运筹学的思想在生产上的早期尝试是用科学的方法进行生产组织中的管理活动，其产生的背景是工业革命。由于工业革命的发生，组织的规模和复杂性发生了显著的增长，早期的小工业作坊逐渐演变为现在拥有巨资的大公司(生产组织)。组织内部劳动分工日益增多，管理职能的分割越来越细。这种变革给组织带来了巨大的效益，但是日益增长的部门专门化也带来了一些新的问题，甚至这些问题中的一部分仍出现在现在的许多组织中。其中之一就是，组织中的许多部门有形成相对独立组织的倾向。它们逐渐形成了自己的目标和价值体系，它们的运作和目标有时不再与组织的全局发展目标相吻合。往往对组织中某个部门最为有利的活动可能会影响组织中另一个部门的利益，于是部门间无法进行协调。与此相关的一个问题是随着组织中复杂性和专门化的增加，如何将各种活动可获得的资源以一种对组织全局发展最为有效的方式来使用变得愈发困难。以上这些问题的出现和寻找有效解决办法的需要，为运筹学思想的生产和应用提供了有利的环境。

二、运筹学的起源

运筹学一词最早出现在第二次世界大战早期的军事运筹活动中。出于战争的需要，军队迫切需要找到一种能将稀缺资源在军队中进行有效分配的途径。为此，英美两国的军事管理部门召集了大批科学家运用科学方法来解决物资分配和其他一些战略战术问题。这批科学家队伍就是最早的运筹学小组(OR 小组)，它的任务是进行“作战研究(research on operations)”。通过采用有效使用雷达的方法，OR 小组辅助英军取得了空中战斗的胜利；OR 小组通过对如何更好地管理护航队和开展反潜艇作战的研究，在英军取得北大西洋战斗的胜利中扮演了重要角色，同时也在太平洋岛屿战役中为英军的胜利起到了积极作用。

三、运筹学的发展

第二次世界大战结束后，运筹学在军事上的成功应用引起了人们广泛的关注，继而引发了它在军事以外领域的应用。随着战后工业的逐渐复苏，生产组织中与日俱增的复杂性和专门化所带来的问题再次引起了人们的关注。越来越多的人们，包括那些曾在“二战”期间 OR 小组工作过的商务顾问，清楚地意识到这些问题虽然在内容上与军事管理不同，但本质上却是基本一致的。到 20 世纪 50 年代早期，这些人已经把运筹学的应用带到了商业、工业、政府部门等组织中，运筹学从此迅速传播开来。

在运筹学的早期发展过程中，许多学者在理论上为运筹学的发展作出过重要贡献。丹麦工程师爱尔朗于 1917 年在研究哥本哈根电话通信系统时，提出了排队论的一些著名公式。1939 年苏联数学家康托洛维奇(Канторович)在研究铁路运输的组织问题、工业生产的管理问题时提出了线性规划的数学模型。1947 年，美国学者丹西格(G. B. Dantzig)提出了线性规划问题的有效解法——单纯形方法。1944 年冯·诺伊曼(Von Neumann)和摩根斯坦(O. Morgesten)合著的《对策论与经济行为》为对策论奠定了基础。1951 年，美国学者贝尔曼(R. Bellman)在解决多阶段决策问题时，提出了动态规划原理。这些理论研究为分析和解决经济管理问题提供了多样化的方法，从而使运筹学有了飞快的发展，产生了许多新的分支。如数学规划(线性规划、非线性规划、整数规划、动态规划)、图与网

$$x_1 + x_2 \leqslant 300$$
$$2x_1 + x_2 \leqslant 400$$
$$x_2 \leqslant 250$$

且称上述三式为约束条件。此外，一般实际问题都要满足非负条件，即 $x_1 \geqslant 0$、$x_2 \geqslant 0$。

这样有

$$\begin{aligned} \max z &= 50x_1 + 100x_2 \\ x_1 + x_2 &\leqslant 300 \\ 2x_1 + x_2 &\leqslant 400 \\ x_2 &\leqslant 250 \\ x_1, x_2 &\geqslant 0 \end{aligned}$$

称之为上述生产计划问题的数学模型。

例 1.2 某工厂需要完成 100 套钢架，每套钢架需要用长为 2.9m、2.1m 和 1.5m 的某型号圆钢各一根。现有的原材料长度为 7.4m，问如何下料，可使所用原材料最少？

借用生产管理中称之为套裁的管理方法可解该类问题，如：7.4m 长的原材料可截成 1 根 2.9m 和 3 根 1.5m 的圆钢，这样料头长度为 0；又如：7.4m 长的原材料可截成 2 根 2.1m 和 2 根 1.5m 的圆钢，这样料头长度为 0.2m；将这些截法设计齐全并汇总在表 1-2 中。

表 1-2

截法 / 下料数/根 / 长度/m	Ⅰ	Ⅱ	Ⅲ	Ⅳ	Ⅴ
2.9	1	2	0	1	0
2.1	0	0	2	2	1
1.5	3	1	2	0	3
料头/m	0	0.1	0.2	0.3	0.8

设 x_1、x_2、x_3、x_4、x_5 分别表示表 1-2 中 5 种截法原材料根数，要使使用原材料最少，则问题的目标可描述为：

$$\min z = x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5$$

约束条件是以上 5 种截法所产生的 2.9m、2.1m 和 1.5m 的圆钢数量之和大于等于 100 根。具体描述如下：

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 \qquad + x_4 \qquad &\geqslant 100 \\ 2x_3 + 2x_4 + x_5 &\geqslant 100 \\ 3x_1 + x_2 + 2x_3 \qquad + 3x_5 &\geqslant 100 \end{aligned}$$

这样有

$$\begin{aligned} \min z &= x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 \\ x_1 + 2x_2 \qquad + x_4 \qquad &\geqslant 100 \\ 2x_3 + 2x_4 + x_5 &\geqslant 100 \\ 3x_1 + x_2 + 2x_3 \qquad + 3x_5 &\geqslant 100 \end{aligned}$$

定义 1.2 设约束方程的系数矩阵 $\boldsymbol{A}$ 中,有 m 个线性无关的列向量,且设 $\boldsymbol{B}=(\boldsymbol{P}_1,\boldsymbol{P}_2,\cdots,\boldsymbol{P}_m)$ 线性无关,则称 $\boldsymbol{B}$ 为该线性规划的一个**基**;相应的向量 $\boldsymbol{P}_1,\boldsymbol{P}_2,\cdots,\boldsymbol{P}_m$ 称为**基向量**;与之对应的变量 $x_1,x_2,\cdots,x_m$ 称为**基变量**,记为:$\boldsymbol{X}_B=(x_1,x_2,\cdots,x_m)^{\mathrm{T}}$;其余的向量为**非基向量**,记为:$\boldsymbol{N}=(p_{m+1},p_{m+2},\cdots,p_n)$;其余的变量为**非基变量**,记为:$\boldsymbol{X}_N=(x_{m+1},x_{m+2},\cdots,x_n)^{\mathrm{T}}$;

定义 1.3 取 $\boldsymbol{A}$ 中一个基 $\boldsymbol{B}=(\boldsymbol{P}_1,\boldsymbol{P}_2,\cdots,\boldsymbol{P}_m)$,将上述线性规划约束方程 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{b}$ 改写成如下形式,即

$$(\boldsymbol{B},\boldsymbol{N})(\boldsymbol{X}_B,\boldsymbol{X}_N)^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{b}$$

从而有

$$\boldsymbol{BX}_B=\boldsymbol{b}-\boldsymbol{NX}_N$$

令

$$\boldsymbol{X}_N=\boldsymbol{0}$$

得到线性方程组

$$\boldsymbol{BX}_B=\boldsymbol{b}$$

由于 $\boldsymbol{B}$ 中各列向量线性无关,因此解此方程组有唯一解,即 $\boldsymbol{X}_B=(x_1^0,x_2^0,\cdots,x_m^0)^{\mathrm{T}}$。于是得到 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{b}$ 的一个确定的解,即 $\boldsymbol{X}^0=(\boldsymbol{X}_B,\boldsymbol{X}_N)^{\mathrm{T}}=(x_1^0,x_2^0,\cdots,x_m^0,0,0,\cdots,0)^{\mathrm{T}}$。称 $\boldsymbol{X}^0$ 为该线性规划对应于基 $\boldsymbol{B}$ 的一个**基本解**。

同样,在 $\boldsymbol{A}$ 中任选 m 个线性无关的列向量都可以组成一个基,对应就有一个基本解。对于一个线性规划最多有多少个基本解呢?从 n 个中选 m 个进行组合,即 $C_n^m=n!/[(n-m)!\,m!]$,因此,基本解是有限的。

例 1.9 找出下列 LP 所有的基及其对应的基本解

$$\max z=2x_1+3x_2$$
$$x_1+2x_2\leqslant 8$$
$$x_2\leqslant 3$$
$$x_1,x_2\geqslant 0$$

解:化为标准型

$$\max z=2x_1+3x_2+0x_3+0x_4$$
$$x_1+2x_2+x_3\quad=8$$
$$x_2\quad+x_4=3$$
$$x_1,x_2,x_3,x_4\geqslant 0$$

其中 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&2&1&0\\0&1&0&1\end{pmatrix}=(\boldsymbol{p}_1,\boldsymbol{p}_2,\boldsymbol{p}_3,\boldsymbol{p}_4)$

显然,$\boldsymbol{A}$ 中 $\boldsymbol{p}_1,\boldsymbol{p}_2$ 线性无关,从而 $\boldsymbol{p}_1,\boldsymbol{p}_2$ 构成一个基,且令 $\boldsymbol{B}_1=(\boldsymbol{p}_1,\boldsymbol{p}_2)$,对应的 $\boldsymbol{X}_B^{(1)}=(x_1,x_2)^{\mathrm{T}}$;$\boldsymbol{X}_N^{(1)}=(x_3,x_4)^{\mathrm{T}}$。这样,在约束方程中令 $\boldsymbol{X}_N^{(1)}=(x_3,x_4)^{\mathrm{T}}=(0,0)^{\mathrm{T}}$,得到如下线性方程组

$$x_1+2x_2=8$$
$$x_2=3$$

解之得唯一一组解,即 $\boldsymbol{X}_B^{(1)}=(x_1,x_2)^{\mathrm{T}}=(2,3)^{\mathrm{T}}$。这样就得到了满足约束方程组 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{b}$ 的一个解:$\boldsymbol{X}_1=(\boldsymbol{X}_B^{(1)},\boldsymbol{X}_N^{(1)})^{\mathrm{T}}=(2,3,0,0)^{\mathrm{T}}$,且称 $\boldsymbol{X}_1$ 为该线性规划对应于基 $\boldsymbol{B}_1$ 的**基本解**。

同样，在 $\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{p}_1,\boldsymbol{p}_2,\boldsymbol{p}_3,\boldsymbol{p}_4)$ 中任选两个线性无关的列向量，都可以构成一个基，即可得到对应的一个基本解。其中，$\boldsymbol{p}_1,\boldsymbol{p}_3$ 线性相关不能构成基，其余均两两线性无关，该线性规划问题所有基本解见表 1-3。

表 1-3　线性规划的基本解

基	基本解	可行否	目标值	对应图 1-3 中的点
$\boldsymbol{B}_1=(\boldsymbol{p}_1,\boldsymbol{p}_2)$	$\boldsymbol{X}_1=(2,3,0,0)^{\mathrm{T}}$	√	13	B
$\boldsymbol{B}_2=(\boldsymbol{p}_1,\boldsymbol{p}_4)$	$\boldsymbol{X}_2=(8,0,0,3)^{\mathrm{T}}$	√	16	C
$\boldsymbol{B}_3=(\boldsymbol{p}_2,\boldsymbol{p}_3)$	$\boldsymbol{X}_3=(0,3,2,0)^{\mathrm{T}}$	√	9	A
$\boldsymbol{B}_4=(\boldsymbol{p}_2,\boldsymbol{p}_4)$	$\boldsymbol{X}_4=(0,4,0,-1)^{\mathrm{T}}$	×	—	D
$\boldsymbol{B}_5=(\boldsymbol{p}_3,\boldsymbol{p}_4)$	$\boldsymbol{X}_5=(0,0,8,3)^{\mathrm{T}}$	√	0	O

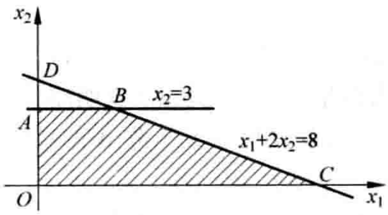

图 1-3

定义 1.4　设 $\boldsymbol{X}$ 为线性规划问题对应于基 $\boldsymbol{B}$ 的基本解，若满足 $\boldsymbol{X}\geqslant 0$，则称 $\boldsymbol{X}$ 为该线性规划问题的一个**基可行解**。$\boldsymbol{B}$ 为该线性规划问题的一个**可行基**。

从定义 1.4 可知，基本解不一定是可行解，基可行解就是满足非负条件的基本解，或者说既是基本解又是可行解的解。如例 1.9 中，$\boldsymbol{X}_1$、$\boldsymbol{X}_2$、$\boldsymbol{X}_3$、$\boldsymbol{X}_5$ 为基可行解，且分别对应于图 1-3 中可行域的四个顶点。

四、线性规划的基本定理

定义 1.5　设 $\boldsymbol{K}$ 是 n 维欧氏空间的一个点集，若任意两点 $\boldsymbol{X}^{(1)}\in\boldsymbol{K}$，$\boldsymbol{X}^{(2)}\in\boldsymbol{K}$ 均有 $\boldsymbol{X}=\alpha\boldsymbol{X}^{(1)}+(1-\alpha)\boldsymbol{X}^{(2)}\in\boldsymbol{K}$，$(0\leqslant\alpha\leqslant 1)$，则称 $\boldsymbol{K}$ 为**凸集**。

凸集的几何意义是：集合 $\boldsymbol{K}$ 中任意两点连线上的所有的点仍然在 $\boldsymbol{K}$ 中。如图 1-4 中，图(1)(2)为凸集，图(3)(4)则不是凸集；

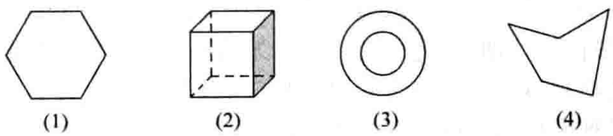

图 1-4

定义 1.6　设 $\boldsymbol{K}$ 为凸集，$\boldsymbol{X}\in\boldsymbol{K}$，若不存在 $\boldsymbol{X}^{(1)}\in\boldsymbol{K}$，$\boldsymbol{X}^{(2)}\in\boldsymbol{K}$ $(\boldsymbol{X}^{(1)}\neq\boldsymbol{X}^{(2)})$ 以及 $\alpha\in(0,1)$，使得

$$\boldsymbol{X}=\alpha\boldsymbol{X}^{(1)}+(1-\alpha)\boldsymbol{X}^{(2)}$$

表 1-12

c_j		3	-1	-1	0	0	$-M$	$-M$	b
C_B	X_B	x_1 ↓	x_2 ↓	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	
0	x_4	1	-2	1	1	0	0	0	11
$-M$	x_6	-4	1	2	0	-1	1	0	3
$-M$	x_7	-2	0	[1]	0	0	0	1	1
	$-z$	$3-6M$	$-1+M$	$-1+3M$	0	$-M$	0	0	$4M$
0	x_4	3	-2	0	1	0	0	-1	10
$-M$	x_6	0	[1]	0	0	-1	1	-2	1
-1	x_3	-2	0	1	0	0	0	1	1
	$-z$	1	$-1+M$	0	0	$-M$	0	$-3M+1$	$M+1$
0	x_4	[3]	0	0	1	-2	2	-5	12
-1	x_2	0	1	0	0	-1	1	-2	1
-1	x_3	-2	0	1	0	0	0	1	1
	$-z$	1	0	0	0	-1	$-M+1$	$-M-1$	2
3	x_1	1	0	0	1/3	$-2/3$	2/3	$-5/3$	4
-1	x_2	0	1	0	0	-1	1	2	1
-1	x_3	0	0	1	2/3	$-4/3$	4/3	$-7/3$	9
	$-z$	0	0	0	$-1/3$	$-1/3$	$-M+1/3$	$-M+2/3$	-2

由于 $\sigma_j \leqslant 0(j=1,\cdots,7)$，且基变量中不含人工变量，故 $X^*=(4,1,9)^T$，$z^*=2$。

例 1.16 用单纯形法(大 M 法)求解下列线性规划：

$$\max z = 3x_1 + 2x_2$$
$$2x_1 + x_2 \leqslant 2$$
$$3x_1 + 4x_2 \geqslant 12$$
$$x_1, x_2 \geqslant 0$$

解：化为标准形式后引入人工变量 x_5 得到

$$\max z = 3x_1 + 2x_2 - Mx_5$$
$$2x_1 + x_2 + x_3 = 2$$
$$3x_1 + 4x_2 - x_4 + x_5 = 12$$
$$x_1, \cdots, x_5 \geqslant 0$$

用单纯形法计算，过程列于表 1-13 中。

从表 1-13 中可以看出，虽然检验数均小于或等于零，但基变量中含有非零的人工变量 $x_5=4$，所以原问题无可行解。

2. 将下面的线性规划问题化为标准形式。

(1) $\max z=x_1-2x_2+3x_3$

$$\begin{cases}3x_1-x_2+x_3\geqslant 5\\ x_1+x_2+x_3\leqslant 4\\ x_1\geqslant 0,x_3\geqslant 0,x_2\ \text{无限制}\end{cases}$$

(2) $\min z=-3x_1+x_2+x_3$

$$\begin{cases}5\leqslant x_1+x_2+x_3\leqslant 10\\ 3x_1\geqslant 4x_3\\ x_1\geqslant 0,x_2\geqslant 0,x_3\geqslant 0\end{cases}$$

3. 在下面的线性规划问题中找出所有基本解，指出哪些是基本可行解，并代入目标函数，确定哪一个是最优解。

(1) $\max z=3x_1+2x_2$

$$\begin{cases}2x_1+3x_2\leqslant 8\\ x_1+2x_2\leqslant 3\\ x_1,x_2\geqslant 0\end{cases}$$

(2) $\min z=5x_1-2x_2+3x_3-6x_4$

$$\begin{cases}x_1+2x_2+3x_3+4x_4=7\\ 2x_1+x_2+x_3+2x_4=3\\ x_1,x_2,x_3,x_4\geqslant 0\end{cases}$$

4. 用单纯形方法求解下面的线性规划问题。

(1) $\max z=10x_1+6x_2+4x_3$

$$\begin{cases}x_1+x_2+x_3\leqslant 100\\ 10x_1+4x_2+5x_3\leqslant 600\\ x_1+x_2+3x_3\leqslant 150\\ x_1\geqslant 0,x_2\geqslant 0,x_3\geqslant 0\end{cases}$$

(2) $\max z=3x_1+4x_2$

$$\begin{cases}x_1+2x_2\leqslant 6\\ 3x_1+2x_2\leqslant 12\\ x_2\leqslant 2\\ x_1\geqslant 0,x_2\geqslant 0\end{cases}$$

(3) $\min z=2x_1+3x_2+x_3$

$$\begin{cases}x_1-x_3\leqslant 2\\ x_1+x_2\geqslant 6\\ x_1\geqslant 0,x_2\geqslant 0,x_3\geqslant 0\end{cases}$$

5. 用大 M 法或两阶段法求解线性规划问题。

(1) $\min z=x_1-x_2+x_3$

$$\begin{cases}x_1+2x_2+3x_3=6\\ 4x_1+5x_2-6x_3=6\\ x_1\geqslant 0,x_2\geqslant 0,x_3\geqslant 0\end{cases}$$

(2) $\min z=2x_1-3x_2$

$$\begin{cases}-x_1+x_2\geqslant 1\\ -x-x_2\geqslant 2\\ x_1\geqslant 0,x_2\geqslant 0\end{cases}$$

(3) $\max z=3x_1+2x_2+3x_3$

$$\begin{cases}2x_1+x_2+x_3\leqslant 2\\ 3x_1+4x_2+2x_3\geqslant 8\\ x_1,x_2,x_3\geqslant 0\end{cases}$$

(4) $\max z=x_1+5x_2+3x_3$

$$\begin{cases}x_1+2x_2+x_3=2\\ 2x_1-x_2\geqslant 4\\ x_1,x_2,x_3\geqslant 0\end{cases}$$

6. 求最大化问题时有表 1-16：

表 1-16

c_j								$\boldsymbol{b}$
$\boldsymbol{C}_B$	$\boldsymbol{X}_B$	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	
		4	α_1	1	0	α_3	0	e
		-1	-5	0	1	-1	0	2
		α_3	-3	0	0	-4	1	3
	$-z$	β_1	β_2	0	0	-3	0	

其中 α_1、α_2、α_3、β_1、β_2、e 是未知常数，$x_j \geqslant 0, j=1,\cdots,6$；试在下述条件下，求出这六个未知量的有关条件：

(1) 现行解是最优解，且为多重解；

(2) 现行解是非可行解；

(3) 现行解为退化基本解；

(4) 无界解；

(5) 现行解可行，但以 x_1 替换第三个基变量后，目标函数值将增加，求迭代后增值多少。

7. 考虑线性规划问题

$$
\begin{aligned}
&\min z = x_1 + \beta x_2 \\
&-x_1 + x_2 \leqslant 1 \\
&-x_1 + 4x_2 \leqslant 4 \\
&x_1, x_2 \geqslant 0
\end{aligned}
$$

试用单纯形方法讨论 β 在什么取值范围内，下列问题成立：

(1) 线性规划有唯一最优解；

(2) 线性规划有无穷多最优解；

(3) 线性规划有无界解。

8. 线性规划问题 $\max z=\boldsymbol{CX}, \boldsymbol{AX}=\boldsymbol{b}, \boldsymbol{X}\geqslant 0$，设 $\boldsymbol{X}^0$ 为问题最优解，若目标函数中用 $\boldsymbol{C}^*$ 代替 $\boldsymbol{C}$ 后，问题的最优解变为 $\boldsymbol{X}^*$，求证：$(\boldsymbol{C}^*-\boldsymbol{C})(\boldsymbol{X}^*-\boldsymbol{X}^0)\geqslant 0$。

第二章

线性规划的对偶理论与灵敏度分析

在线性规划早期的研究过程中，人们发现任意一个线性规划问题都存在另一个与之密切相关的线性规划问题，其中一个为原问题，另一个称为对偶问题。对偶理论是线性规划发展过程中的最为重要的理论成果之一，它深刻揭示了互为对偶的两个线性规划问题的内在联系。线性规划的对偶理论是解释资源的影子价格、线性规划问题的灵敏度分析等的理论基础。

第一节　对偶问题的提出

一、对偶问题举例

在第一章例 1.1 的生产计划问题中，从安排生产使企业利润最大的角度考虑，若用 x_1、x_2 分别代表甲、乙两种产品的生产数量，则问题的线性规划数学模型为：

问题 A

$$\max z = 50x_1 + 100x_2$$
$$x_1 + x_2 \leqslant 300$$
$$2x_1 + x_2 \leqslant 400$$
$$x_2 \leqslant 250$$
$$x_1, x_2 \geqslant 0$$

现在从另一个角度考虑，即企业不安排生产，而转让三种资源，那么，应如何给三种资源定价？

设 y_1、y_2、y_3 分别代表 A、B、C 三种资源的价格，即转让单位数量所获收益。对于决策者，首先当然会考虑如下两个条件：

约束条件 1：生产一件产品甲所耗资源数量转让所得总收益不能低于一件产品甲所获利润，即

$$1y_1 + 2y_2 \geqslant 50$$

约束条件 2：生产一件产品乙所耗资源数量转让所得总收益不能低于一件产品乙所获利润，即

$$1y_1 + 1y_2 + 1y_3 \geqslant 100$$

而企业将现有三种资源全部转让所得总收益，即目标函数为

$$w = 300y_1 + 400y_2 + 250y_3$$

从数学的角度分析，若目标函数极大化，则问题为无界解，即问题无意义，故目标函数只能极小化。从经济的角度看，A、B、C 三种资源的转让是与企业利用这三种资源进行最优生产进行比较的，因此，企业的决策者可以从这种比较中了解在不低于企业最优生产所

更进一步地，对于线性规划问题

$$\max z = \boldsymbol{CX}; \quad \boldsymbol{AX} = \boldsymbol{b}, \quad \boldsymbol{X} \geqslant 0$$

其对偶问题为

$$\min w = \boldsymbol{Yb}; \boldsymbol{YA} \geqslant \boldsymbol{C}, \boldsymbol{Y} \text{ 无限制。}$$

三、原问题与对偶问题在形式上的对应关系

根据对偶问题的定义及以上分析，互为对偶的线性规划问题之间有如下关系。

（1）目标函数之间的对应关系：若原问题极大化，则对偶问题极小化；反之，若原问题极小化，则对偶问题极大化。

（2）若原问题有 m 个约束条件，对偶问题就有 m 个变量；同时，若原问题有 n 个变量，则对偶问题就有 n 个条件。

（3）原问题变量的性质决定对偶问题约束条件的性质，例如，若原问题目标函数极大化，且第 j 个变量"$\geqslant 0$"，则对偶问题的第 j 个条件为"$\geqslant$"；若原问题目标函数极小化，且第 j 个变量"$\geqslant 0$"，则对偶问题的第 j 个条件为"$\leqslant$"。

（4）原问题约束条件的性质决定对偶问题变量的性质，例如，若原问题目标函数极大化，且第 i 个约束条件"$\leqslant$"，则对偶问题第 i 个变量"$\geqslant 0$"；若原问题目标函数极小化，且第 i 个约束条件"$\geqslant$"，则对偶问题第 i 个变量"$\geqslant 0$"。

（5）无论原问题目标函数极大化还是极小化，若原问题第 j 个变量"无限制"，则对偶问题的第 j 个条件为"$=$"；若原问题第 i 个条件为"$=$"，则对偶问题第 i 个变量为"无限制"。

以上线性规划原问题与对偶问题的数量关系可汇总在表 2-1 中。

表 2-1

原问题（或对偶问题）		对偶问题（或原问题）	
目标函数	$\max z$	$\min w$	目标函数
变量	n 个 $\geqslant 0$ $\leqslant 0$ 无约束	n 个 $\geqslant$ $\leqslant$ $=$	约束条件
约束条件	m 个 $\leqslant$ $\geqslant$ $=$	m 个 $\geqslant 0$ $\leqslant 0$ 无约束	变量
约束条件右端常数项 目标函数变量系数		目标函数变量系数 约束条件右端常数项	

例 2.1 写出下列线性规划问题的对偶问题。

$$\max z = 5x_1 - 2x_2 + 3x_3$$
$$x_1 - 2x_2 + 4x_3 \geqslant 20$$
$$3x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 40$$

$$3y_1 + 2y_2 \geqslant 4 \tag{4}$$

$$y_1, y_2 \geqslant 0$$

将 $y_1^* = 6/5, y_2^* = 1/5$ 代入上述约束条件,得(1)、(2)为严格不等式;由互补松弛定理可以推得 $x_1^* = 0, x_2^* = 0$。又因 $y_1^* > 0, y_2^* > 0$,故原问题的两个约束条件应取等式,所以

$$2x_3^* + 3x_4^* = 20$$

$$3x_3^* + 2x_4^* = 20$$

解得 $x_3^* = x_4^* = 4$。故原问题的最优解为

$$\boldsymbol{X}^* = (0, 0, 4, 4)^{\mathrm{T}}$$

定理 2.5 原问题单纯形表的检验数行对应对偶问题的一个基本解。

该定理的进一步解释有:若原问题最优解存在,则原问题最优单纯形表的检验数行中,松弛变量或剩余变量的检验数对应对偶问题的最优解。

若原问题为 $\max\ z = \boldsymbol{CX}, \boldsymbol{AX} \leqslant \boldsymbol{b}, \boldsymbol{X} \geqslant 0$,且存在最优解,则其最优单纯形表可用表 2-2 描述,表中松弛变量对应的检验数为 $-\boldsymbol{C}_B\boldsymbol{B}^{-1}$,由定理 2.3 可知,该检验数的相反数 $-\boldsymbol{C}_B\boldsymbol{B}^{-1}$ 就是其对偶问题的最优解。

若原问题为 $\min\ z = \boldsymbol{CX}, \boldsymbol{AX} \geqslant \boldsymbol{b}, \boldsymbol{X} \geqslant 0$,则其对偶问题为 $\max w = \boldsymbol{Yb}, \boldsymbol{YA} \leqslant \boldsymbol{C}, \boldsymbol{Y} \geqslant 0$。若原问题存在最优解,用大 M 法(极小化为标准型)可得到如表 2-3 所示的最优单纯形表。

表 2-3

$\boldsymbol{C}$		$\boldsymbol{C}_B$	$\boldsymbol{C}_N$	$\boldsymbol{0}$	$\boldsymbol{M}$	$\boldsymbol{b}$
$\boldsymbol{C}_B$	$\boldsymbol{X}_B$	$\boldsymbol{X}_B$	$\boldsymbol{X}_N$	$\boldsymbol{X}_S$	$\boldsymbol{X}_R$	
$\boldsymbol{C}_B$	$\boldsymbol{X}_B$	$\boldsymbol{I}$	$\boldsymbol{B}^{-1}N$	$-\boldsymbol{B}^{-1}$	$\boldsymbol{B}^{-1}$	$\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{b}$
	$-z$	0	$\boldsymbol{C}_N - \boldsymbol{C}_B\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{N}$	$\boldsymbol{C}_B\boldsymbol{B}^{-1}$	$-\boldsymbol{C}_B\boldsymbol{B}^{-1} + M$	$-\boldsymbol{C}_B\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{b}$

表中,剩余变量的检验数为 $\boldsymbol{C}_B\boldsymbol{B}^{-1}$,人工变量的检验数为 $-\boldsymbol{C}_B\boldsymbol{B}^{-1} + \boldsymbol{M}$。

设 $$\boldsymbol{Y}^* = \boldsymbol{C}_B\boldsymbol{B}^{-1}$$

由于 $$\boldsymbol{C} - \boldsymbol{C}_B\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{A} \geqslant 0, \boldsymbol{C}_B\boldsymbol{B}^{-1} \geqslant 0$$

所以 $\boldsymbol{Y}^* \geqslant 0$,且 $\boldsymbol{Y}^* A \leqslant \boldsymbol{C}$,即 $\boldsymbol{Y}^*$ 为对偶问题的可行解。

这样 $$\boldsymbol{W}^* = \boldsymbol{Y}^*\boldsymbol{b} = \boldsymbol{C}_B\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{b} = z^*$$

因此,$\boldsymbol{C}_B\boldsymbol{B}^{-1}$ 为对偶问题的最优解。

例 2.4 (原问题为极大化问题)

对于原问题:

$$\max\ z = 50x_1 + 100x_2$$
$$x_1 + x_2 \leqslant 300$$
$$2x_1 + x_2 \leqslant 400$$
$$x_2 \leqslant 250$$
$$x_1, x_2 \geqslant 0$$

其对偶问题为

$$\min\ w = 300y_1 + 400y_2 + 250y_3$$
$$y_1 + 2y_2 \geqslant 50$$
$$y_1 + y_2 + y_3 \geqslant 100$$
$$y_1, y_2, y_3 \geqslant 0$$

解 原问题最优单纯形表如表 2-4 所示,对应的对偶问题最优解列于表 2-4 中最后

(5) 影子价格的高低可以作为同类企业经济效益的评估标准之一。

二、任务的边际成本

对于目标函数极小化约束条件为大于或等于号的问题 $\min z=\boldsymbol{CX},\boldsymbol{AX}\geqslant\boldsymbol{b},\boldsymbol{X}\geqslant\boldsymbol{0}$，其右端常数项可理解为需要完成的任务。因此，该类线性规划一般为描述完成一定任务使耗费的资源最小的问题。此时，其对偶问题的最优解 $y_i^*\ (i=1,\cdots,m)$ 表示第 i 种任务的边际成本，即单位任务的增加引起的资源耗费的增加量。

例 2.6 某工厂使用某种原材料生产甲、乙两种产品。根据现有库存商品和市场预期，产品甲和乙的总产量不小 250，产品甲的生产量不小于 100，每单位甲消耗 2 单位的原材料，每单位乙消耗 1 单位的原材料，产品甲和产品乙的生产成本分别是 50 元/单位和 80 元/单位，原材料总数量为 400 单位，问如何安排生产，可使生产成本最小？

若 x_1、x_2 分别表示产品甲和产品乙的生产数量，则问题的线性规划模型为

$$\begin{aligned}\min z &= 50x_1+80x_2\\ x_1 \quad &\geqslant 100\\ x_1+x_2 &\geqslant 250\\ 2x_1+x_2 &\leqslant 400\\ x_1,x_2 &\geqslant 0\end{aligned}$$

用大 M 法（极小化为标准形式）求解得问题的最优单纯形表见表 2-6。

表 2-6

c_j		50	80	0	0	0	M	M	$\boldsymbol{b}$
$\boldsymbol{C}_B$	$\boldsymbol{X}_B$	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	
50	x_1	1	0	0	1	1	0	-1	150
80	x_2	0	1	0	-2	-1	0	2	100
0	x_3	0	0	1	1	1	-1	-1	50
	$-z$	0	0	0	110	30	M	$-110+M$	$-15\,500$
对偶问题最优解				y_1^*	y_2^*	$-y_3^*$	$-y_1^*+M$	$-y_2^*+M$	

从表中可知，对偶问题的最优解为 $y_1^*=0,y_2^*=110,y_3^*=-30$，其中，$y_1^*=0,y_2^*=110$ 分别表示每增加生产 1 单位的产品甲和产品乙所增加的工厂的生产成本，即最优购买决策条件下的甲、乙两产品的边际成本。

三、对偶价格

无论对偶问题的最优解表示的是资源的影子价格还是任务的边际成本，只要为正，就表示右端常数项增加则目标函数值增加，为负则表示右端常数项增加而目标函数值减少。对于极大化的问题，目标函数值增加表明目标函数得到改善，对于极小化的问题，目标函数减少表明目标函数得到改善。为了二者的统一，我们定义如下对偶价格。

侧基。

正侧解一般为非可行解，若正侧解同时为可行解，则该正侧解就是线性规划问题的最优解。由正侧解的这一性质，我们就有与单纯形法基本思想对应的对偶单纯形法的基本思想。

单纯形法的基本思想是：从一基可行解($\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{b}\geqslant 0$)出发，在满足可行解的基础上，通过逐次基可行解的转换，直至$\sigma_j\leqslant 0(j\in \boldsymbol{J})$成立，即达到可行的正侧解，从而判断是否得到最优解或有无最优解。

对偶单纯形法的基本思想是：从一正侧解($\sigma_j\leqslant 0(j\in \boldsymbol{J})$)出发，在满足正侧解的基础上，通过逐次基转换，直至$\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{b}\geqslant 0$成立，即达到满足正侧解条件的可行解，从而判断是否得到最优解或有无最优解。

需要指出的是：对偶单纯形法是求解线性规划问题的另一种方法，而不是求解线性规划对偶问题的单纯形法。

二、对偶单纯形法

用对偶单纯形法求解线性规划问题的一般步骤为：

(1) 寻找初始正侧基，列出对应初始单纯形表；

(2) 若右端常数项$b_i\geqslant 0$，则已得到问题的最优解，停止计算，否则转下一步；

(3) 确定出基变量，按$\min\{b_i \mid b_i<0, i=1,\cdots,m\}=b_r$，则$b_r$所在行对应的变量$x_r$为出基变量，若$b_r$所在行对应的$\boldsymbol{A}$阵中各元素$a_{rj}\geqslant 0, j=1,2,\cdots,n$，则问题无可行解，停止计算，否则转下一步；

(4) 确定进基变量，按$\theta=\min\{\sigma_j/a_{rj} \mid a_{rj}<0, j\in \boldsymbol{J}\}=\sigma_k/a_{rk}$，则对应的变量$x_k$为进基变量；

(5) 以a_{rk}为主元素，按原单纯形法同样方法进行迭代计算，得到新的正侧解，转(2)。

例 2.8 用对偶单纯形法求解下列线性规划

$$
\begin{aligned}
&\min z = 5x_1 + 2x_2 + 6x_3 \\
&2x_1 + 4x_2 + 8x_3 \geqslant 24 \\
&4x_1 + x_2 + 4x_3 \geqslant 8 \\
&x_1, x_2, x_3 \geqslant 0
\end{aligned}
$$

解 将问题改写成如下形式：

$$
\begin{aligned}
&\max(-z) = -5x_1 - 2x_2 - 6x_3 \\
&-2x_1 - 4x_2 - 8x_3 + x_4 = -24 \\
&-4x_1 - x_2 - 4x_3 + x_5 = -8 \\
&x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geqslant 0
\end{aligned}
$$

显然，$\boldsymbol{p}_4$、$\boldsymbol{p}_5$可以构成现成的单位基，此时，非基变量在目标函数中的系数全为负数，因此$\boldsymbol{p}_4$、$\boldsymbol{p}_5$构成的就是初始正侧基。整个问题的计算过程列在表 2-8 中。

又令 $$\boldsymbol{B}^{-1}=\begin{pmatrix}\beta_{11} & \cdots & \beta_{1m}\\ \cdots & \cdots & \cdots\\ \beta_{m1} & \cdots & \beta_{mm}\end{pmatrix}\quad \boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{b}=\begin{pmatrix}\bar{b}_1\\ \vdots\\ \bar{b}_m\end{pmatrix}$$

因此有 $$\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{b}+\boldsymbol{B}^{-1}\Delta\boldsymbol{b}=\begin{pmatrix}\bar{b}_1\\ \vdots\\ \bar{b}_m\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\beta_{1k}\Delta b_k\\ \vdots\\ \beta_{mk}\Delta b_k\end{pmatrix}$$

为使 $\boldsymbol{B}$ 的最优基不变，必须有

$$\bar{b}_i+\beta_{ik}\Delta b_k\geqslant 0,\quad i=1,\cdots,m$$

解此不等式组：

当 $\beta_{ik}>0$ 时有 $$\Delta b_k\geqslant -\bar{b}_i/\beta_{ik}$$

当 $\beta_{ik}<0$ 时有 $$\Delta b_k\leqslant -\bar{b}_i/\beta_{ik}$$

综合有 $$\max_i\{-\bar{b}_i/\beta_{ik}\mid\beta_{ik}>0\}\leqslant\Delta b_k\leqslant\min_i\{-\bar{b}_i/\beta_{ik}\mid\beta_{ik}<0\}$$

即 Δb_k 的变化范围为

$$\Delta b_{k,\min}\leqslant\Delta b_k\leqslant\Delta b_{k,\max}$$

或 b_k 的变化范围为

$$b_k+\Delta b_{k,\min}\leqslant b_k\leqslant b_k+\Delta b_{k,\max}$$

例 2.11 某工厂在计划期内要安排甲、乙两种产品，已知生产一件产品所消耗的 A、B、C 三种原材料的数量以及单位产品的利润如表 2-13 所示：

表 2-13

单位消耗 产品 / 原材料	甲	乙	资源限量(kg)
A	1	3	90
B	2	1	80
C	1	1	45
单位产品利润(千元/件)	5	4	

若 x_1、x_2 分别表示工厂生产甲、乙产品的数量，则使工厂获得最大利润的生产计划数学模型为：

$$\begin{aligned}&\max z=5x_1+4x_2\\&x_1+3x_2\leqslant 90\\&2x_1+x_2\leqslant 80\\&x_1+x_2\leqslant 45\\&x_1,x_2\geqslant 0\end{aligned}$$

用单纯形法求解该问题时，其初始单纯形表和最优单纯形表分别如表 2-14 和 2-15 所示，试分析使最优基不变的 b_3 的变化范围。

2. 已知线性规划问题：

$$\max z = 2x_1 + x_2 + 5x_3 + 6x_4$$
$$2x_1 + x_3 + x_4 \leqslant 8$$
$$2x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 \leqslant 12$$
$$x_1, x_2, x_3, x_4 \geqslant 0$$

其对偶问题的最优解为 $y_1^* = 4, y_2^* = 1$，试用对偶问题的性质，求原问题的最优解。

3. 对于线性规划问题：

$$\max z = x_1 + 4x_2 + 4x_3$$
$$x_1 + x_2 - 2x_3 \geqslant 4$$
$$2x_1 + x_2 + 4x_3 \leqslant 16$$
$$x_1 + 2x_2 + x_3 = 12$$
$$x_1, x_2, x_3 \geqslant 0$$

其最优单纯形表如表 2-19 所示。

表 2-19

c_j		1	4	4	0	0	$-M$	$-M$	b
C_B	X_B	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	
4	x_2	3/5	1	0	−1/5	0	1/5	2/5	28/5
0	x_5	11/5	0	0	−7/5	1	7/5	−6/5	36/5
4	x_3	−1/5	0	1	2/5	0	−2/5	1/5	4/5
	$-z$	−3/5	0	0	−4/5	0	$4/5-M$	$-12/5-M$	−128/5

其中 x_4 为剩余变量，x_5 为松弛变量，x_6, x_7 为人工变量，试根据表 2-19 回答下述问题：

(1) 写出问题的最优基 $\boldsymbol{B}$ 及 $\boldsymbol{B}^{-1}$。

(2) 写出对偶问题的最优解。

(3) 写出三个右端常数项的对偶价格，并根据该对偶价格分析各右端常数项的变化对目标函数值的影响。

4. 用对偶单纯形方法求解下列线性规划问题。

(1) $\min z = x_1 + 4x_2 + 4x_3$

$$2x_1 + x_2 + 4x_3 \geqslant 16$$
$$x_1 + 2x_2 + x_3 \geqslant 12$$
$$x_1, x_2, x_3 \geqslant 0$$

(2) $\min z = 3x_1 + 2x_2 + x_3 + 4x_4$

$$2x_1 + 4x_2 + 5x_3 + x_4 \geqslant 0$$
$$3x_1 - 4x_2 + 7x_3 - 2x_4 \geqslant 2$$
$$5x_1 + 2x_2 + x_3 + 6x_4 \geqslant 15$$
$$x_1, x_2, x_3, x_4 \geqslant 0$$

5. 有一个资源有限，安排生产计划使利润最大的线性规划问题，三个约束条件全部为“≤”，右端常数项为 A、B、C 三种资源的限量。它的最优单纯形表如表 2-20 所示。

表 2-20

c_j		c_1	c_2	0	0	0	b
C_B	X_B	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
c_2	x_2	0	1	1/2	−1/2	0	2
c_1	x_1	1	0	−1/8	3/8	0	3/2
0	x_5	0	0	1	−2	1	4
	$-z$	0	0	−1/4	−1/4	0	

其中 x_3、x_4、x_5 为松弛变量，试根据表 2-20 回答下述问题：

(1) 求出 c_1、c_2 的数值。

(2) 工厂应如何安排生产？最大利润为多少？

(3) 哪中资源有剩余？剩余量为多少？

(4) 三种资源的影子价格分别为多少？其经济意义是什么？

(5) 在保持最优基不变的情况下，若要扩大某种资源的数量，应扩大哪一个？为什么？最多扩大多少？求出新的目标函数值。

(6) 求使最优基不变的 c_1/c_2 的范围。

(7) 对 b_2、b_3 作灵敏度分析。

(8) 对 c_1、c_2 作灵敏度分析。

6. 某公司生产Ⅰ、Ⅱ两种产品，需要在四个车间进行加工。各产品所需的加工工时、各车间的加工能力及单位产品利润如表 2-21 所示。

表 2-21

单耗 产品 / 车间	产品Ⅰ	产品Ⅱ	车间能力(每天工时)
1	2	0	300
2	0	3	540
3	2	2	440
4	1.2	1.5	300
单位产品利润(元)	500	400	

若 x_1、x_2 分别表示产品Ⅰ和产品Ⅱ每天的产量，则问题的线性规划模型为

$$\max z = 500x_1 + 400x_2$$

$$\begin{aligned} 2x_1 \qquad\quad &\leqslant 300 \\ 3x_2 &\leqslant 540 \\ 2x_1 + 2x_2 &\leqslant 440 \\ 1.2x_1 + 1.5x_2 &\leqslant 300 \\ x_1, x_2 &\geqslant 0 \end{aligned}$$

求解该问题，并作单参数的灵敏度分析，得到如下结果。

品 B、产品 C 的生产数量，该问题的数学模型如下：

$$\min z = 20x_1 + 24x_2 + 23x_3$$
$$x_1 + x_2 \geqslant 65$$
$$x_2 + x_3 \geqslant 100$$
$$5x_1 + 4x_2 + 6x_3 \leqslant 450$$
$$x_1, x_2, x_3 \geqslant 0$$

用计算机求解该问题得到如下结果

目标函数的最优值为：2 375

变量	最优解	检验数
x_1	0	22.5
x_2	75	0
x_3	25	0
约束	松弛/剩余变量	对偶价格
1	10	0
2	0	−26
3	0	0.5

目标函数系数的范围：

变量	下限	当前值	上限
x_1	−2.5	20	无上限
x_2	23	24	无上限
x_3	无下限	23	24

右端常数项范围：

约束	下限	当前值	上限
1	无下限	65	75
2	96.7	100	112
3	400	450	470

根据上述计算结果回答下列问题：

(1) 最优产品组合是什么？此时最小成本为多少？

(2) 第一个约束条件的剩余变量等于 10 所代表的含义是什么？

(3) 第二和第三个约束条件的对偶价格分别表示什么含义？

(4) 若其他条件不变，产品 C 的单位生产成本从 23 元增长到 24 元，公司的最优生产计划有无变化？相应的生产成本有无变化？

(5) 其他条件不变，如果公司的 B、C 产量之和从 100 增加到 110，公司的最优生产计划有无变化？生产成本将变为多少？

(6) 其他条件不变，如果公司的总生产时间从 450h 增加到 470h，则公司的成本将如

何变化？

7. 考虑下面的线性规划问题。

$$\min z = 16x_1 + 16x_2 + 17x_3$$
$$x_1 + x_3 \leqslant 30$$
$$0.5x_1 - x_2 + 6x_3 \geqslant 15$$
$$3x_1 + 4x_2 - x_3 \geqslant 20$$
$$x_1, x_2, x_3 \geqslant 0$$

求解该问题，并作单参数的灵敏度分析，得到如下结果。

目标函数最优值为：148.919

变量	最优解	检验数
x1	7.297	0
x2	0	0.703
x3	1.892	0

约束	松弛/剩余变量	对偶价格
1	20.81	0
2	0	−3.622
3	0	−4.730

目标函数系数范围：

变量	下限	当前值	上限
x1	1.416	16	16.565
x2	15.297	16	无上限
x3	14.4	17	192

右端常数项范围：

约束	下限	当前值	上限
1	9.189	30	无上限
2	3.333	15	111.25
3	−2.5	20	90

试根据上述计算结果回答下列问题：

(1) 第二个约束方程的对偶价格是一个负数(为−3.622)，它的含义是什么？

(2) x_2 的检验数为 0.703，它的含义是什么？

(3) 当目标函数中 x_1 的系数从 16 降为 15，而 x_2 的系数从 16 升为 18 时，请问这时最优解变不变？

(4) 当第一个约束条件的右边值从 30 减少到 15，而第二个约束条件的右边值从 15 增加到 80 时，你能断定其对偶价格变不变化吗？为什么？此时应怎么办？