21世纪高等学校系列规划教材

线性代数

刘光旭　苏钰晴　编著

Linear Algebra

清华大学出版社
http://www.tup.com.cn
北京交通大学出版社
http://www.bjtup.com.cn

21世纪高等学校系列规划教材

线性代数

刘光旭　苏钰晴　编著

清华大学出版社
北京交通大学出版社
·北京·

内容简介

本书内容分为预备知识、行列式、矩阵及其运算、一般线性方程组的求解、向量组的线性相关性、线性空间、线性变换和二次型。系统讲授了线性代数的基本概念、基本理论和基本方法，并注意介绍线性代数与解析几何、微积分等知识的联系。各章均配有习题，在书末的附录A中给出习题的解法提示，便于读者的自学。

本书在写法上，充分考虑到不同专业的教学要求。例如：教学时数在34～40学时的专业，可只讲授本书的第0章到第4章以及第7章；教学时数为54学时左右的专业，则可增讲本书的第5章和第6章。在写作风格上，前者更注意与中学数学的联系和对已有知识的提升。

图书在版编目（CIP）数据

线性代数／刘光旭，苏钰晴编著．—北京：北京交通大学出版社：清华大学出版社，2014.3

（21世纪高等学校系列规划教材）

ISBN 978－7－5121－1870－6

Ⅰ．①线…　Ⅱ．①刘…　②苏…　Ⅲ．①线性代数－高等学校－教材　Ⅳ．①O151.2

中国版本图书馆CIP数据核字（2014）第053032号

责任编辑：张利军　　特邀编辑：黎　黎

出版发行：清华大学出版社　　邮编：100084　　电话：010－62776969　　http://www.tup.com.cn
　　　　　北京交通大学出版社　　邮编：100044　　电话：010－51686414　　http://www.bjtup.com.cn

印 刷 者：北京泽宇印刷有限公司

经　　销：全国新华书店

开　　本：185×260　　印张：15.75　　字数：393千字

版　　次：2014年4月第1版　　2014年4月第1次印刷

书　　号：ISBN 978－7－5121－1870－6/O·133

印　　数：1～3 000册　　定价：28.00元

本书如有质量问题，请向北京交通大学出版社质监组反映。对您的意见和批评，我们表示欢迎和感谢。
投诉电话：010－51686043，51686008；传真：010－62225406；E-mail：press@bjtu.edu.cn。

前 言

深入浅出地讲清楚线性代数的基本思想、基本理论和基本方法是作者的初衷。突出重点，夯实基础，易教易学，让读者通过本书的学习享受到数学之美，并获得严格证明的数学素质的培养则是我们的愿望。

笔者曾在 1985 年前后讲授过非数学专业的“线性代数”课程多年，并出版了相应的教材。近十多年来，多媒体教学普遍走进课堂，不仅提高、丰富了课堂讲授的信息量，而且还为远程授课提供了极大的方便。最近，笔者采用多媒体教学手段重新讲授了这门课。根据教学的需要，我们在原有教材、讲稿和多年教学经验的基础上编写成了此书。

线性代数的第一块基石（这里指的是二元、三元及四元、五元线性方程组的解法），早在两千年前，就已出现于我国古代数学名著《九章算术》之中。到了 17 世纪，由于法国数学家费马（Fermat, 1601—1665）和笛卡尔（Descartes, 1596—1650）的研究，线性代数的雏形才得以形成，而其主要理论直到 19 世纪才趋于成熟。线性代数的重要性在于大量的理论和应用问题都可以通过“线性化”，或用线性的方法逼近，将其化为线性代数问题得以解决。

本书的内容大致分成两部分。除预备知识外，前 4 章是利用行列式、矩阵和向量组的理论和方法研究线性方程组的求解问题，包括：① 线性方程组何时有解（解的存在性）？② 若有解，解是否唯一（解的唯一性）？如何求此唯一解？③ 若解不唯一，如何表示出所有的解？第 5、6 章是以矩阵的运算和各种等价关系（如相似、合同、正交相似等）为主线，重点讲授线性空间及其线性变换的理论、计算和应用（如秩、基、维数、过渡矩阵、坐标变换公式、特征值、特征向量、矩阵的对角化等）。最后一章则是研究如何把一个比较复杂的二次型化为比较简单的只含有平方项的二次型（称为标准形），从而便于我们对二次型进行分类，并易于讨论二次型的性质。

整个线性代数的内容是抽象的，但当我们密切联系解析几何与微积分的内容时，则变得十分生动、有趣。书中提到的应用极广的柯西–施瓦茨（Cauchy-Schwarz）不等式，以及关于矩阵的华罗庚等式等也都曾引起学生的学习兴趣。

由于教学层次和教学要求各有不同，对于某些专业，如果给予线性代数课的讲授学时较少，教师可以只讲授预备知识及第 1、2、3、4、7 章的内容。笔者考虑到这一教学实际情况和不同的教学要求，在写作风格上也有意与第 5、6 章的写法稍有区别。

为了便于学习，各章均配有习题，并在书后附有习题参考答案和提示。

本书除署名编者外，书稿的核对工作是由南开大学数学学院的牛景瑞、花芸和元志林三位学生完成的。此外，蔡香菊、刘思、李淑兰和吕奕博老师都为本书的顺利完稿付出了辛勤的劳动。在此谨对他们表示衷心的感谢。特别应该感谢的是南开大学现代远程教育学院的滕

欣莲主任和南开大学数学学院高等数学教学办公室的薛锋主任。他们多年来一直对笔者关心照顾、支持和帮助。他们的敬业精神堪称楷模。

刘光旭
于南开大学数学学院
2014 年 4 月

目　录

第 0 章　预备知识……（1）
习题 0……（15）

第 1 章　行列式……（16）
§1.1　问题的提出……（16）
§1.2　行列式的定义……（18）
§1.3　行列式的性质……（26）
§1.4　行列式按行（列）展开……（33）
§1.5　克拉默法则……（41）
习题 1……（48）

第 2 章　矩阵及其运算……（51）
§2.1　矩阵的概念……（51）
§2.2　几个特殊的矩阵……（53）
§2.3　矩阵的线性运算……（55）
§2.4　矩阵的乘法……（57）
§2.5　逆矩阵……（63）
§2.6　矩阵的分块……（69）
习题 2……（79）

第 3 章　一般线性方程组的求解……（83）
§3.1　矩阵的初等变换与秩……（83）
§3.2　一般线性方程组的求解……（94）
习题 3……（103）

第 4 章　向量组的线性相关性……（107）
§4.1　向量组及其线性组合……（107）
§4.2　向量组的线性相关性……（112）
§4.3　向量组的秩……（115）
§4.4　线性方程组的解的结构……（117）
习题 4……（125）

第 5 章　线性空间 ……（130）
§5.1　线性空间的概念 ……（130）
§5.2　子空间的概念 ……（133）
§5.3　n 维线性空间 ……（136）
§5.4　线性空间的同构 ……（145）
习题 5 ……（147）

第 6 章　线性变换 ……（150）
§6.1　线性变换与线性变换的矩阵 ……（150）
§6.2　矩阵的对角化 ……（161）
习题 6 ……（186）

第 7 章　二次型 ……（190）
§7.1　实二次型与矩阵的合同 ……（190）
§7.2　化二次型为标准形 ……（196）
§7.3　正定二次型简介 ……（206）
习题 7 ……（211）

附录 A　习题参考答案与提示 ……（213）

参考文献 ……（243）

第 0 章

预备知识

为便于学习本课程，我们先介绍几个与线性代数相关的常用数学符号、概念、方法和结论. 这些内容大部分以某种形式包括在空间解析几何课程中，这里只作引用，一般不再给出证明.

一、常用数学符号

1. 集合符号

$\mathbf{N}_+$——全体正整数的集合.

$\mathbf{N}$——全体自然数的集合.

$\mathbf{Z}$——全体整数的集合.

$\mathbf{Q}$——全体有理数的集合.

$\mathbf{R}$——全体实数的集合.

$\mathbf{C}$——全体复数的集合.

显然有 $\mathbf{N}_+ \subset \mathbf{N} \subset \mathbf{Z} \subset \mathbf{Q} \subset \mathbf{R} \subset \mathbf{C}$. 数的扩充与运算有关，其中加、减、乘、除四则运算不仅是最基本的代数运算，而且具有许多实用的运算律. 在某种意义上说，代数学的基本思想就是设法有效地运用运算律去探究各种类型的代数问题的求解.

设 F 是复数集 $\mathbf{C}$ 的一个子集, 如果它满足以下两个条件，则称 F 为一个**数域**.

（1） $0, 1 \in F$（或者至少 $1 \in F$）.

（2）对任意 $a, b \in F$ ，都有 $a \pm b, ab \in F$ ，并且当 $b \neq 0$ 时，有 $\frac{a}{b} \in F$.

上述性质（2）称为数域 F 对于加、减、乘、除四种运算**封闭**. 显然，集合 $\mathbf{Q}$、$\mathbf{R}$、$\mathbf{C}$ 对加、减、乘、除四种运算是封闭的，它们分别称为**有理数域**、**实数域**、**复数域**. 而集合 $\mathbf{N}_+$, $\mathbf{N}$, $\mathbf{Z}$ 则不是数域. 利用运算律可以简化计算，而且以后所有代数系统的研究都是以数域的运算律为基础的. 通常用 F 泛指一般的数域. 在不作特殊声明的情况下，本书常用的数域皆指实数域 $\mathbf{R}$.

2. 阶乘符号、双阶乘符号

设 $n \in \mathbf{N}$, n 的阶乘 $n! = n \cdot (n-1) \cdot \cdots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$, 规定 $0! = 1$.

设 $n \in \mathbf{N}$, n 的双阶乘

$$n!! = \begin{cases} (2k)!! = (2k) \cdot (2k-2) \cdot \cdots \cdot 6 \cdot 4 \cdot 2, & \text{当 } n = 2k, \\ (2k-1)!! = (2k-1) \cdot (2k-3) \cdot \cdots \cdot 5 \cdot 3 \cdot 1, & \text{当 } n = 2k-1. \end{cases}$$

例如， $6!! = 6 \cdot 4 \cdot 2 = 48, 7!! = 7 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 1 = 105.$

3. 连加符号 $\sum$

为书写与运算简便，我们引进连加符号 $\sum$（这是个大写希腊字母，读作“西格玛”）来表示若干个数的和，即

$$\sum_{i=1}^{n} a_i = a_1 + a_2 + \cdots + a_n ,$$

$$\sum_{i=1}^{\infty} a_i = a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \cdots$$

其中 $\sum$ 表示求和，如

$$\sum_{i=1}^{n} i^2 = 1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 ,$$

其中 i 称为**求和指标**，它只起辅助作用，因为把 $\sum_{i=1}^{n} i^2$ 还原成 n 个数的平方和，i 不再出现，所以 $1^2 + 2^2 + \cdots + n^2$ 也可记作 $\sum_{k=1}^{n} k^2$，因此**求和指标是可以任意选择的**. 又如，要计算序列

$$b_1,\ b_2,\ \cdots,\ b_p,\ \cdots,\ b_q,\ \cdots$$

中从第 p 项到第 q 项之和，则可记为

$$\sum_{i=p}^{q} b_i \text{ 或 } \sum_{p \leqslant i \leqslant q} b_i .$$

容易证明连加符号 $\sum_{i=1}^{n}$ 有以下 3 个简单性质.

（1）$\sum_{i=1}^{n} (a_i + b_i) = \sum_{i=1}^{n} a_i + \sum_{i=1}^{n} b_i$.

（2）对任意常数 c 有 $\sum_{i=1}^{n} c\, a_i = c\left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right)$.

（3）$\sum_{i=1}^{n} a_i = \sum_{i=1}^{k} a_i + \sum_{i=k+1}^{n} a_i$，$1 \leqslant k < n$.

注 对同一个和式，有时因运算的需要，可以采用不同的表示方式，如

$$\sum_{i=0}^{n-1} a_{i+1} = \sum_{i=1}^{n} a_i , \quad \sum_{i=2}^{n+1} a_{i-1} = \sum_{i=1}^{n} a_i .$$

在本书中，有时还要采用双重连加符号. 设有 mn 个 a_{ij} ($i = 1, 2, \cdots, m$; $j = 1, 2, \cdots, n$)，其和记为

$$\begin{aligned} S = {} & a_{11} + a_{12} + \cdots + a_{1n} + \\ & a_{21} + a_{22} + \cdots + a_{2n} + \\ & \cdots + \\ & a_{m1} + a_{m2} + \cdots + a_{mn} . \end{aligned}$$

利用连加符号可将 S 写为

$$S=\sum_{j=1}^{n} a_{1j}+\sum_{j=1}^{n} a_{2j}+\cdots+\sum_{j=1}^{n} a_{mj}$$
$$=\sum_{i=1}^{m}\left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\right),$$

或简记为

$$S=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}.$$

当然，在求 S 的过程中，我们也可以先对第 1 个下标 i 相加，然后再对第 2 个下标 j 求和. 于是有

$$S=\sum_{i=1}^{m} a_{i1}+\sum_{i=1}^{m} a_{i2}+\cdots+\sum_{i=1}^{m} a_{in}$$
$$=\sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{m} a_{ij}\right)$$
$$=\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m} a_{ij}.$$

比较两种次序求和方式便可得到如下等式

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}=\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m} a_{ij}.$$

这表示：用**双重连加符号求和时，指标 i, j 的次序可以交换**.

例 1 试证对和式

$$\begin{aligned}S=\;&c_{21}+\\&c_{31}+c_{32}+\\&c_{41}+c_{42}+c_{43}+\\&\cdots+\\&c_{n1}+c_{n2}+c_{n3}+\cdots+c_{n\,n-1}\end{aligned}$$

有性质

$$\sum_{i=2}^{n}\sum_{k=1}^{i-1} c_{ik}=\sum_{k=1}^{n-1}\sum_{i=k+1}^{n} c_{ik}.$$

证 若对第 1 个下标写出和式得

$$S=\sum_{k=1}^{1} c_{2k}+\sum_{k=1}^{2} c_{3k}+\cdots+\sum_{k=1}^{n-1} c_{nk}$$
$$=\sum_{i=2}^{n}\sum_{k=1}^{i-1} c_{ik}.$$

若对第 2 个下标写出和式则得

$$S=\sum_{i=2}^{n} c_{i1}+\sum_{i=3}^{n} c_{i2}+\cdots+\sum_{i=n}^{n} c_{i\,n-1}$$
$$=\sum_{k=1}^{n-1}\sum_{i=k+1}^{n} c_{ik}.$$

比较两种求和方式便有

$$\sum_{i=2}^{n}\sum_{k=1}^{i-1} c_{ik} = \sum_{k=1}^{n-1}\sum_{i=k+1}^{n} c_{ik}.$$

某 n 个数的和与另 m 个数的和之积也可以用双重连加符号表示，即

$$(a_1+a_2+\cdots+a_n)(b_1+b_2+\cdots+b_m) = \sum_{i=1}^{n}a_i\sum_{j=1}^{m}b_j.$$

利用分配律和交换律，又有

$$\sum_{i=1}^{n}a_i\sum_{j=1}^{m}b_j = \sum_{i=1}^{n}\left(a_i\sum_{j=1}^{m}b_j\right) = \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{m}a_ib_j\right) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}a_ib_j,$$

$$\sum_{i=1}^{n}a_i\sum_{j=1}^{m}b_j = \sum_{j=1}^{m}\left[\left(\sum_{i=1}^{n}a_i\right)b_j\right] = \sum_{j=1}^{m}\left(\sum_{i=1}^{n}a_ib_j\right) = \sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{n}a_ib_j.$$

其中 $\sum\limits_{j=1}^{m}a_ib_j$ 是对指标 j 求和，此时指标 i 固定，因而

$$\sum_{j=1}^{m}a_ib_j = a_i\sum_{j=1}^{m}b_j.$$

4. 连乘符号 $\prod$

现在我们介绍连乘符号 $\prod$，用来表示若干个数的连乘，即

$$\prod_{k=1}^{n}a_k = a_1\cdot a_2\cdot a_3\cdot\cdots\cdot a_n,$$

$$\prod_{n=1}^{\infty}a_n = a_1\cdot a_2\cdot a_3\cdot\cdots\cdot a_n\cdot\cdots$$

其中 $a_2\cdot a_3$ 表示数 a_2 与数 a_3 相乘. 在不会产生混淆的情况下，$a_2\cdot a_3$ 中间的“ $\cdot$ ”也可以省略. 显然，$n!$ 可以表示为 $n! = \prod\limits_{k=1}^{n}k$.

有时可能用到一些别的表示方式. 例如用

$$\prod_{1\leqslant i<j\leqslant n}(a_j-a_i)$$

表示所有 $i<j$ 的（a_j-a_i）因子的乘积，即

$$\begin{aligned}&\prod_{1\leqslant i<j\leqslant n}(a_j-a_i)=\\&(a_2-a_1)(a_3-a_1)\cdots(a_n-a_1)\times\\&(a_3-a_2)\cdots(a_n-a_2)\times\\&\cdots\times\\&(a_n-a_{n-1})\end{aligned}$$

为 $\frac{1}{2}n(n-1)$ 个因式之积.

5. 克罗内克符号 δ_{ij}

$\delta_{ij}=\begin{cases}1 & i=j\\ 0 & i\neq j\end{cases}$ 称为**克罗内克**（Kronecker，1823—1891，德国）符号.

二、归纳定义（归纳构造法）

定义一个与自然数 n 有关的量 $f(n)$，如果 $f(n)$ 是用 $f(k)\ (k<n)$ 来表示，这种定义方法称为**归纳构造法**.

例如，给定一个数 a，a 的正整数方幂的定义为

$$a^1=a,\quad a^n=a^{n-1}\cdot a,$$

就是归纳定义的. 类似地，等比数列

$$a_1=a,\quad a_n=a_{n-1}\cdot q\ （其中\ q\ 是公比），$$

也是归纳定义的. 又如斐波那契数列

$$u_1=1,\ u_2=1,\ u_n=u_{n-1}+u_{n-2},\quad n=3,4,\cdots$$

也是归纳定义的.

三、数学归纳法

数学归纳法是用来论证数学命题的一种常用的方法.

用数学归纳法来论证数学命题，一般分两步来做：首先证明命题对 $n=1$ 正确，这一步叫**归纳基础**; 第二步，假设命题对正整数 $n=k$ 正确（不必证明，只是逻辑上的假设），从这一假设（又称**归纳假设**）出发，证明命题对 $n=k+1$ 也正确. 这时便完成了命题的证明.

例 2 用数学归纳法证明下列公式对一切正整数 n 都成立.

$$1+2+3+\cdots+n=\frac{1}{2}n(n+1).\tag{1}$$

证 $n=1$ 时，式（1）的左边 $=1$，右边 $=\frac{1}{2}\times1\times(1+1)=1$. 因此式（1）成立. 现假设 $n=k$ 时式（1）成立，即

$$1+2+3+\cdots+k=\frac{1}{2}k(k+1).$$

当 $n=k+1$ 时，$1+2+3+\cdots+k+(k+1)=(1+2+3+\cdots+k)+(k+1)$. 由假设 $1+2+3+\cdots+k=\frac{1}{2}k(k+1)$，因此

$$\begin{aligned}1+2+3+\cdots+k+(k+1)&=\frac{1}{2}k(k+1)+(k+1)\\&=\frac{1}{2}(k+1)(k+2)\\&=\frac{1}{2}(k+1)[(k+1)+1]\end{aligned}$$

即当 $n=k+1$ 时，式（1）也成立，因而命题得证.

如果我们把式（1）的左端记为 $S_{1(n)}$ ，请读者用数学归纳法进一步证明如下公式

$$S_{2(n)}=1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}. \tag{2}$$

在我们证明了式（2）之后，读者可能会问：式（2）是如何发现的？数学中的猜想有时是靠观察和直觉, 有时是靠猜测和灵感产生的，有时则是通过归纳和联想形成某些推断. 归纳是由个别（或特殊）去发现一般. 有些人就是用如下方法发现式（2）的

$$1^2=1, 1^2+2^2=5, 1^2+2^2+3^2=14,$$
$$1^2+2^2+3^2+4^2=30, \cdots$$

如果我们多算几项并列成下表

n	1	2	3	4	5	6	7	8
$S_{1(n)}$	1	3	6	10	15	21	28	36
$S_{2(n)}$	1	5	14	30	55	91	140	204
$\frac{S_{2(n)}}{S_{1(n)}}$	1	$\frac{5}{3}$	$\frac{7}{3}$	$\frac{9}{3}$	$\frac{11}{3}$	$\frac{13}{3}$	$\frac{15}{3}$	$\frac{17}{3}$

似乎可以看出有下面的规律

$$\frac{S_{2(n)}}{S_{1(n)}}=\frac{2n+1}{3},$$

从而得到

$$S_{2(n)}=\frac{2n+1}{3}S_{1(n)}=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

$S_{2(n)}$ 知道了，能否利用归纳、类比的方法分析出 $S_{3(n)}$ 等于多少呢？先作如下观察

$$1^3=1,\quad 1^3+2^3=9,\quad 1^3+2^3+3^3=36,$$
$$1^3+2^3+3^3+4^3=100,$$

似乎有如下规律

$$S_{3(n)}=[S_{1(n)}]^2. \tag{3}$$

式（3）当 $n=1,2,3,4$ 时都是对的，但不能由此就断定它对一切正整数都对. 下面我们用数学归纳法来证明它的正确性.

设 $n=k$ 时式（3）成立，即有 $S_{3(k)}=[S_{1(k)}]^2$，则当 $n=k+1$ 时，有

$$\begin{aligned}S_{3(k+1)}&=S_{3(k)}+(k+1)^3=[S_{1(k)}]^2+(k+1)^3\\&=\frac{k^2(k+1)^2}{4}+(k+1)^3\\&=\frac{1}{4}(k+1)^2[k^2+4(k+1)]\\&=\frac{1}{4}(k+1)^2\ (k+2)^2\\&=[S_{1(k+1)}]^2.\end{aligned}$$

亦即式（3）当 $n=k+1$ 时仍成立. 由于已知式（3）当 $n=1$ 时成立，故知式（3）对一切正整数均成立.

有时归纳基础可能不从 1 开始，比如可能从 $n=2$ 开始，这时就需要首先论证 $n=2$ 时命题的正确性，然后再假设 $n=k$ 时命题正确，进而证明 $n=k+1$ 时命题也正确. 请看下面的例题.

例 3 试证当 $n\geqslant 3$ 时， $2^n>2n$.

证 这时归纳基础要从 $n=3$ 开始，当 $n=3$ 时 $2^3=8$, 而 $2\times 3=6$, $8>6$, 故有 $2^3>2\times 3$. 即命题对 $n=3$ 成立.

假定 $n=k$ 时有 $2^k>2k$. 然后讨论 $n=k+1$ 时的情形. $2^{k+1}=2\cdot 2^k=2^k+2^k$. 由假定 $2^k>2k$, 因此 $2^k+2^k>2k+2k$. 由于 $k\geqslant 3$ 时 $2k>2$, 故

$$2k+2k>2k+2=2(k+1).$$

于是 $2^{k+1}>2(k+1)$. 命题得证.

注 1 在用归纳法论证的过程中，也可用等价的 **“第二数学归纳法”**,即在归纳基础验证完了以后，假设对小于 k 的每个正整数 n 命题已成立，然后论证 $n=k$ 时命题也成立. 读者在学习本书时，需注意学会两种数学归纳法的使用.

例 4 证明**斐波那契**（Fibonacci，1170—1250，意大利）**数列**

$$u_1=1,\ u_2=1,\ u_n=u_{n-1}+u_{n-2},\quad n=3,4,\cdots$$

（具体写出来即为 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377, …）的通项公式为

$$u_n=\frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right],\quad n=1,2,\cdots.$$

证 直接验算有

$$\begin{aligned}u_1&=\frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)\right]\\&=\frac{1}{\sqrt{5}}\left[\frac{1+\sqrt{5}}{2}-\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right]\\&=1;\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}u_2&=\frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^2\right]\\&=\frac{1}{\sqrt{5}}\left[\frac{3+\sqrt{5}}{2}-\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right]\\&=1;\end{aligned}$$

假设 $n<k$ 时，通项公式成立. 现证明 $n=k$ 时公式成立. 此时

$$\begin{aligned}u_k&=u_{k-1}+u_{k-2}\\&=\frac{1}{\sqrt5}\left[\left(\frac{1+\sqrt5}{2}\right)^{k-1}-\left(\frac{1-\sqrt5}{2}\right)^{k-1}\right]+\frac{1}{\sqrt5}\left[\left(\frac{1+\sqrt5}{2}\right)^{k-2}-\left(\frac{1-\sqrt5}{2}\right)^{k-2}\right]\\&=\frac{1}{\sqrt5}\left[\left(\frac{1+\sqrt5}{2}\right)^{k-2}\left(\frac{1+\sqrt5}{2}+1\right)-\left(\frac{1-\sqrt5}{2}\right)^{k-2}\left(\frac{1-\sqrt5}{2}+1\right)\right]\\&=\frac{1}{\sqrt5}\left[\left(\frac{1+\sqrt5}{2}\right)^{k}-\left(\frac{1-\sqrt5}{2}\right)^{k}\right].\quad\left(\text{利用}\left(\frac{1+\sqrt5}{2}\right)\left(\frac{1-\sqrt5}{2}\right)=-1\right)\end{aligned}$$

即公式成立. 于是斐波那契数列的通项公式对任意正整数都成立.

由例 4, 我们不仅看到斐波那契数列是由归纳构造法顺序定义的, 而且有趣的是: 若用斐波那契数列的前项除以后项所作成的分数数列

$$\frac{1}{1},\ \frac{1}{2},\ \frac{2}{3},\ \frac{3}{5},\ \dots,\ \frac{u_n}{u_{n+1}},\ \dots$$

的极限为**黄金比** $\dfrac{2}{1+\sqrt5}\approx 0.618$.

事实上

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_n}{u_{n+1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{\sqrt5}\left[\left(\frac{1+\sqrt5}{2}\right)^{n}-\left(\frac{1-\sqrt5}{2}\right)^{n}\right]}{\frac{1}{\sqrt5}\left[\left(\frac{1+\sqrt5}{2}\right)^{n+1}-\left(\frac{1-\sqrt5}{2}\right)^{n+1}\right]}$$

$$=\frac{2}{1+\sqrt5}\lim_{n\to\infty}\frac{1-\left(\dfrac{1-\sqrt5}{1+\sqrt5}\right)^{n}}{1-\left(\dfrac{1-\sqrt5}{1+\sqrt5}\right)^{n+1}}$$

$$=\frac{2}{1+\sqrt5}\approx 0.618.$$

黄金比是在理论和应用上很有趣的一个数字, 例如**最简连分数**

$$x=\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cdots}}},$$

可以看作是在 $x=\dfrac{1}{1+x}$ 中把 x 的表达式反复代入等号右端得到的. 而由等式 $x=\dfrac{1}{1+x}$ 推出方程 $x^2+x-1=0$, 其正解就是黄金比 $x=\dfrac{2}{1+\sqrt5}=\dfrac{\sqrt5-1}{2}\approx 0.618$.

注 2 双重数学归纳法. 数学归纳法所证明的命题都是涉及只依赖于一个正整数的数学

性质. 若 $E(m, n)$ 是依赖于两个独立正整数 m, n 的性质. 如果可以对 m 用数学归纳法证明对任何正整数 m，性质 $E(m, 1)$成立. 对任何固定的 m，又可对 n 用数学归纳法证明性质 $E(m, n)$ 对任何正整数 n 成立. 那么性质 $E(m, n)$对一切正整数 m, n 成立（证略）.

四、反证法

反证法是另一种论证数学命题的常用方法. 在论证数学命题时有时从命题的条件直接推导出结论有困难，或者比较复杂时，就往往采用反证法. 所谓反证法就是先假设结论不真，然后一步一步引出矛盾. 产生矛盾的根源是因为否定了结论所致. 也就是说原结论应该是对的.

例 5 设对任意实数 x, y, 有

$$\frac{f(x)+f(y)}{2} \leqslant f\left(\frac{x+y}{2}\right)$$

且 $f(x) \geqslant 0, f(0)=c$，试证 $f(x) \geqslant c$.

证 用反证法. 假设存在点 $x=a$ 使 $f(a)<c$，记

$$h=f(0)-f(a)>0.$$

在给定的不等式中，令 $x=0, y=2a$，有

$$2f(a) \geqslant f(0)+f(2a),$$

即

$$f(2a) \leqslant 2f(a)-f(0)=-2(h-f(0))-f(0)=f(0)-2h.$$

利用归纳法可证得

$$f(na) \leqslant f(0)-nh$$

对任意自然数 n 成立.

由 $h>0$，故知当取适当大的 n 便得 $f(na)<0$. 矛盾！所以有 $f(x) \geqslant c$. 证毕.

注 若令 $y=-x$, 则由题设不等式 $\dfrac{f(x)+f(y)}{2} \leqslant f\left(\dfrac{x+y}{2}\right)$ 及条件 $f(0)=c$ 可推出如下结论

$$2f(0)=2c \geqslant f(x)+f(-x). \tag{3}$$

因为在上例中我们已证明了 $f(x) \geqslant c\ (x \in (-\infty, +\infty))$，所以对实数 $-x$，也应有 $f(-x) \geqslant c$ 成立. 再由上面的结论（3）必有 $f(x)=f(-x)=c$. 因此，我们的例题实际上可以改述如下。

设对任意实数 x, y, 有

$$\frac{f(x)+f(y)}{2} \leqslant f\left(\frac{x+y}{2}\right)$$

且 $f(x) \geqslant 0, f(0)=c$，则必有 $f(x)=c$.

五、*n* 维向量空间

1. 几何向量及其运算

具有大小和方向的量称为向量（或称矢量）. 向量可以用有向线段 $\overrightarrow{AB}$ 来表示，用长度 $|\overrightarrow{AB}|$ 表示向量的大小，其中“ $\rightarrow$ ”表示向量是有方向的量. 向量也常用一个黑体字母来表

示，例如，向量$\boldsymbol{\alpha}$，它的长度用$|\boldsymbol{\alpha}|$表示. 用有向线段表示的向量称为**几何向量**. 两个向量$\boldsymbol{\alpha}$和$\boldsymbol{\beta}$相等，是指它们有相同的大小和方向，记作$\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{\beta}$. 只考虑大小和方向的向量称为**自由向量**. 长度等于 1 的向量称为**单位向量**. 长度为零的向量称为**零向量**，记作 $\mathbf{0}$ 或$\vec{0}$. 与向量$\boldsymbol{\alpha}$的长度相等、方向相反的向量称为$\boldsymbol{\alpha}$的**负向量**，记作 $-\boldsymbol{\alpha}$.

两个向量$\boldsymbol{\alpha}$与$\boldsymbol{\beta}$的和是一个向量，记作$\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}$，它服从平行四边形法则，即$\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}$是由以$\boldsymbol{\alpha}$与$\boldsymbol{\beta}$为邻边组成的平行四边形的对角线. 以实数 k 乘向量$\boldsymbol{\alpha}$的**数量乘积**，记作$k\boldsymbol{\alpha}$. 当$k>0$时，表示向量$\boldsymbol{\alpha}$的长度伸缩k倍，$k\boldsymbol{\alpha}$与$\boldsymbol{\alpha}$同向；当$k<0$时，表示向量$\boldsymbol{\alpha}$的长度伸缩$|k|$倍，$k\boldsymbol{\alpha}$与$\boldsymbol{\alpha}$反向；当$k=0$时，$k\boldsymbol{\alpha}$是零向量.

向量的加法和数量乘法统称为向量的**线性运算**，按定义并利用几何图形容易证明向量的线性运算满足以下 8 条运算规律.

（1）$\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}=\boldsymbol{\beta}+\boldsymbol{\alpha}$（交换律）.

（2）$(\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta})+\boldsymbol{\gamma}=\boldsymbol{\alpha}+(\boldsymbol{\beta}+\boldsymbol{\gamma})$（结合律）.

（3）$\boldsymbol{\alpha}+\mathbf{0}=\mathbf{0}+\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{\alpha}$.

（4）$\boldsymbol{\alpha}+(-\boldsymbol{\alpha})=\mathbf{0}$.

（5）$1\cdot\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{\alpha}$.

（6）$k(l\boldsymbol{\alpha})=(kl)\boldsymbol{\alpha}$（数乘的结合律）.

（7）$(k+l)\boldsymbol{\alpha}=k\boldsymbol{\alpha}+l\boldsymbol{\alpha}$（第一分配律）.

（8）$k(\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta})=k\boldsymbol{\alpha}+k\boldsymbol{\beta}$（第二分配律）.

上述向量的线性运算及其 8 条运算规律构成一组代数化的几何公理体系，它是我们以后要讲到的线性空间的一个具体的几何模型.

在解析几何学中，通过引进坐标系，使得在实数与直线上的点之间；在实数偶与平面上的点之间；以及在实数三元组与空间中的点之间，都建立起一一对应的关系，从而把许多几何问题可以转化为代数问题来研究. 反之，许多代数问题也可以用几何方式作出直观的解释. 当我们在几何空间中引进坐标系后，几何向量的运算就可以化为相应坐标之间的运算. 设在空间中引进直角坐标系$[0;\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}]$，其中$\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}$分别为$x$轴，$y$轴，$z$轴上正向单位向量，称为**基本向量**. 若设空间中任意一点M的（直角）坐标为x,y,z，则点M的**向径**（或称**矢径**）为

$$\boldsymbol{v}=\overrightarrow{OM}=(x,y,z)=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k}.$$

另外，设

$$\boldsymbol{v}_i=(x_i,y_i,z_i)\text{，其中 }x_i,y_i,z_i\in\mathbf{R},\quad i=1,2;\ k\in\mathbf{R},$$

则有

$$\boldsymbol{v}_1+\boldsymbol{v}_2=(x_1+x_2,\ y_1+y_2,\ z_1+z_2),$$
$$k\boldsymbol{v}=k(x,y,z)=(kx,ky,kz).$$

这样，空间中任一向量也有了坐标，并且容易验证上述坐标向量的线性运算也满足前面的 8 条运算规律.

在中学已学过两个几何向量$\boldsymbol{\alpha}$与$\boldsymbol{\beta}$的**内积**（也称**数量积**），内积是一个实数，记为$\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{\beta}$，并规定

$$\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{\beta}=|\boldsymbol{\alpha}||\boldsymbol{\beta}|\cos\theta,\quad 0\leqslant\theta\leqslant\pi,$$

其中θ是$\boldsymbol{\alpha}$与$\boldsymbol{\beta}$的夹角. 由此可知，向量$\boldsymbol{\alpha}$的长度$|\boldsymbol{\alpha}|=\sqrt{\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{\alpha}}$，当$\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{\beta}=0$时，$\boldsymbol{\alpha}$与$\boldsymbol{\beta}$是正