周期函数,并把$T$称为$f(x)$的周期. 应当指出的是,通常讲的周期函数的周期是指最小的正周期.

对三角函数而言,$y=\sin x$和$y=\cos x$是以$2\pi$为周期的周期函数,而$y=\tan x$和$y=\cot x$则是以$\pi$为周期的周期函数.

关于函数的性质,除了有界性与无界性之外,单调性、奇偶性、周期性都是函数的特殊性质,而不是每一个函数都一定具备的.

### 1.1.3 复合函数与反函数

1. 复合函数

通常,若函数$y=f(u)$的定义域为$D_1$,函数$u=g(x)$的定义域为$D_2$,值域为$W_2$,并且$W_2\subset D_1$,那么对于任意数值$x\in D_2$,通过$u=g(x)$有唯一确定的数值$u\in W_2$与之对应. 由于$W_2\subset D_1$,因此对于这个$u$值,通过$y=f(u)$有唯一确定的数值$y$与之对应,从而得到一个以$x$为自变量、$y$为因变量的函数,这个函数称为由函数$u=g(x)$和函数$y=f(u)$复合而成的复合函数,记作$y=f[g(x)]$,变量$u$称为中间变量.

由函数$u=g(x)$和函数$y=f(u)$构成复合函数的条件是函数$g$在$D_2$上的值域$W_2$必须包含在$f$的定义域$D_1$内,即$W_2\subset D_1$. 否则不能构成复合函数.

2. 反函数

设函数$y=f(x)$的定义域为$D$,值域为$W$. 如果对于任意$y\in W$,都有唯一确定的$x\in D$满足关系$f(x)=y$,那么就把$x$值作为取定的$y$值的对应值,从而得到了一个定义在$W$上的新的函数. 这个新的函数称为$y=f(x)$的反函数,记作$x=f^{-1}(y)$. 这个函数的定义域为$W$,值域为$D$,相对于反函数$x=f^{-1}(y)$来说,原来的函数$y=f(x)$称为直接函数.

把直接函数 $y=f(x)$ 和它的反函数 $y=f^{-1}(x)$ 的图形画在同一坐标平面上，这两个图形关于直线 $y=x$ 对称.

**定理 1.1.1(反函数存在定理)** 如果函数 $y=f(x)$ 定义在某个区间 $I$ 上并在该区间上单调增加(或减少)，那么它的反函数必存在，并且与直接函数具有相同的单调性.

**例 1-1** 设函数

$$y=\sin u, u\in(-\infty,+\infty),$$
$$u=x^2, x\in(-\infty,+\infty),$$

于是复合函数 $y=\sin x^2$，它的定义域是 $\mathbf{R}$.

**例 1-2** 设函数

$$y=\sqrt{u}, u\in[0,+\infty),$$
$$u=x+4, x\in(-\infty,+\infty),$$

于是复合函数 $y=\sqrt{x+4}$，它的定义域是 $[-4,+\infty)$.

**例 1-3** 求函数 $y=\dfrac{2^x}{1+2^x}$ 的反函数.

**解** 由 $y=\dfrac{2^x}{1+2^x}$ 可解得 $x=\log_2\dfrac{y}{1-y}$，对换 $x,y$ 的位置，即得所求的反函数为

$$y=\log_2\frac{x}{1-x},$$

其定义域为 $(0,1)$.

### 1.1.4 初等函数

1. 基本初等函数

幂函数、指数函数、对数函数、三角函数和反三角函数，这五类函数称为基本初等函数. 由常数和基本初等函数经过有限次四则运算和有限次复合后所得到的能用一个解析式子表示的函数，称为初等函数.

(1)幂函数

$$y=x^a(a\in\mathbf{R}).$$

它的定义域和值域依据 $a$ 的取值不同而不同，但是无论 $a$ 取何值，幂函数在 $x\in(0,+\infty)$ 内总有定义. 当 $a\in\mathbf{N}$ 或 $a=\dfrac{1}{2n-1}, n\in\mathbf{N}$ 时，定义域为 $\mathbf{R}$.

(2)指数函数

$$y=a^x(a>0,a\neq1).$$

它的定义域为 $(-\infty,+\infty)$，值域为 $(0,+\infty)$.

(3)对数函数

$$y = \log_a x\ (a > 0, a \neq 1).$$

定义域为$(0, +\infty)$,值域为$(-\infty, +\infty)$. 对数函数 $y = \log_a x$ 是指数函数 $y = a^x$ 的反函数. 在工程中,常以无理数 $e = 2.718\ 281\ 828\cdots$作为指数函数和对数函数的底,并且记 $e^x = \exp x$, $\log_e x = \ln x$,后者称为自然对数函数.

(4)三角函数

三角函数有正弦函数 $y = \sin x$、余弦函数 $y = \cos x$、正切函数 $y = \tan x$、余切函数 $y = \cot x$、正割函数 $y = \sec x$ 和余割函数 $y = \csc x$.

(5)反三角函数

反三角函数主要包括反正弦函数 $y = \arcsin x$、反余弦函数 $y = \arccos x$、反正切函数 $y = \arctan x$ 和反余切函数 $y = \mathrm{arccot}\, x$ 等.

(6)常量函数为常数

$y = c$($c$ 为常数)定义域为$(-\infty, +\infty)$,函数的图形是一条水平的直线.

2. 初等函数

由常数和基本初等函数经过有限次四则运算和有限次的函数复合步骤所构成并可用一个式子表示的函数,称为初等函数. 例如

$$y = \ln(\sin x + 4), y = e^{2x}\sin(3x + 1), y = \sqrt[3]{\sin x}$$

等都是初等函数. 本书所讨论的函数绝大多数都是初等函数.

# 1.2 极　　限

极限概念是微积分学最重要的基本概念之一,是微积分的理论基础. 微积分的一些重要概念都建立在极限概念的基础上,所以有必要对它作比较详细的研究.

## 1.2.1 数列的极限

极限的概念是由于求某些实际问题的精确解而产生的,平面上曲边形面积的计算,就是极限概念的起源之一. 例如,我国古代数学家刘徽在公元 3 世纪就曾提出利用圆内接多边形来推算圆面积的方法——割圆术,这就是极限的思想在几何上的应用.

在解决实际问题中逐渐形成的这种极限的方法,已成为微积分中的一种基本方法.

如果按照某一法则,有第一个实数 $x_1$,第二个实数 $x_2$,…,这样依次排列,使得对应着任何一个正整数 $n$ 有一个确定的实数 $x_n$,那么,这列有次序的数

$$x_1, x_2, \cdots, x_n, \cdots$$

就称为数列,简记为数列$\{x_n\}$. 数列中的每一个数称为数列的项,第 $n$ 项 $x_n$ 称为数列的一般项. 例如

$$\frac{1}{2},\frac{2}{3},\frac{3}{4},\cdots,\frac{n}{n+1},\cdots$$

$$2,4,8,\cdots,2^n,\cdots$$

$$\frac{1}{2},\frac{1}{4},\frac{1}{8},\cdots,\frac{1}{2^n},\cdots$$

$$1,-1,1,-1,\cdots,(-1)^{n+1}\cdots$$

都是数列的例子,它们的一般项依次为

$$\frac{n}{n+1},2^n,\frac{1}{2^n},(-1)^{n+1}.$$

**定义 1.2.1** 设$\{x_n\}$为一数列,如果存在常数 $a$,使得对于任意给定的正数 $\varepsilon$(无论它多么小),总存在正整数 $N$,使得当 $n>N$ 时,不等式$|x_n-a|<\varepsilon$ 都成立,那么称常数 $a$ 是数列$\{x_n\}$的极限,或者称数列$\{x_n\}$收敛于 $a$,记为

$$\lim_{n\to\infty}x_n=a \text{ 或 } x_n\to a\ (n\to\infty).$$

如果这样的常数 $a$ 不存在,就说数列$\{x_n\}$没有极限,或者称数列$\{x_n\}$是发散的,习惯上也说$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 不存在.

定义中正数 $\varepsilon$ 是“任意给定的”. 由于 $\varepsilon$ 的任意性,不等式$|x_n-a|<\varepsilon$ 才能表达出 $x_n$ 与 $a$ 无限接近的含义,但它一旦给定,就应该看作是不变的,以便根据它来确定正整数 $N$. 另外,定义中的正整数 $N$ 与任意给定的正数 $\varepsilon$ 有关,它随 $\varepsilon$ 的给定而选定;对应于一个给定的 $\varepsilon>0$,$N$ 不是唯一的,假定对某个 $\varepsilon$,$N_1$ 满足要求,那么大于 $N_1$ 的任何自然数都满足要求.

数列极限$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$ 的几何解释:将常数 $a$ 及数列$\{x_n\}$在数轴上用它们的对应点表示出来,再在数轴上作点 $a$ 的 $\varepsilon$ 邻域,即开区间$(a-\varepsilon,a+\varepsilon)$(图 1-1).

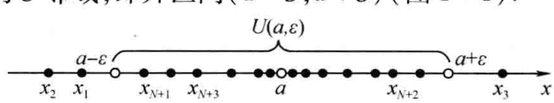


**图 1-1**

因不等式

$$|x_n-a|<\varepsilon$$

等价于不等式

$$a-\varepsilon<x_n<a+\varepsilon,$$

所以,当 $n>N$ 时, 所有的点

$$x_{N+1},x_{N+2},\cdots$$

都将落入开区间$(a-\varepsilon,a+\varepsilon)$内,而只有有限个点(至多只有 $N$ 个)在这区间以外. 即,无论 $\varepsilon$ 如何小,除去有限项所对应的点以外,其余无穷项所对应的点全部落入点 $a$ 的 $\varepsilon$ 邻域内.

为了表达方便,引入记号“$\forall$”表示“对于任意给定的”或“对于每一个”;记号“$\exists$”表示

"存在". 于是数列极限$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$定义可简单地表达为$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a\Leftrightarrow\forall\varepsilon>0$, $\exists$正整数$N$,当$n>N$时,有$|x_n-a|<\varepsilon$.

用定义去验证数列$\{x_n\}$的极限是$a$,关键是设法由任意给定的$\varepsilon>0$,找出一个相应的正整数$N$,使得当$n>N$时,不等式$|x_n-a|<\varepsilon$成立.

### 1.2.2 收敛数列的性质

**定理 1.2.1(唯一性)** 收敛数列的极限必唯一.

**证** 设$a$和$b$为$x_n$的任意两个极限,下证$a=b$. 由极限的定义,对$\forall\varepsilon>0$,必分别存在自然数$N_1,N_2$,当$n>N_1$时,有

$$|x_n-a|<\varepsilon; \tag{1}$$

当$n>N_2$时,有

$$|x_n-b|<\varepsilon; \tag{2}$$

令$N=\max\{N_1,N_2\}$,当$n>N$时,(1)(2)同时成立. 现考虑:

$$|a-b|=|(x_n-b)-(x_n-a)|\leqslant|x_n-b|+|x_n-a|<\varepsilon+\varepsilon=2\varepsilon,$$

由于$a,b$均为常数,则$a=b$,所以$x_n$的极限只能有一个.

对于数列$\{x_n\}$,如果存在着正数$M$,使得对一切$x_n$都满足不等式$|x_n|\leqslant M$,则称数列$\{x_n\}$是有界的;如果这样的正数$M$不存在,就说数列$\{x_n\}$是无界的.

**定理 1.2.2(收敛数列的有界性)** 收敛数列必为有界数列.

**证** 设数列$\{x_n\}$收敛于$a$,由数列极限的定义,对于$\varepsilon=1$,存在正整数$N$,当$n>N$时,有$|x_n-a|<1$成立. 于是,当$n>N$时,

$$|x_n|=|(x_n-a)+a|\leqslant|x_n-a|+|a|<1+|a|,$$

取$M=\max\{|x_1|,|x_2|,\cdots,|x_N|,1+|a|\}$,那么数列$\{x_n\}$中的一切$x_n$都满足不等式$|x_n|\leqslant M$. 这就证明了数列$\{x_n\}$是有界的.

**定理 1.2.3(收敛数列的保号性)** 如果$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$,且$a>0$(或$a<0$),那么存在正整数$N$,当$n>N$时,恒有$x_n>0$(或$x_n<0$).

**证** 不妨设$a>0$,取$\varepsilon=\dfrac{a}{2}$,由$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$知存在着正整数$N$,当$n>N$时,有

$$|x_n-a|<\frac{a}{2},$$

从而

$$x_n>a-\frac{a}{2}=\frac{a}{2}>0.$$

**推论 1.2.1** 如果数列$\{x_n\}$从某一项起有$x_n\geqslant0$(或$x_n\leqslant0$)且$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$,那么$a\geqslant0$(或$a\leqslant0$).

**例 1－4** 证明数列

$$1,\frac{1}{2},\frac{1}{3},\cdots,\frac{1}{n},\cdots$$

的极限是 0.

**证** 对任意给定的 $\varepsilon>0$,因为 $|x_n-0|=\frac{1}{n}$,于是,要使 $|x_n-0|<\varepsilon$,只要 $\frac{1}{n}<\varepsilon$,即 $n>\frac{1}{\varepsilon}$.因此,可取 $N=\left[\frac{1}{\varepsilon}\right]$,则当 $n>N$ 时,就有

$$\left|\frac{1}{n}-0\right|<\varepsilon,$$

由定义 1.2.1 知,$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$.

**例 1－5** 证明 $\lim\limits_{n\to\infty}q^{n-1}=0\ (0\neq|q|<1)$.

**证** 任意给定 $\varepsilon>0$(设 $0<\varepsilon<1$),因为 $|x_n-0|=|q^{n-1}-0|=|q|^{n-1}$,于是,要使

$$|x_n-0|<\varepsilon,$$

只要 $|q|^{n-1}<\varepsilon$,取自然对数,得 $(n-1)\ln|q|<\ln\varepsilon$. 因为 $|q|<1$,所以 $\ln|q|<0$,故

$$n>1+\frac{\ln\varepsilon}{\ln|q|},$$

取 $N=\left[1+\frac{\ln\varepsilon}{\ln|q|}\right]$,则当 $n>N$ 时,就有 $|q|^{n-1}<\varepsilon$. 由定义 1.2.1 知 $\lim\limits_{n\to\infty}q^{n-1}=0$.

**例 1－6** 证明数列 $\{x_n\}=\{(-1)^{n+1}\}$ 是发散的.

**证** 因为数列

$$1,-1,1,-1,\cdots,(-1)^{n+1},\cdots$$

的子数列 $\{x_{2k-1}\}$ 收敛于 1,而子数列 $\{x_{2k}\}$ 收敛于 $-1$,因此数列 $\{x_n\}=\{(-1)^{n+1}\}$ 是发散的.

上面例题说明了有界数列不一定收敛,即数列有界是数列收敛的必要条件,但不是充分条件.

数列的极限可以看作是 $x\to+\infty$ 时函数极限的特殊情况.

### 1.2.3 函数的极限

1. 自变量趋于无穷大时函数的极限

**定义 1.2.2** 设函数 $f(x)$ 当 $|x|>M$($M$ 是某一正数)时有定义,如果存在常数 $A$,对于任意给定的正数 $\varepsilon$(无论它多么小),总存在正数 $X$,使得当 $|x|>X$ 时,有

$$|f(x)-A|<\varepsilon,$$

那么称常数 $A$ 为函数 $f(x)$ 当 $x\to\infty$ 时的极限,记作

$$\lim_{x\to\infty}f(x)=A \text{ 或 } f(x)\to A \quad (\text{当 } x\to\infty \text{ 时}).$$

该定义可简单地表达为$\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=A\Leftrightarrow\forall\varepsilon>0,\exists X>0$，当$|x|>X$时，有$|f(x)-A|<\varepsilon$.

如果$x>0$且无限增大（记作$x\to+\infty$），那么只要把上面定义中的$|x|>X$改为$x>X$，就可得$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=A$的定义. 同样，$x<0$而$|x|$无限增大（记作$x\to-\infty$），那么只要把$|x|>X$改为$x<-X$，便可得$\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=A$的定义.

几何意义：以$\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=A$为例，作直线$y=A+\varepsilon$及$y=A-\varepsilon$，则总存在着一个正数$X$，使得当$x<-X$或$x>X$时，函数$y=f(x)$的图形位于这两条直线之间（图1-2）.

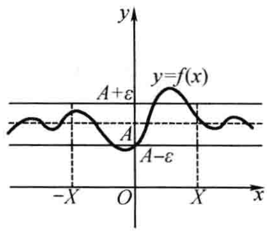


**图1-2**

由上面分析不难得到

$$\lim_{x\to\infty}f(x)=A\Leftrightarrow\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to-\infty}f(x)=A.$$

2. 自变量趋于有限值时函数的极限

同数列极限的概念一样，自变量趋于有限值$x_0$时的函数极限可理解为：当$x\to x_0$时，$f(x)\to A$（$A$为某常数），即当$x\to x_0$时，$f(x)$与$A$无限地接近，或说$|f(x)-A|$可任意小，亦即对于预先任意给定的正整数$\varepsilon$（不论多么小），当$x$与$x_0$充分接近时，可使得$|f(x)-A|$小于$\varepsilon$.

**定义**1.2.3　设函数$f(x)$在$x_0$点的某个去心邻域内有定义，如果存在常数$A$，使得对于任意给定的正数$\varepsilon$（无论它多么小），总存在正数$\delta$，使得当$0<|x-x_0|<\delta$时，有

$$|f(x)-A|<\varepsilon,$$

那么称常数$A$为函数$f(x)$当$x\to x_0$时的极限，记作

$$\lim_{x\to x_0}f(x)=A\text{ 或 }f(x)\to A(\text{当 }x\to x_0\text{ 时}).$$

如果这样的常数$A$不存在，那么称当$x\to x_0$时$f(x)$没有极限，习惯上表达成$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$不存在.

该定义可简单地表达为$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A\Leftrightarrow\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0$，当$0<|x-x_0|<\delta$时，有$|f(x)-A|<\varepsilon$.

**注意**　由于定义中的正数$\varepsilon$是一个任意给定的正数，因此不等式$|f(x)-A|<\varepsilon$刻画了$f(x)$与$A$无限接近的含义；定义中的正数$\delta$表示了$x$与$x_0$的接近程度，它与任意给定的正数$\varepsilon$有关，随着$\varepsilon$的给定而选定；定义中$0<|x-x_0|$表示$x\neq x_0$，所以$x\to x_0$时，$f(x)$有没有极限，与$f(x)$在点$x_0$是否有定义无关.

几何意义：$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$ 任意给定一个正数 $\varepsilon$，作平行于 $x$ 轴的两条直线 $y=A+\varepsilon$ 及 $y=A-\varepsilon$，介于这两条直线之间是一带形区域. 根据定义，对于给定的正数 $\varepsilon$，存在着点 $x_0$ 的一个去心 $\delta$ 邻域 $\mathring{U}(x_0,\delta)$，当 $x\in\mathring{U}(x_0,\delta)$ 时，即当 $x\in(x_0-\delta,x_0+\delta)$ 但 $x\neq x_0$ 时，有不等式

$$|f(x)-A|<\varepsilon$$

成立，即

$$A-\varepsilon<f(x)<A+\varepsilon$$

成立，也就是说这些点落在这个带形区域内（图 1－3）.

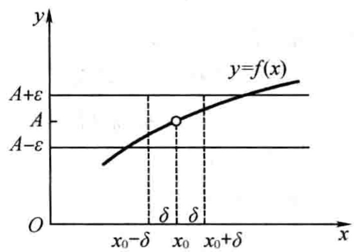


**图 1－3**

**例 1－7** 证明 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sin x}{x}=0$.

**证** $\forall\varepsilon>0$，由于 $\left|\dfrac{\sin x}{x}-0\right|=\left|\dfrac{\sin x}{x}\right|$，要使 $\left|\dfrac{\sin x}{x}-0\right|<\varepsilon$ 只要 $|x|>\dfrac{1}{\varepsilon}$. 所以，可取 $X=\dfrac{1}{\varepsilon}$. 则当 $|x|>X$ 时，有不等式

$$\left|\frac{\sin x}{x}-0\right|<\varepsilon$$

成立，因此 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sin x}{x}=0$.

直线 $y=0$ 是函数 $y=\dfrac{1}{x}$ 图形的水平渐近线.

**例 1－8** 证明 $\lim\limits_{x\to x_0}\sin x=\sin x_0$.

**证** 由于 $|\sin x-\sin x_0|=\left|2\cos\dfrac{x+x_0}{2}\sin\dfrac{x-x_0}{2}\right|\leqslant 2\left|\sin\dfrac{x-x_0}{2}\right|\leqslant|x-x_0|$，因此，对于任意 $\varepsilon>0$，取 $\delta=\varepsilon$，则当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时，便有

$$|\sin x-\sin x_0|\leqslant|x-x_0|<\varepsilon,$$

即 $\lim\limits_{x\to x_0}\sin x=\sin x_0$，同理可证 $\lim\limits_{x\to x_0}\cos x=\cos x_0$.

**例 1－9** 证明 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-1}{2x^2-x-1}=\dfrac{2}{3}$.

**证** 对$\forall \varepsilon>0$,因为$x\neq 1$,所以$x-1\neq 0$. 则

$$\left|\frac{x^2-1}{2x^2-x-1}-\frac{2}{3}\right|=\left|\frac{x+1}{2x+1}-\frac{2}{3}\right|=\left|\frac{1-x}{3(2x+1)}\right|.$$

由于$2x+1>1$,从而$\left|\frac{1-x}{3(2x+1)}\right|<\frac{|x-1|}{3}$,要使$\left|\frac{x^2-1}{2x^2-x-1}-\frac{2}{3}\right|<\varepsilon$,只需$\frac{|x-1|}{3}<\varepsilon$,即$|x-1|<3\varepsilon$. 取$\delta=\min\{1,3\varepsilon\}$,当$0<|x-1|<\delta$时,有$\left|\frac{x^2-1}{2x^2-x-1}-\frac{2}{3}\right|<\varepsilon$.

在函数极限的定义中,$x$既从$x_0$的左边(即从小于$x_0$的方向)趋于$x_0$,也从$x_0$的右边(即从大于$x_0$的方向)趋于$x_0$. 但有时只能或需要$x$从$x_0$的某一侧趋于$x_0$的极限,如分段函数及在区间的端点处等. 这样,就有必要引进单侧极限的定义.

**定义 1.2.4** 对$\forall \varepsilon>0$, $\exists \delta>0$,当$x_0-\delta<x<x_0$时(当$x_0<x<x_0+\delta$时),有

$$|f(x)-A|<\varepsilon,$$

这时就称$A$为$f(x)$当$x\to x_0$时的左(右)极限,记为

$$\lim_{x\to x_0^-}f(x)=A(\lim_{x\to x_0^+}f(x)=A)\text{或}f(x-0)=A(f(x_0+0)=A).$$

左极限和右极限统称为单侧极限.

**定理 1.2.4** 函数$f(x)$当$x$趋于$x_0$时极限存在的充要条件是函数在该点的左极限和右极限都存在且相等,即

$$f(x_0-0)=f(x_0+0).$$

如果一个单侧极限不存在,或左、右极限都存在但不相等,则可断言该点处极限不存在. 例如$\lim\limits_{x\to 0-0}\operatorname{sgn}(x)=-1$, $\lim\limits_{x\to 0+0}\operatorname{sgn}(x)=1$,因为$-1\neq 1$,所以$\lim\limits_{x\to 0}\operatorname{sgn}(x)$不存在.

**例 1-10** 证明函数

$$f(x)=\begin{cases}-3x+1, & x<1\\ 0, & x=1\\ x, & x<1\end{cases}$$

当$x\to 1$时,$f(x)$的极限不存在.

**证** 因为

$$\lim_{x\to 1^-}f(x)=\lim_{x\to 1^-}(-3x+1)=-2,$$

$$\lim_{x\to 1^+}f(x)=\lim_{x\to 1^+}x=1,$$

所以$\lim\limits_{x\to 1}f(x)$不存在.

### 1.2.4 函数极限的性质

与收敛数列极限的性质相比较,可得函数极限的一些相应的性质,它们都可以利用函数极限的定义,证明下列定理.

**定理 1.2.5(函数极限的唯一性)** 如果$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$存在,那么这个极限唯一.

当 $x\to\infty$ 时,此定理仍然成立.

**定理 1.2.6(函数极限的局部有界性)** 如果$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$,那么存在常数 $M>0$ 和 $\delta>0$,使得当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时,有 $|f(x)|\leqslant M$.

**证** 取正数 $\varepsilon=1$. 根据$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$ 的定义,对于 $\varepsilon=1$,存在 $\delta>0$,当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时,有不等式

$$|f(x)-A|<1,$$

从而

$$|f(x)|\leqslant|f(x)-A|+|A|<|A|+1,$$

记 $M=|A|+1$,于是有 $|f(x)|\leqslant M$.

**定理 1.2.7(函数极限的局部保号性)** 如果$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$,而且 $A>0$(或 $A<0$),那么存在点 $x_0$ 的某一去心 $\delta(\delta>0)$邻域$\mathring{U}(x_0,\delta)$,当 $x\in\mathring{U}(x_0,\delta)$时,有 $f(x)>0$(或 $f(x)<0$).

**证** 对于 $A>0$ 的情形:取正数 $\varepsilon\leqslant A$. 根据$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$ 的定义,存在 $\delta>0$,当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时,有不等式

$$|f(x)-A|<\varepsilon,$$

即

$$A-\varepsilon<f(x)<A+\varepsilon$$

成立,因为 $A-\varepsilon\geqslant0$,故 $f(x)>0$.

同理可证 $A<0$ 的情形.

**推论 1.2.2** 如果在 $x_0$ 的某去心邻域内 $f(x)\geqslant0$(或 $f(x)\leqslant0$),而且$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$,那么$A\geqslant0$(或 $A\leqslant0$).

# 1.3 极限运算法则与存在准则

由极限定义来求极限是不可取的,也是不可行的,因此需寻求一些方法来求极限.

## 1.3.1 极限运算法则

1. 四则运算法则

在下面的讨论中,记号 lim 下面没有标明自变量的变化过程,实际上,下面的定理对 $x\to x_0$ 及 $x\to\infty$ 都是成立的,而且对数列极限也是成立的. 本节只证明 $x\to x_0$ 的情形,类似可证 $x\to\infty$ 的情形.

**定理 1.3.1** 如果 $\lim f(x)=A$, $\lim g(x)=B$,则