普通高等教育“十二五”规划教材

工科数学精品丛书

丛书主编：李德宜　等

线性代数学习指导

（第二版）

赵喜林　余　东　主编

INEAR ALGEBRA STUDY GUIDE

科学出版社

普通高等教育“十二五”规划教材

工科数学精品丛书

丛书主编　李德宜等

线性代数学习指导

（第二版）

赵喜林　余　东　主编

科学出版社

北　京

内 容 简 介

本书紧扣高等院校公共数学课现在所使用的教材，以培养创造性思维和数学素质，提高学生分析问题和解决问题的能力为主线编写.

全书内容包括矩阵、向量、行列式、线性方程组、相似矩阵及二次型、线性空间与线性变换，每章内容由基本要求、内容提要、主要方法、典型题解、测试题等构成. 书后附有线性代数中常用的等价命题和综合试题，所有试题均给出了解答或提示.

本书内容充实，题型丰富. 可作为高等院校理工类、经管类学生学习线性代数的配套教材和指导书，也可作为报考工学、理学及经济类硕士研究生的复习资料以及相关教师的教学参考书.

图书在版编目(CIP)数据

线性代数学习指导/赵喜林，余东主编—2版. —北京：科学出版社，2014.5
(工科数学精品丛书 / 李德宜等主编)
普通高等教育"十二五"规划教材
ISBN 978-7-03-040374-2

Ⅰ. 线… Ⅱ. ①赵… ②余… Ⅲ. 线性代数—高等学校—教学参考资料
Ⅳ. O151.2

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2014)第 067922 号

责任编辑：吉正霞 黄彩霞/责任校对：董艳辉
责任印制：高 嵘/封面设计：苏 波

科学出版社 出版
北京东黄城根北街 16 号
邮政编码：100717
http://www.sciencep.com
武汉市新华印刷有限责任公司印刷
科学出版社发行 各地新华书店经销
*
2009 年 4 月第 一 版 开本：B5(720×1000)
2014 年 4 月第 二 版 印张：12 1/2
2014 年 4 月第一次印刷 字数：252 000

定价：25.00 元

(如有印装质量问题，我社负责调换)

普通高等教育"十二五"规划教材

工科数学精品丛书

丛书主编　李德宜等

《线性代数学习指导》(第二版)编委会

主　编　赵喜林　余　东

副主编　王志明　熊　丹　李春丽　蒋　君

编　委　(按姓氏笔画排序)

王志明　李春丽　李琳娜　余　东

张　强　赵喜林　胡　松　祝彦成

彭　静　蒋　君　熊　丹

“工科数学精品丛书”序

工科学生毕业多年后时常感言，数学知识很多似乎没有派上用处，但数学训练、数学思想和精神，却无时无刻不在发挥着积极的作用，成为取得成功的重要因素之一.

数学是一门高度抽象的学科，但是它非人类精神纯粹自由创造和想象，而是源于自然和工程问题.系统传授数学知识当然是工科数学教学的基本任务与责任，同时，掌握了数学的思想方法和精神实质，就可以由不多的几个公式演绎出千变万化的生动结论，显示出无穷无尽的威力.工科数学创新教学，增强数学应用背景的讲授，拓宽学生的知识面，了解数学学科在科学研究领域的重要性，为学生打开数学与应用的窗口，等等，能培养学生的创新意识与精神，提高数学思维与素养，真正达到工科数学教学的目的.

工科数学精品教材的编写与成熟，在开放的视野与背景下，得到认同，自然成为纸质教材与数字出版的精品，从而获得广泛认可和使用.

在学会、领导和专家的关怀和指导下，本区域若干所全军重点、一本和省重点高校，其工科数学教材，在科学出版社出版和再版.十余年来，教学和教材理念从素质教育，到分类分层教学改革，到数学思想、方法与创新教育，历经各校几届班子和责任教授的共同努力，逐渐成熟，成为具有较高质量的核心精品.

教材转型与数字出版呼之欲出，大趋势赫然在前，教材又重新经历新的考验.“工科数学精品丛书”正是按此理念和要求，直面开放的视野与背景，将改革与创新的成果汇集起来，重新审视和操作，精益求精，以赢得内容先机，修订版和新编教材均是如此.

修订和新编的核心理念，一是体现数学思维，将数学思想和方法（如数学建模）融入教材体系、内容及其应用；二是深化改革与创新，面向开放和数字出版的大平台，赢得内容先机，营造精品.

“工科数学精品丛书”为工科数学课程教材，包括高等数学、线性代数、概率论与数理统计、数学建模、数学实验、复变函数与积分变换、数值分析、数学物理方程、离散数学、模糊数学、运筹学等.上述各高校课程大多为海军优质课程和省级精品课程，对应已出版教材分别获海军优秀教材一、二等奖和省部级教学成果一、二等奖.

丛书注重质量，讲究适用和教学实践性，体系相对完整与系统，加强应用性，按照先进、改革与创新等编写原则和基本要求安排教材框架、结构和内容.

丛书具有明确的指导思想：

(1) 遵循高等院校教学指导委员会关于课程的教学基本要求，知识体系相对完整，结构严谨，内容精炼，循序渐进，推理简明，通俗易懂.

(2) 注重教学创新，加强教学知识与内容的应用性，注重数学思想和方法的操作与应用及其实用性. 增强数学应用背景的介绍，拓宽学生的知识面，了解数学学科在科学研究领域的重要性，为学生打开数学与应用的窗口，培养学生的创新意识与精神，提高数学思维与素养，真正达到工科数学教学的目的.

(3) 融入现代数学思想(如数学建模)，分别将 Mathematic、Matlab、SAS、SPS 等软件的计算方法，恰当地融入课程教学内容中，培养学生运用数学软件的能力.

(4) 强化学生的实验训练和动手能力，可将实验训练作为模块，列入附录，供教学选用或学生自学自练，使用者取舍也方便.

(5) 教材章后均列出重要概念的英文词汇，布置若干道英文习题，要求学生用英文求解，以适应教育面向世界的需要，也为双语教学打下基础.

(6) 为使学生巩固知识和提高应用能力，章末列出习题，形式多样. 书后配测试题，书末提供解题思路或参考答案.

丛书为科学出版社普通高等教育“十二五”规划教材.

“工科数学精品丛书”编委会
2014 年 3 月

第二版前言

线性代数是高等院校一门重要的公共数学课. 很多学生觉得线性代数难学，做起题目来不知从何下手，究其原因，是因为线性代数的内容前后联系紧密，相互交织，像一张网！同一个概念有多种等价的描述方式. 例如，秩对矩阵而言是最高阶非零子式的阶数，对向量组而言是最大无关组所含向量的个数；线性方程组系数矩阵的秩是去掉多余方程余下的有效方程的个数，而对称矩阵的秩表示非零特征值的个数. 还有其他许多概念、结论像秩一样，在不同的场合有不同的表述. 因此，学习线性代数时，不但要对每一个知识点的内容非常熟练，还要把各个知识点互相联系起来，做到融会贯通，这样才能将线性代数的内容运用自如. 正是基于这样一个目的，编写了这本《线性代数学习指导(第二版)》. 该书的内容编排参照余胜春、李德宜主编的《线性代数(第二版)》，可作为它的配套教材.

本书每一章的内容包括基本要求、内容提要、主要方法、典型题解、测试题. 基本要求给出了每一部分内容应该掌握的程度；内容提要给出了每一章的主要概念、公式和主要结论；主要方法介绍了每一章解题所用到的主要方法；典型题解选自历年考研和其他参考书上的一些经典题型，对它们做了详细的解答和部分评注，并归纳了一些一般的结论；测试题 1 注重基础训练；测试题 2 提升了难度，注重综合训练，达到或接近公共数学课考研要求. 书末附有综合测试题和线性代数中常用的等价命题. 综合测试题供复习完线性代数后自我检测之用；常用的等价命题归纳总结了线性代数中常用命题的等价表述形式.

在编写每一部分内容时，我们力求做到：注重基础训练，突出内容重点，加强技能培养，提高解题能力，结合考研要求. 如果例题是考研题，用带小括号的数字标注，如【例 4】(94.3)，表示该题为 94 年考研数学三的考题.

本书由赵喜林、余东主编，王志明、熊丹、李春丽、蒋君任副主编. 赵喜林提出编写思路并统稿，胡松、李琳娜、张强、彭静、祝彦成参与了本书的编写工作.

由于编者水平有限，不当之处在所难免，恳请读者批评指正.

编　者
2014 年 1 月

目　　录

第1章　矩　　阵

基 本 要 求

1. 理解矩阵的概念，了解一些特殊矩阵的定义及性质.

2. 掌握矩阵的线性运算(加、减、数乘)、乘法、转置以及它们的运算规律，了解方阵的幂.

3. 理解逆矩阵的概念，掌握逆矩阵的性质以及求逆矩阵的基本方法.

4. 了解分块矩阵及其运算.

5. 掌握矩阵的初等变换，了解矩阵等价的概念及性质.

内 容 提 要

一、几类特殊矩阵

(1) 零矩阵 $\boldsymbol{O}$(所有元素都为 0 的矩阵).

(2) 单位矩阵 $\boldsymbol{E}$(主对角线上元素都为 1，其他元素都为 0 的矩阵).

(3) 对称阵 ($\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{A}$).

(4) 反对称阵 ($\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=-\boldsymbol{A}$).

(5) 对角阵 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})$ ($a_{ij}=0$，$i\neq j$).

(6) 初等矩阵(单位矩阵 $\boldsymbol{E}$ 经过一次初等变换而成的矩阵).

(7) 逆矩阵 $\boldsymbol{A}^{-1}$(满足 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{-1}=\boldsymbol{E}$，$\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{A}=\boldsymbol{E}$ 的矩阵).

(8) 正交阵 ($\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}=\boldsymbol{E}$)(见第 2 章).

(9) 伴随矩阵 $\boldsymbol{A}^{*}=(\boldsymbol{A}_{ji})$，若 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})$(见第 3 章).

二、矩阵的运算

(1) 线性运算：设 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{m\times n}$，$\boldsymbol{B}=(b_{ij})_{m\times n}$，则

$$\boldsymbol{A}\pm\boldsymbol{B}=(a_{ij}\pm b_{ij})_{m\times n},\quad \lambda\boldsymbol{A}=(\lambda a_{ij})_{m\times n}$$

$$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}=\boldsymbol{B}+\boldsymbol{A},\quad (\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})+\boldsymbol{C}=\boldsymbol{A}+(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C})$$

$$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{O}=\boldsymbol{A},\quad \boldsymbol{A}+(-\boldsymbol{A})=\boldsymbol{O}$$

(2) 乘法运算：设 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{m\times s}$，$\boldsymbol{B}=(b_{ij})_{s\times n}$，则 $\boldsymbol{AB}=(c_{ij})_{m\times n}$，其中

$$c_{ij}=a_{i1}b_{1j}+a_{i2}b_{2j}+\cdots+a_{is}b_{sj}$$

$$(\boldsymbol{AB})\boldsymbol{C}=\boldsymbol{A}(\boldsymbol{BC}),\quad \boldsymbol{A}(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C})=\boldsymbol{AB}+\boldsymbol{AC},\quad (\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C})\boldsymbol{A}=\boldsymbol{BA}+\boldsymbol{CA}$$

$$\boldsymbol{AE}=\boldsymbol{A},\quad \boldsymbol{EA}=\boldsymbol{A},\quad \boldsymbol{AO}=\boldsymbol{O},\quad \boldsymbol{OA}=\boldsymbol{O}$$

$$(k\boldsymbol{A})(l\boldsymbol{B})=(kl)(\boldsymbol{AB})\quad(k,l\text{ 为数})$$

【注】 一般情况下：

① $\boldsymbol{AB}\neq\boldsymbol{BA}$；

② $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{O}\not\Rightarrow\boldsymbol{A}=\boldsymbol{O}$ 或 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{O}$，但 $\boldsymbol{A}$ 可逆时，$\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{O}\Rightarrow\boldsymbol{B}=\boldsymbol{O}$；

③ $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{AC}\not\Rightarrow\boldsymbol{B}=\boldsymbol{C}$，但 $\boldsymbol{A}$ 可逆时，$\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{AC}\Rightarrow\boldsymbol{B}=\boldsymbol{C}$；

④ $\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{O}\not\Rightarrow\boldsymbol{A}=\boldsymbol{O}$；

⑤ $\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{E}\not\Rightarrow\boldsymbol{A}=\pm\boldsymbol{E}$.

(3) 转置：

$$(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{A},\qquad(k\boldsymbol{A})^{\mathrm{T}}=k\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}(k\text{ 为数}),$$
$$(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}},\quad(\boldsymbol{AB})^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$$

(4) 逆矩阵：

$$(\boldsymbol{A}^{-1})^{-1}=\boldsymbol{A},\quad(k\boldsymbol{A})^{-1}=\frac{1}{k}\boldsymbol{A}^{-1},\ (\boldsymbol{AB})^{-1}=\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{A}^{-1}$$
$$(\boldsymbol{A}_1\boldsymbol{A}_2\cdots\boldsymbol{A}_n)^{-1}=\boldsymbol{A}_n^{-1}\boldsymbol{A}_{n-1}^{-1}\cdots\boldsymbol{A}_1^{-1},\quad(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})^{-1}=(\boldsymbol{A}^{-1})^{\mathrm{T}}$$

(5) 方阵的幂(k,l,n 为正整数)：

$$\boldsymbol{A}^0=\boldsymbol{E},\qquad\boldsymbol{A}^k\boldsymbol{A}^l=\boldsymbol{A}^{k+l},\quad(\boldsymbol{A}^k)^l=\boldsymbol{A}^{kl},$$
$$(\boldsymbol{A}^k)^{\mathrm{T}}=(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})^k,\quad(l\boldsymbol{A})^k=l^k\boldsymbol{A}^k,\quad(\boldsymbol{A}^n)^{-1}=(\boldsymbol{A}^{-1})^n$$

(6) 分块矩阵：将分块矩阵“每块”看成一般矩阵的元素，分块矩阵的运算和一般矩阵的运算类似，但要求“块”之间的运算能够进行.

① 设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}_{11}&\cdots&\boldsymbol{A}_{1r}\\ \vdots&&\vdots\\ \boldsymbol{A}_{s1}&\cdots&\boldsymbol{A}_{sr}\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{B}_{11}&\cdots&\boldsymbol{B}_{1r}\\ \vdots&&\vdots\\ \boldsymbol{B}_{s1}&\cdots&\boldsymbol{B}_{sr}\end{pmatrix}$，则

$$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}_{11}+\boldsymbol{B}_{11}&\cdots&\boldsymbol{A}_{1r}+\boldsymbol{B}_{1r}\\ \vdots&&\vdots\\ \boldsymbol{A}_{s1}+\boldsymbol{B}_{s1}&\cdots&\boldsymbol{A}_{sr}+\boldsymbol{B}_{sr}\end{pmatrix}$$

② 设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}_{11}&\cdots&\boldsymbol{A}_{1r}\\ \vdots&&\vdots\\ \boldsymbol{A}_{s1}&\cdots&\boldsymbol{A}_{sr}\end{pmatrix}$，$\lambda$ 为数，则 $\lambda\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}\lambda\boldsymbol{A}_{11}&\cdots&\lambda\boldsymbol{A}_{1r}\\ \vdots&&\vdots\\ \lambda\boldsymbol{A}_{s1}&\cdots&\lambda\boldsymbol{A}_{sr}\end{pmatrix}$.

③ 设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}_{11}&\cdots&\boldsymbol{A}_{1t}\\ \vdots&&\vdots\\ \boldsymbol{A}_{s1}&\cdots&\boldsymbol{A}_{st}\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{B}_{11}&\cdots&\boldsymbol{B}_{1r}\\ \vdots&&\vdots\\ \boldsymbol{B}_{t1}&\cdots&\boldsymbol{B}_{tr}\end{pmatrix}$，则 $\boldsymbol{AB}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{C}_{11}&\cdots&\boldsymbol{C}_{1r}\\ \vdots&&\vdots\\ \boldsymbol{C}_{s1}&\cdots&\boldsymbol{C}_{sr}\end{pmatrix}$，

其中

$$\boldsymbol{C}_{ij}=\sum_{k=1}^{t}\boldsymbol{A}_{ik}\boldsymbol{B}_{kj}\quad(i=1,\cdots,s;\ j=1,\cdots,r)$$

④ 设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}_{11} & \cdots & \boldsymbol{A}_{1r}\\ \vdots & & \vdots\\ \boldsymbol{A}_{s1} & \cdots & \boldsymbol{A}_{sr}\end{pmatrix}$，则 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}_{11}^{\mathrm{T}} & \cdots & \boldsymbol{A}_{s1}^{\mathrm{T}}\\ \vdots & & \vdots\\ \boldsymbol{A}_{1r}^{\mathrm{T}} & \cdots & \boldsymbol{A}_{sr}^{\mathrm{T}}\end{pmatrix}$.

⑤ 设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}_{1} & & \boldsymbol{O}\\ & \ddots & \\ \boldsymbol{O} & & \boldsymbol{A}_{s}\end{pmatrix}$，则 $\boldsymbol{A}^{-1}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}_{1}^{-1} & & \boldsymbol{O}\\ & \ddots & \\ \boldsymbol{O} & & \boldsymbol{A}_{s}^{-1}\end{pmatrix}$；

设 $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{O} & & \boldsymbol{B}_{1}\\ & ⋰ & \\ \boldsymbol{B}_{t} & & \boldsymbol{O}\end{pmatrix}$，则 $\boldsymbol{B}^{-1}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{O} & & \boldsymbol{B}_{t}^{-1}\\ & ⋰ & \\ \boldsymbol{B}_{1}^{-1} & & \boldsymbol{O}\end{pmatrix}$.

⑥ 设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}_{1} & & \boldsymbol{O}\\ & \ddots & \\ \boldsymbol{O} & & \boldsymbol{A}_{s}\end{pmatrix}$，则 $\boldsymbol{A}^{n}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}_{1}^{n} & & \boldsymbol{O}\\ & \ddots & \\ \boldsymbol{O} & & \boldsymbol{A}_{s}^{n}\end{pmatrix}$.

三、矩阵的等价

(1) 初等变换：对矩阵的行(列)施行下列变换，称为初等变换.

① 交换两行(列) $r_i \leftrightarrow r_j$；

② 用非零的数 k 乘某行 kr_i $(k \neq 0)$；

③ 用数 k 乘某行加到另一行 $kr_i + r_j$.

初等变换可以通过乘初等矩阵来实现. 左乘初等矩阵相当于作行初等变换，右乘初等矩阵相当于作列初等变换.

(2) 矩阵 $\boldsymbol{A}$ 经有限次初等变换成 $\boldsymbol{B}$，称 $\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$ 等价，记为 $\boldsymbol{A}\cong\boldsymbol{B}$.

$$\boldsymbol{A}\cong\begin{pmatrix}\boldsymbol{E}_r & \boldsymbol{O}\\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O}\end{pmatrix}$$

$\begin{pmatrix}\boldsymbol{E}_r & \boldsymbol{O}\\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O}\end{pmatrix}$称为 $\boldsymbol{A}$ 的标准形.

(3) $\boldsymbol{A}\cong\boldsymbol{B}\Leftrightarrow\exists$ 可逆阵 $\boldsymbol{P}$，$\boldsymbol{Q}$，使 $\boldsymbol{PAQ}=\boldsymbol{B}$.

主 要 方 法

一、求逆矩阵

(1) 利用式 $\boldsymbol{AA}^{-1}=\boldsymbol{E}$，$\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{A}=\boldsymbol{E}$.

【例 1】 已知 $\boldsymbol{A}^2+2\boldsymbol{A}-3\boldsymbol{E}=\boldsymbol{O}$，求$(\boldsymbol{A}+4\boldsymbol{E})^{-1}$.

【分析】 想办法凑出矩阵 $\boldsymbol{X}$，使$(\boldsymbol{A}+4\boldsymbol{E})\boldsymbol{X}=\boldsymbol{E}$，则 $\boldsymbol{X}=(\boldsymbol{A}+4\boldsymbol{E})^{-1}$.

已知 $\boldsymbol{A}^2+2\boldsymbol{A}-3\boldsymbol{E}=\boldsymbol{O}$，可以和代数式子 $x^2+2x-3=0$ 对照，将 x^2+2x-

3 凑成$(x+4)(x-2)$.

【注】 主要凑出 x 的二次、一次项的系数，对应就有$(\boldsymbol{A}+4\boldsymbol{E})(\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E})$.

【解】 $\boldsymbol{A}^2+2\boldsymbol{A}-3\boldsymbol{E}=\boldsymbol{O}\Rightarrow(\boldsymbol{A}+4\boldsymbol{E})(\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E})=-5\boldsymbol{E}$

$$\Rightarrow(\boldsymbol{A}+4\boldsymbol{E})\left(\frac{2}{5}\boldsymbol{E}-\frac{1}{5}\boldsymbol{A}\right)=\boldsymbol{E}$$

所以，$(\boldsymbol{A}+4\boldsymbol{E})^{-1}=\dfrac{2}{5}\boldsymbol{E}-\dfrac{1}{5}\boldsymbol{A}$.

【例 2】 $\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$ 均为三阶阵，$\boldsymbol{E}$ 是三阶单位阵. 已知 $\boldsymbol{AB}=2\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}$，$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}2&0&2\\0&4&0\\2&0&2\end{pmatrix}$，则$(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})^{-1}=$ ________.

【分析】 将 $\boldsymbol{AB}=2\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}$ 和 $xy-2x-y=0\Rightarrow(x-1)(y-2)=2$ 对照. 所以，由 $\boldsymbol{AB}=2\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}\Rightarrow(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})(\boldsymbol{B}-2\boldsymbol{E})=2\boldsymbol{E}\Rightarrow(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})\left(\dfrac{1}{2}\boldsymbol{B}-\boldsymbol{E}\right)=\boldsymbol{E}$. 所以

$$(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})^{-1}=\frac{1}{2}\boldsymbol{B}-\boldsymbol{E}=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{pmatrix}$$

(2) 利用分块矩阵.

【例 3】 设 $\boldsymbol{A}=\dfrac{1}{5}\begin{pmatrix}0&0&1&0\\0&2&0&0\\3&0&0&0\\0&0&0&4\end{pmatrix}$，求 $\boldsymbol{A}^{-1}$.

【解】 $$\boldsymbol{A}=\frac{1}{5}\left(\begin{array}{ccc:c}0&0&1&0\\0&2&0&0\\3&0&0&0\\\hdashline 0&0&0&4\end{array}\right)=\frac{1}{5}\begin{pmatrix}\boldsymbol{C}&\boldsymbol{O}\\\boldsymbol{O}&\boldsymbol{D}\end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{A}^{-1}=5\begin{pmatrix}\boldsymbol{C}^{-1}&\boldsymbol{O}\\\boldsymbol{O}&\boldsymbol{D}^{-1}\end{pmatrix}=5\begin{pmatrix}0&0&\frac{1}{3}&0\\0&\frac{1}{2}&0&0\\1&0&0&0\\0&0&0&\frac{1}{4}\end{pmatrix}$$

【注】 $$\begin{pmatrix}a_1&&\\&\ddots&\\&&a_n\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix}a_1^{-1}&&\\&\ddots&\\&&a_n^{-1}\end{pmatrix};\quad\begin{pmatrix}&&a_1\\&\iddots&\\a_n&&\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix}&&a_n^{-1}\\&\iddots&\\a_1^{-1}&&\end{pmatrix}.$$

【例4】 (94.3)设$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 0 & a_1 & & & \\ & & a_2 & & \\ \vdots & & & \ddots & \\ & & & & a_{n-1} \\ a_n & \cdots & & & 0 \end{pmatrix}$,其中$a_i\neq 0$,$i=1,2,\cdots,n$,求$\boldsymbol{A}^{-1}$.

【解】

$$\boldsymbol{A}^{-1}=\left(\begin{array}{c:cccc} 0 & a_1 & & & \\ & & a_2 & & \\ \vdots & & & \ddots & \\ & & & & a_{n-1} \\ \hdashline a_n & \cdots & & & 0 \end{array}\right)^{-1}=\begin{pmatrix} \boldsymbol{O} & \boldsymbol{B} \\ \boldsymbol{C} & \boldsymbol{O} \end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix} \boldsymbol{O} & \boldsymbol{C}^{-1} \\ \boldsymbol{B}^{-1} & \boldsymbol{O} \end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{B}^{-1}=\begin{pmatrix} a_1^{-1} & & & \\ & a_2^{-1} & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_{n-1}^{-1} \end{pmatrix},\quad \boldsymbol{C}^{-1}=a_n^{-1}$$

所以

$$\boldsymbol{A}^{-1}=\begin{pmatrix} 0 & \cdots & & a_n^{-1} \\ a_1^{-1} & & & \\ \vdots & a_2^{-1} & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & \\ 0 & \cdots & a_{n-1}^{-1} & 0 \end{pmatrix}$$

(3) 利用初等变换:

$$(\boldsymbol{A}\,\vdots\,\boldsymbol{E})\xrightarrow{\text{行初等变换}}(\boldsymbol{E}\,\vdots\,\boldsymbol{A}^{-1})$$

(4) 利用伴随矩阵$\boldsymbol{A}^*$(见第3章).

二、求方阵A的高次幂

(1) 利用递推法.

【例5】 已知$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}(b_1,b_2,b_3)$,证明:$\boldsymbol{A}^2=l\boldsymbol{A}$,并求$\boldsymbol{A}^n$($n$为正整数).

【解】 $\boldsymbol{A}^2=\left[\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}(b_1,b_2,b_3)\right]\left[\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}(b_1,b_2,b_3)\right]$ (根据矩阵乘法的结合律)

$$=\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{pmatrix}\left[(b_1,b_2,b_3)\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{pmatrix}\right](b_1,b_2,b_3)$$

记 $l=(b_1,b_2,b_3)\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{pmatrix}=a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3$，得

$$\boldsymbol{A}^2=l\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{pmatrix}(b_1,b_2,b_3)=l\boldsymbol{A}$$

根据上述结论，$\boldsymbol{A}^3=\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{A}=l\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}=l\boldsymbol{A}^2$，很容易用归纳法得出 $\boldsymbol{A}^n=l^{n-1}\boldsymbol{A}$.

【例 6】 (99.3) 设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&2&0\\1&0&1\end{pmatrix}$，而 $n\geqslant 2$ 为正整数，则 $\boldsymbol{A}^n-2\boldsymbol{A}^{n-1}=$ ________.

【分析】 $\boldsymbol{A}^n-2\boldsymbol{A}^{n-1}=(\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E})\boldsymbol{A}^{n-1}$，其中

$$\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E}=\begin{pmatrix}-1&0&1\\0&0&0\\1&0&-1\end{pmatrix},\quad(\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E})\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}-1&0&1\\0&0&0\\1&0&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&1\\0&2&0\\1&0&1\end{pmatrix}=\boldsymbol{O}$$

故 $\boldsymbol{A}^n-2\boldsymbol{A}^{n-1}=\boldsymbol{O}$.

(2) 将 $\boldsymbol{A}$ 分解成 $\boldsymbol{A}=\lambda\boldsymbol{E}+\boldsymbol{B}$，其中 $\boldsymbol{B}$ 的高次幂容易计算.

【例 7】 设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}\lambda&1&0\\0&\lambda&1\\0&0&\lambda\end{pmatrix}$，求 $\boldsymbol{A}^n$.

【解】 $\boldsymbol{A}=\lambda\boldsymbol{E}+\boldsymbol{B}$，其中

$$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}$$

利用二项展开式，有

$$\boldsymbol{A}^n=(\lambda\boldsymbol{E}+\boldsymbol{B})^n=\sum_{i=0}^{n}C_n^i(\lambda\boldsymbol{E})^i\boldsymbol{B}^{n-i}$$

而

$$\boldsymbol{B}^2=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix},\quad\boldsymbol{B}^3=\boldsymbol{B}^4=\cdots=\boldsymbol{O},\quad(\lambda\boldsymbol{E})^n=\lambda^n\boldsymbol{E}$$

所以

$$A^n = C_n^{n-2}\lambda^{n-2}B^2 + C_n^{n-1}\lambda^{n-1}B + \lambda^n E = \begin{pmatrix} \lambda^n & n\lambda^{n-1} & \frac{n(n-1)}{2}\lambda^{n-2} \\ 0 & \lambda^n & n\lambda^{n-1} \\ 0 & 0 & \lambda^n \end{pmatrix}$$

（3）利用分块矩阵：若 $A = \begin{pmatrix} B & O \\ O & C \end{pmatrix}$，则 $A^n = \begin{pmatrix} B^n & O \\ O & C^n \end{pmatrix}$.

【例 8】 设 $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$，求 A^n（n 为大于 2 的正整数）.

【解】 将 A 分块为 $A = \begin{pmatrix} B & O \\ O & C \end{pmatrix}$，其中 $B = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$，$C = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. 因

$$B^n = \begin{pmatrix} 3^n & 0 \\ 0 & 4^n \end{pmatrix}, \quad C^2 = C^3 = \cdots = O$$

所以

$$A^n = \begin{pmatrix} B^n & O \\ O & C^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3^n & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4^n & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

（4）利用矩阵乘法的结合律.

① 如果 $A = P\Lambda P^{-1}$，其中 Λ^n 很容易计算，如 $\Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}$，则有

$$A^n = (P\Lambda P^{-1})(P\Lambda P^{-1})\cdots(P\Lambda P^{-1}) = P\Lambda(P^{-1}P)\Lambda(P^{-1}\cdots P)\Lambda P^{-1} = P\Lambda^n P^{-1}$$

【例 9】 已知 $AP = PB$，其中 $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$，$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$，求 A，A^5，A^n.

【解】 可求得

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ -4 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A = PBP^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ -4 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 6 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

又 $\boldsymbol{A}^5=\boldsymbol{PB}^5\boldsymbol{P}^{-1}$，又 $\boldsymbol{B}^5=\boldsymbol{B}$，所以 $\boldsymbol{A}^5=\boldsymbol{PBP}^{-1}=\boldsymbol{A}$，同理 $\boldsymbol{A}^n=\boldsymbol{A}$.

【注】 给定一个矩阵 $\boldsymbol{A}$，如何找到对角阵 $\boldsymbol{\Lambda}$ 以及可逆阵 $\boldsymbol{P}$，使 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{P\Lambda P}^{-1}$，在第 5 章讨论.

② 如果 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{\alpha\beta}^{\mathrm{T}}$，其中 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}$ 都是列向量(只有一列的矩阵)，则 $\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}=l$ 是一个数，且

$$\boldsymbol{A}^n=\boldsymbol{\alpha\beta}^{\mathrm{T}}\cdot\boldsymbol{\alpha\beta}^{\mathrm{T}}\cdots\boldsymbol{\alpha\beta}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{\alpha}(\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha})\cdots(\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha})\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}=l^n(\boldsymbol{\alpha\beta}^{\mathrm{T}})=l^n\boldsymbol{A}$$

此为【例 5】的一般情形.

【例 10】 (94.1)已知 $\boldsymbol{\alpha}=\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{\beta}=\begin{pmatrix}1\\\frac{1}{2}\\\frac{1}{3}\end{pmatrix}$，设 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{\alpha\beta}^{\mathrm{T}}$，则 $\boldsymbol{A}^n=$ ________.

【分析】 $\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}=\left(1,\frac{1}{2},\frac{1}{3}\right)\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}=3$，则

$$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{\alpha\beta}^{\mathrm{T}}=\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}\left(1,\frac{1}{2},\frac{1}{3}\right)=\begin{pmatrix}1&\frac{1}{2}&\frac{1}{3}\\2&1&\frac{2}{3}\\3&\frac{3}{2}&1\end{pmatrix}$$

于是

$$\boldsymbol{A}^n=\boldsymbol{\alpha}(\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha})\cdots(\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha})\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}=3^{n-1}\boldsymbol{\alpha\beta}^{\mathrm{T}}=3^{n-1}\begin{pmatrix}1&\frac{1}{2}&\frac{1}{3}\\2&1&\frac{2}{3}\\3&\frac{3}{2}&1\end{pmatrix}$$

三、初等矩阵的乘法

初等矩阵的乘法基本上都是转换为初等变换，初等矩阵左乘 $\boldsymbol{A}$，相当于对 $\boldsymbol{A}$ 作初等行变换，右乘 $\boldsymbol{A}$，相当于对 $\boldsymbol{A}$ 作初等列变换.

【例 11】 计算 $\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}^{2007}\begin{pmatrix}1&2&3\\4&5&6\\7&8&9\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{pmatrix}^{2008}$.

【解】 $\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}$ 为交换第一、二两行的初等矩阵；$\begin{pmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{pmatrix}$ 为交换第一、