



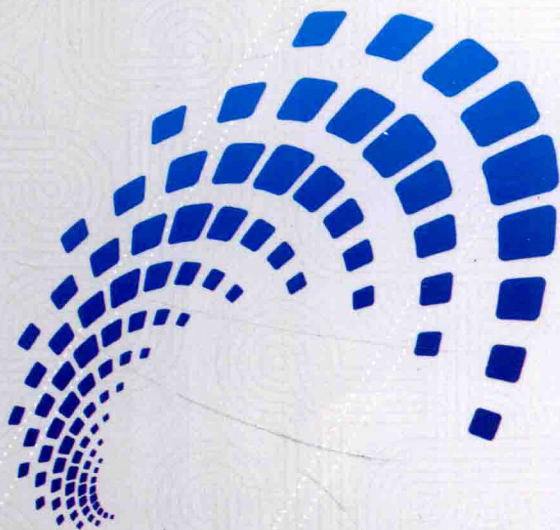
普通高等教育“十二五”规划教材

微积分及其应用

CALCULUS AND ITS APPLICATION

下册

黄福同 主编



机械工业出版社
CHINA MACHINE PRESS



免费电子课件

普通高等教育“十二五”规划教材

微积分及其应用

下 册

主 编 黄福同
副主编 许 国 于 宁
主 审 王继忠



机械工业出版社

本书根据教育部最新颁布的高等学校经济管理类本科生微积分课程教学基本要求及研究生入学考试数学考试大纲编写而成。全书分上、下两册,本书为下册,内容包括空间解析几何与向量代数、多元函数微分学、二重积分、无穷级数、微分方程与差分方程等内容,书末还附有二阶、三阶行列式简介和习题答案与提示。

本书结构严谨,叙述条理清晰,着重微积分在经济管理方面的应用,注重计算机对教学的辅助作用,并在每章后配有数学实验,可供高等学校经济管理及相关专业本科教学使用。

图书在版编目(CIP)数据

微积分及其应用.下册/黄福同主编. —北京:
机械工业出版社, 2014.4
普通高等教育“十二五”规划教材
ISBN 978-7-111-45629-2

I. ①微… II. ①黄… III. ①微积分-高等学校-教材 IV. ①O172

中国版本图书馆CIP数据核字(2014)第018093号

机械工业出版社(北京市百万庄大街22号 邮政编码100037)

策划编辑:郑 玫 责任编辑:郑 玫 李 乐

版式设计:常天培 责任校对:张莉娟

封面设计:张 静 责任印制:刘 岚

北京京丰印刷厂印刷

2014年7月第1版·第1次印刷

169mm×239mm·11.75印张·233千字

标准书号:ISBN 978-7-111-45629-2

定价:23.00元

凡购本书,如有缺页、倒页、脱页,由本社发行部调换

电话服务

网络服务

社服务中心:(010) 88361066

教材网:<http://www.cmpedu.com>

销售一部:(010) 68326294

机工官网:<http://www.cmpbook.com>

销售二部:(010) 88379649

机工官博:<http://weibo.com/cmp1952>

读者购书热线:(010) 88379203

封面无防伪标均为盗版

前 言

本书是根据教育部最新颁布的高等学校经济管理类本科生微积分课程教学基本要求及研究生入学考试数学考试大纲,按照经济管理类专业人才的培养目标要求,结合教学改革与发展实际,在认真分析、总结、吸收高等院校经济管理类微积分课程教学改革经验的基础上,按照科学性、创新性、适用性和实践性为高等学校经济管理类本科生编写的,适合经济管理及相关专业本科教学选用.本书有以下几个特点:

1. 保持经典教材的优点,注重突出微积分的基本思想,并把多年来的教学经验、教学成果与教材相融合;优化内容结构,适当降低理论深度,减少对解题技巧的训练,使教材更符合学生的认知规律.

2. 从实际问题出发,引入微积分的一些基本概念和理论,将微积分和经济学的有关内容有机结合;应用实例的选取做到了“直观化”“生活化”“科学化”;融入了数学建模的思想,既突出了微积分的基本思想,又强化了理论知识的应用.

3. 将数学实验的内容融入教材中,通过实验模拟减少理论的抽象性,增强数值计算、理论应用的趣味性.

4. 本教材配套的学生用全程学习指导内容丰富,每章包括预习导引、知识梳理、释疑解难、典型题精讲、教材习题选解和自测题六部分,实现了对教材的导读导学、答疑解惑、归纳整理及知识的拓延提升.

本书由黄福同组织编写和统稿.第六章由赵永谦编写,第七章由于正文编写,第八章由许国编写,第九章由于宁编写,第十章由黄福同编写,各章的实验部分由葛倩编写.王继忠教授不辞辛劳地完成了本书的审稿工作,并提出了许多建设性的建议,在此向他表示衷心感谢!

本书的编写参阅了许多专家、学者的教材论著及文献,并引用了部分论著中的例子,恕不一一指明出处,在此一并向有关作者致谢!

书中难免有不妥之处,恳请读者给予批评指正.

编 者

目 录

前言

第六章 空间解析几何与向量代数	1
第一节 空间直角坐标系	1
习题 6.1	2
第二节 向量代数	3
一、向量的概念	3
二、数量积与向量积	4
习题 6.2	6
第三节 空间曲面及其方程	7
一、曲面方程的概念	7
二、旋转曲面与柱面	8
三、平面及其方程	9
四、简单的二次曲面	11
习题 6.3	12
第四节 空间曲线及其方程	13
一、曲线的方程	13
二、曲线的投影	14
三、直线及其方程	15
习题 6.4	17
实验五 MATLAB 绘图	17
一、三维曲线与曲面的绘制	18
二、利用 MATLAB 演示曲面的形成过程	19
三、常用统计分析图的绘制	20
实验题 5	22
总习题六	22
第七章 多元函数微分学	24
第一节 多元函数的基本知识	24
一、多元函数的概念	24
二、多元函数的极限	27
三、多元函数的连续性	28
习题 7.1	30
第二节 偏导数及全微分	30
一、偏导数的定义及其算法	30
二、偏导数的几何意义和经济意义	33

三、高阶偏导数	34
四、全微分	35
习题 7.2	38
第三节 多元复合函数的求导法则	38
一、中间变量是一元函数的情形	39
二、中间变量是多元函数的情形	39
习题 7.3	42
第四节 隐函数的求导方法	43
习题 7.4	44
第五节 多元函数的极值及其经济应用	45
一、二元函数的极值及最值	45
二、条件极值	49
三、偏导数在经济中的应用	51
习题 7.5	52
实验六 多元函数微分法的 MATLAB 实现	53
一、偏导数与全微分的 MATLAB 实现	53
二、多变量函数极值的 MATLAB 实现	55
三、应用举例	57
实验题 6	58
总习题七	58
第八章 二重积分	60
第一节 二重积分的概念及性质	60
一、二重积分的概念	60
二、二重积分的性质	62
三、二重积分的几何意义	64
习题 8.1	64
第二节 二重积分的计算法	65
一、直角坐标系下二重积分的计算	65
二、极坐标系下二重积分的计算	69
三、无界区域上的二重积分计算	72
四、二重积分的几何应用	74
习题 8.2	78
实验七 二重积分的 MATLAB 实现	80
一、利用 MATLAB 计算二重积分	80
二、二重积分的数值求解	81
三、应用举例	81
实验题 7	82
总习题八	82
第九章 无穷级数	85

第一节 常数项级数的概念和性质	85
一、常数项级数的概念	85
二、收敛级数的性质	87
习题 9.1	89
第二节 正项级数敛散性的判别方法	89
习题 9.2	94
第三节 任意项级数	95
一、交错级数及其敛散性的判别方法	95
二、绝对收敛与条件收敛	96
习题 9.3	98
第四节 幂级数	98
一、函数项级数的概念及性质	99
二、幂级数及其收敛性	99
三、幂级数的运算及和函数的求法	104
四、函数的幂级数展开	105
习题 9.4	110
实验八 无穷级数的 MATLAB 实现	111
一、级数求和的 MATLAB 实现	111
二、幂级数展开的 MATLAB 实现	112
三、应用举例	112
实验题 8	113
总习题九	113
第十章 微分方程与差分方程	115
第一节 微分方程的基本概念	115
习题 10.1	118
第二节 一阶微分方程及其解法	118
一、可分离变量的微分方程	118
二、齐次方程	120
三、一阶线性微分方程	122
习题 10.2	125
第三节 一阶微分方程在经济中的应用	126
习题 10.3	127
第四节 可降阶的高阶微分方程	128
一、 $y^{(n)} = f(x)$ 型的微分方程	128
二、 $y'' = f(x, y')$ 型的微分方程	129
三、 $y'' = f(y, y')$ 型的微分方程	130
习题 10.4	131
第五节 二阶常系数线性微分方程	131
一、二阶线性微分方程解的结构	131

二、二阶常系数齐次线性微分方程	134
三、二阶常系数非齐次线性微分方程	137
习题 10.5	140
第六节 一阶差分方程	141
一、差分方程的概念	141
二、常系数线性差分方程的解的结构	144
三、一阶常系数齐次线性差分方程的解	144
四、一阶常系数非齐次线性差分方程的解	146
习题 10.6	148
第七节 一阶差分方程的简单经济应用	149
习题 10.7	152
实验九 微分方程及差分方程求解的 MATLAB 实现	152
一、利用 MATLAB 求解微分方程	152
二、微分方程应用举例	153
三、差分方程模型举例	154
实验题 9	157
总习题十	157
附录 二阶、三阶行列式简介	159
习题答案与提示	163
参考文献	178

第六章 空间解析几何与向量代数

空间解析几何是学习多元函数微积分的基础，空间向量是研究空间解析几何最有效的工具，在工程技术中有着广泛的应用。

本章首先建立空间直角坐标系并介绍向量概念及向量的某些运算，然后介绍空间曲线和空间曲面的方程。

第一节 空间直角坐标系

与平面解析几何一样，我们先引进空间直角坐标系，并建立空间中的点与有序数组之间的一一对应关系。

在空间取一定点 O ，以 O 为原点，作三条互相垂直且具有相同长度单位的数轴，分别称为 x 轴、 y 轴和 z 轴，或者分别叫做横轴、纵轴和竖轴。通常把 x 轴和 y 轴放在水平面上， z 轴垂直于它们所确定的平面；三条轴的正方向符合右手规则，即以右手握住 z 轴，当右手四指从 x 轴正向以 $\frac{\pi}{2}$ 的角度转向 y 轴正向时，大拇指的方向是 z 轴的正向，如图 6-1 所示。这样的三条坐标轴就建立了一个空间直角坐标系，点 O 叫做坐标原点（或原点）。由三条坐标轴中的任意两条所确定的三个平面统称为坐标平面，分别称为 xOy 面、 yOz 面与 zOx 面。三个坐标平面把空间分成了八个部分，每一部分叫做一个卦限。在 xOy 面的上方有四个卦限，含有 x 轴、 y 轴和 z 轴的正半轴的那个卦限叫做第 I 卦限，然后从 z 轴的正方向看，按逆时针顺序其他依次为第 II、第 III 和第 IV 卦限。位于第 I、第 II、第 III 和第 IV 卦限下面的四个卦限分别为第 V、第 VI、第 VII 和第 VIII 卦限。（图 6-2）。

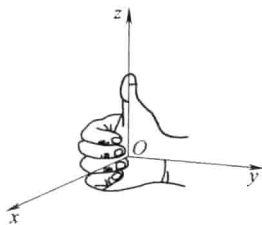


图 6-1

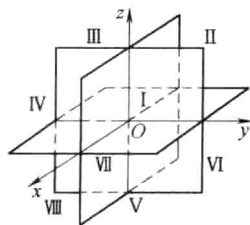


图 6-2

设 M 为空间中任意一点，过点 M 作垂直于 xOy 面的直线，垂足为 N ；过 N 分别作 x 轴、 y 轴的垂线，垂足分别记为 P, Q ，再过点 M 作 z 轴的垂线，垂足记为 R

(图 6-3). 点 P, Q, R 在相应坐标轴上的坐标依次为 x, y, z , 于是, 空间点 M 就确定了一个唯一的有序数组 x, y, z ; 反过来, 已知有序数组 x, y, z , 我们分别用 x 轴、 y 轴和 z 轴上的射线 OP 、 OQ 和 OR 来表示, 过点 M , N 和 R 分别作垂直于 x 轴、 y 轴和 z 轴的平面, 这三个互相垂直的平面就交于唯一一点 M . 有序数组 x, y, z 叫做点 M 的坐标, 记为 $M(x, y, z)$, 并依次称 x, y, z 为 M 点的横坐标、纵坐标、竖坐标.

设空间中两点 $P_1(x_1, y_1, z_1)$ 和 $P_2(x_2, y_2, z_2)$, 过 P_1 和 P_2 各作三个分别垂直于三条坐标轴的平面. 这六个平面围成一个以 P_1P_2 为对角线的长方体(图 6-4). 由立体几何的知识, 我们得到空间两点 P_1 和 P_2 之间的距离 d 为

$$d = |P_1P_2| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}.$$

这就是空间两点间的距离公式.

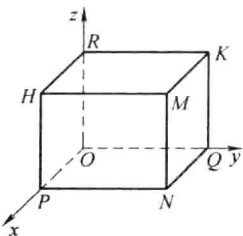


图 6-3

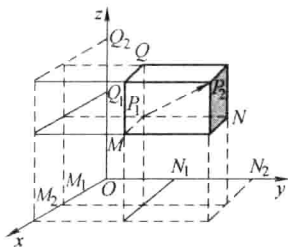


图 6-4

例 在 z 轴上求与两点 $A(-1, 4, 2)$ 和 $B(3, -2, 1)$ 等距离的点.

解 由于所求的点 P 在 z 轴上, 所以设该点的坐标为 $P(0, 0, z)$, 由题意, 有

$$|PA| = |PB|,$$

由两点间的距离公式, 得

$$\sqrt{(-1-0)^2 + (4-0)^2 + (2-z)^2} = \sqrt{(3-0)^2 + (-2-0)^2 + (1-z)^2},$$

解得

$$z = \frac{7}{2},$$

所以, 所求点为 $P\left(0, 0, \frac{7}{2}\right)$.

习题 6.1

- 点 $A(-1, 2, 3)$, $B(2, 3, -1)$ 各在哪个卦限? 求出它们关于下列几种情况的对称点:
(1) 三个坐标平面; (2) 三个坐标轴; (3) 坐标原点.
- 坐标轴上的点和坐标平面上的点的坐标各有什么特征? 指出下列各点的位置:

$$A(3,4,0); B(0,4,3); C(3,0,0); D(0,-1,0).$$

3. 边长为 a 的立方体, 放置在 xOy 面上, 其底面的中心在坐标原点, 底面的顶点在 x 轴和 y 轴上, 求它的各个顶点的坐标.

4. 在第Ⅲ卦限内求一点 M , 使得它到三个坐标轴的距离分别为 $d_x = 5$, $d_y = 3\sqrt{5}$, $d_z = 2\sqrt{13}$.

第二节 向量代数

一、向量的概念

在初等数学中, 我们已经学过向量的有关概念及线性运算. 所谓向量就是既有大小又有方向的量, 也叫做矢量. 我们通常用有向线段来表示向量. 有向线段的长度表示向量的大小, 有向线段的方向表示向量的方向. 以 P_1 为起点、 P_2 为终点的有向线段表示的向量, 记作 $\overrightarrow{P_1P_2}$ (图 6-5). 有时也用粗体的英文字母表示向量, 如 $\mathbf{a}$, $\mathbf{i}$, $\mathbf{v}$, $\mathbf{F}$ 等. 为了书写方便明确, 向量也用加箭头的字母表示, 如 $\vec{a}$, $\vec{i}$, $\vec{v}$, $\vec{F}$ 等.



图 6-5

在实际问题中, 有些向量与起点有关, 有些向量与起点无关. 这里我们只研究与起点无关的向量, 并称这种向量为自由向量(以后简称为向量).

向量的大小叫做向量的模, $\overrightarrow{P_1P_2}$, $\mathbf{a}$, $\vec{a}$, $\mathbf{F}$ 的模分别记作 $|\overrightarrow{P_1P_2}|$, $|\mathbf{a}|$, $|\vec{a}|$, $|\mathbf{F}|$. 模为 1 的向量叫做单位向量. 一般地, 我们用 $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$ 分别表示与 x 轴、 y 轴、 z 轴正向一致的单位向量, 并称它们为这一坐标系的基本单位向量. 模为 0 的向量叫做零向量, 记作 $\mathbf{0}$ 或 $\vec{0}$.

向量的线性运算满足下列运算规律:

$$(1) \mathbf{a} + \mathbf{b} = \mathbf{b} + \mathbf{a}; \quad (2) (\mathbf{a} + \mathbf{b}) + \mathbf{c} = \mathbf{a} + (\mathbf{b} + \mathbf{c});$$

$$(3) \lambda(\mu\mathbf{a}) = \mu(\lambda\mathbf{a}) = (\lambda\mu)\mathbf{a};$$

$$(4) (\lambda + \mu)\mathbf{a} = \lambda\mathbf{a} + \mu\mathbf{a}; \quad \lambda(\mathbf{a} + \mathbf{b}) = \lambda\mathbf{a} + \lambda\mathbf{b}.$$

与平面向量的坐标表示类似, 空间向量也可以用空间点的坐标表示. 设向量 $\overrightarrow{P_1P_2}$ 的起点为 $P_1(x_1, y_1, z_1)$, 终点为 $P_2(x_2, y_2, z_2)$, 其坐标表示为

$$\overrightarrow{P_1P_2} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1),$$

或
$$\overrightarrow{P_1P_2} = (x_2 - x_1)\mathbf{i} + (y_2 - y_1)\mathbf{j} + (z_2 - z_1)\mathbf{k}.$$

对于非零向量 $\mathbf{a} = \overrightarrow{P_1P_2}$, 我们用它与三个坐标轴的夹角 α , β , γ ($0 \leq \alpha \leq \pi$, $0 \leq \beta \leq \pi$, $0 \leq \gamma \leq \pi$) 来表示它的方向, 称 α , β , γ 为非零向量 $\mathbf{a}$ 的方向角.

根据直角三角形的性质, 容易得到

$$|\mathbf{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2};$$

$$a_x = |\mathbf{a}| \cos \alpha, \quad a_y = |\mathbf{a}| \cos \beta, \quad a_z = |\mathbf{a}| \cos \gamma.$$

其中, $\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma$ 叫做向量 $\mathbf{a}$ 的方向余弦.

例 1 已知两向量 $\mathbf{a} = (6, -4, 10)$, $\mathbf{b} = (3, 4, -9)$, 试求 $\mathbf{a} + 2\mathbf{b}$, $3\mathbf{a} - 2\mathbf{b}$.

解 $\mathbf{a} = (6, -4, 10)$, $\mathbf{b} = (3, 4, -9)$, 则

$$\mathbf{a} + 2\mathbf{b} = (6, -4, 10) + 2(3, 4, -9) = (6, -4, 10) + (6, 8, -18) = (12, 4, -8),$$

$$3\mathbf{a} - 2\mathbf{b} = 3(6, -4, 10) - 2(3, 4, -9) = (18, -12, 30) - (6, 8, -18) = (12, -20, 48).$$

二、数量积与向量积

1. 两向量的数量积

设一物体在常力 $\mathbf{F}$ 的作用下沿直线从点 A 移动到点 B , 用 s 表示位移 $\overrightarrow{AB}$. 由力学知识知道, 力 $\mathbf{F}$ 所做的功为

$$W = |\mathbf{F}| |s| \cos\theta,$$

其中, θ 为 $\mathbf{F}$ 与 s 的夹角(图 6-6).

设向量 $\mathbf{a}$ 与 $\mathbf{b}$ 之间的夹角为 $\theta (0 \leq \theta \leq \pi)$ (图 6-7), 则称数

$$|\mathbf{a}| |\mathbf{b}| \cos\theta$$

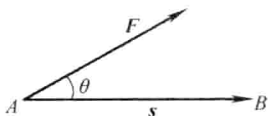


图 6-6

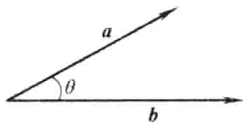


图 6-7

为向量 $\mathbf{a}$ 与 $\mathbf{b}$ 的数量积, 记作 $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$, 即

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = |\mathbf{a}| |\mathbf{b}| \cos\theta.$$

由两向量的数量积的定义可以推得:

$$(1) \mathbf{a} \cdot \mathbf{a} = |\mathbf{a}|^2;$$

$$(2) \text{两个非零向量 } \mathbf{a} \text{ 与 } \mathbf{b} \text{ 垂直的充分必要条件是 } \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 0.$$

根据数量积的定义易见, 数量积满足下列运算规律:

$$(1) \text{交换律 } \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \mathbf{b} \cdot \mathbf{a};$$

$$(2) \text{分配律 } (\mathbf{a} + \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c} = \mathbf{a} \cdot \mathbf{c} + \mathbf{b} \cdot \mathbf{c};$$

$$(3) \text{结合律 } (\lambda \mathbf{a}) \cdot \mathbf{b} = \lambda(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) = \mathbf{a} \cdot (\lambda \mathbf{b}), \lambda \text{ 为实数.}$$

空间两向量的数量积的坐标表示与平面上两向量的数量积的坐标表示类似. 设向量 $\mathbf{a} = (a_x, a_y, a_z)$, $\mathbf{b} = (b_x, b_y, b_z)$, 则向量 $\mathbf{a}$ 与 $\mathbf{b}$ 的数量积的坐标表示式为

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = (a_x, a_y, a_z) \cdot (b_x, b_y, b_z) = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z;$$

向量 $\mathbf{a}$ 的模的坐标表示式为

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{a} = |\mathbf{a}|^2 = a_x^2 + a_y^2 + a_z^2, |\mathbf{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}.$$

当 $\mathbf{a}$ 和 $\mathbf{b}$ 都是非零向量时, 由两向量的数量积的定义, 得

$$\cos\theta = \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}{|\mathbf{a}| |\mathbf{b}|}.$$

将数量积的坐标表示式及向量的模的坐标表示式代入上式, 得

$$\cos\theta = \frac{a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} \sqrt{b_x^2 + b_y^2 + b_z^2}}.$$

这就是两向量夹角余弦的坐标表示式.

2. 两向量的向量积

在研究物体转动问题时, 要考虑作用在物体上的力所产生的力矩. 设点 O 为一杠杆的支点, 力 $\mathbf{F}$ 作用于杠杆上点 P 处, 力 $\mathbf{F}$ 与 $\overrightarrow{OP}$ 的夹角为 θ (图 6-8). 由力学知识知, 力 $\mathbf{F}$ 对支点 O 的力矩 $\mathbf{M}$ 是一向量, 它的模为

$$|\mathbf{M}| = |\overrightarrow{OQ}| \cdot |\mathbf{F}| = |\overrightarrow{OP}| |\mathbf{F}| \sin\theta,$$

而 $\mathbf{M}$ 的方向垂直于 $\overrightarrow{OP}$ 与 $\mathbf{F}$ 所确定的平面, $\mathbf{M}$ 的指向是按右手规则从 $\overrightarrow{OP}$ 以不超过 π 的角转向 $\mathbf{F}$ 来确定的, 即当右手的四指从 $\overrightarrow{OP}$ 以不超过 π 的角转向 $\mathbf{F}$ 握拳时, 大拇指的指向就是 $\mathbf{M}$ 的指向 (图 6-9).

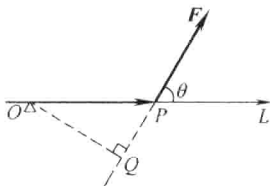


图 6-8

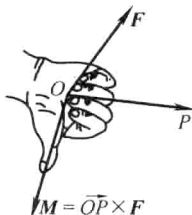


图 6-9

这种由两个已知向量所确定的新向量在其他基础课程中也经常遇到, 如磁场强度、刚体绕轴转动的速度等, 为此给出两个向量向量积的概念.

设向量 $\mathbf{c}$ 是由两个向量 $\mathbf{a}$ 与 $\mathbf{b}$ 按下列方式定出:

(1) $\mathbf{c}$ 的模为 $|\mathbf{c}| = |\mathbf{a}| |\mathbf{b}| \sin(\hat{\mathbf{a}, \mathbf{b}})$;

(2) $\mathbf{c}$ 的方向既垂直于 $\mathbf{a}$ 又垂直于 $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ 的指向按右手规则从 $\mathbf{a}$ 转向 $\mathbf{b}$ 来确定 (图 6-10), 则向量 $\mathbf{c}$ 叫做向量 $\mathbf{a}$ 与 $\mathbf{b}$ 的向量积, 记作 $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$, 即

$$\mathbf{c} = \mathbf{a} \times \mathbf{b}.$$

由向量积的定义知, 上面的力矩 $\mathbf{M}$ 就是 $\overrightarrow{OP}$ 与力 $\mathbf{F}$ 的向量积, 即 $\mathbf{M} = \overrightarrow{OP} \times \mathbf{F}$.

根据向量积的定义容易推得:

(1) $\mathbf{a} \times \mathbf{a} = \mathbf{0}$;

(2) 向量 $\mathbf{a}$ 与 $\mathbf{b}$ 平行的充分必要条件为 $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \mathbf{0}$.

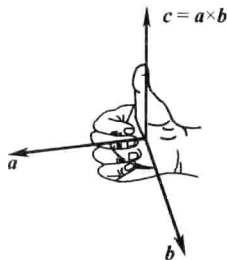


图 6-10

向量积符合下列运算规律:

(1) 反交换律 $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = -\mathbf{b} \times \mathbf{a}$ (向量的向量积不满足交换律);

(2) 分配律 $(\mathbf{a} + \mathbf{b}) \times \mathbf{c} = \mathbf{a} \times \mathbf{c} + \mathbf{b} \times \mathbf{c}$;

(3) 结合律 $(\lambda \mathbf{a}) \times \mathbf{b} = \mathbf{a} \times (\lambda \mathbf{b}) = \lambda(\mathbf{a} \times \mathbf{b})$, λ 为实数.

这些规律这里不予证明.

下面来推导向量积的坐标表示式.

设 $\mathbf{a} = a_x \mathbf{i} + a_y \mathbf{j} + a_z \mathbf{k}$, $\mathbf{b} = b_x \mathbf{i} + b_y \mathbf{j} + b_z \mathbf{k}$. 那么, 按上述运算规律, 得

$$\begin{aligned} \mathbf{a} \times \mathbf{b} &= (a_x \mathbf{i} + a_y \mathbf{j} + a_z \mathbf{k}) \times (b_x \mathbf{i} + b_y \mathbf{j} + b_z \mathbf{k}) \\ &= a_x \mathbf{i} \times (b_x \mathbf{i} + b_y \mathbf{j} + b_z \mathbf{k}) + a_y \mathbf{j} \times (b_x \mathbf{i} + b_y \mathbf{j} + b_z \mathbf{k}) + \\ &\quad a_z \mathbf{k} \times (b_x \mathbf{i} + b_y \mathbf{j} + b_z \mathbf{k}) \\ &= a_x b_x \mathbf{i} \times \mathbf{i} + a_x b_y \mathbf{i} \times \mathbf{j} + a_x b_z \mathbf{i} \times \mathbf{k} + a_y b_x \mathbf{j} \times \mathbf{i} + a_y b_y \mathbf{j} \times \mathbf{j} + \\ &\quad a_y b_z \mathbf{j} \times \mathbf{k} + a_z b_x \mathbf{k} \times \mathbf{i} + a_z b_y \mathbf{k} \times \mathbf{j} + a_z b_z \mathbf{k} \times \mathbf{k}. \end{aligned}$$

由于 $\mathbf{i} \times \mathbf{i} = \mathbf{j} \times \mathbf{j} = \mathbf{k} \times \mathbf{k} = \mathbf{0}$, $\mathbf{i} \times \mathbf{j} = \mathbf{k}$, $\mathbf{j} \times \mathbf{k} = \mathbf{i}$, $\mathbf{k} \times \mathbf{i} = \mathbf{j}$, $\mathbf{i} \times \mathbf{k} = -\mathbf{j}$, $\mathbf{j} \times \mathbf{i} = -\mathbf{k}$, $\mathbf{k} \times \mathbf{j} = -\mathbf{i}$, 所以

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = (a_y b_z - a_z b_y) \mathbf{i} + (a_z b_x - a_x b_z) \mathbf{j} + (a_x b_y - a_y b_x) \mathbf{k}.$$

为了帮助记忆, 利用三阶行列式, 上式可以写成为

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}.$$

例 2 求同时垂直于向量 $\mathbf{a} = (2, 1, 3)$, $\mathbf{b} = (0, -5, 1)$ 的向量 $\mathbf{c}$.

解 因为 $\mathbf{c}$ 同时垂直于 $\mathbf{a}$ 和 $\mathbf{b}$, 所以

$$\mathbf{c} = \pm (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = \pm \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 2 & 1 & 3 \\ 0 & -5 & 1 \end{vmatrix} = \pm (16\mathbf{i} - 2\mathbf{j} - 10\mathbf{k}) = \pm (16, -2, -10).$$

习题 6.2

1. 设 $\mathbf{m} = 2\mathbf{a} - \mathbf{b} + \mathbf{c}$, $\mathbf{n} = -\mathbf{a} + 2\mathbf{b} - \mathbf{c}$, 试用 $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ 表示 $3\mathbf{m} - 4\mathbf{n}$.

2. 已知点 P 到点 $A(0, 0, 12)$ 的距离是 7, $\overrightarrow{OP}$ 的方向余弦是 $\cos \alpha = \frac{2}{7}$, $\cos \beta = \frac{3}{7}$, $\cos \gamma = \frac{6}{7}$,

求点 P 的坐标.

3. 求平行于向量 $\mathbf{a} = (6, 7, -6)$ 的单位向量.

4. 已知 $|\mathbf{a}| = 3$, $|\mathbf{b}| = 6$ 且 $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ 同方向, 求 $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$.

5. 设 $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ 为单位向量, 且满足 $\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c} = \mathbf{0}$, 求 $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} + \mathbf{b} \cdot \mathbf{c} + \mathbf{c} \cdot \mathbf{a}$.

6. 设 $\mathbf{a} = (3, 5, -4)$, $\mathbf{b} = (2, 1, 8)$, 试求 m , 使 $m\mathbf{a} + \mathbf{b}$ 与 z 轴垂直.

7. 求同时垂直于 $\mathbf{a} = 2\mathbf{i} - \mathbf{j} + \mathbf{k}$, $\mathbf{b} = \mathbf{i} + 2\mathbf{j} - \mathbf{k}$ 的单位向量.

第三节 空间曲面及其方程

一、曲面方程的概念

在平面解析几何中,我们把平面曲线看成是动点的几何轨迹,并建立了平面曲线的方程.在空间解析几何中,任何曲面也可以看做是动点的几何轨迹,并可以根据相应的条件建立曲面的方程.

如果曲面 S 与三元方程

$$F(x, y, z) = 0 \quad (6.1)$$

有下述关系:

- (1) 曲面 S 上任一点的坐标都满足方程(6.1);
- (2) 不在曲面 S 上的点的坐标不满足方程(6.1),

那么方程(6.1)就叫做曲面 S 的方程,而曲面 S 就叫做方程(6.1)的图形.

例1 设有两定点 $A(-1, 0, 4)$ 和 $B(1, 2, -1)$, 求与 A, B 等距离的点的轨迹.

解 设动点为 $M(x, y, z)$, 由题意得

$$|MA| = |MB|,$$

则

$$\sqrt{(x+1)^2 + (y-0)^2 + (z-4)^2} = \sqrt{(x-1)^2 + (y-2)^2 + (z+1)^2},$$

两边平方,化简得

$$4x + 4y - 10z + 11 = 0.$$

这方程表示一平面,它是定点 A, B 连线的垂直平分面(中垂面).

例2 试建立球心在点 $M_0(x_0, y_0, z_0)$ 、半径为 R 的球面方程.

解 设 $M(x, y, z)$ 是球面上任意一点(图 6-11), 则

$$|M_0M| = R,$$

即

$$\sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2} = R,$$

或

$$(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2 = R^2. \quad (6.2)$$

球面上所有点的坐标都满足方程(6.2), 而不在球面上的点与 M_0 的距离都不等于 R , 因而其坐标都不满足方程(6.2). 方程(6.2)就是球心在点 $M_0(x_0, y_0, z_0)$ 、半径为 R 的球面方程.

球面的一般方程为

$$Ax^2 + Ay^2 + Az^2 + Dx + Ey + Fz + G = 0. \quad (6.3)$$

这是关于 x, y, z 的二次方程, 其特点是缺 xy, yz, zx 项, 且

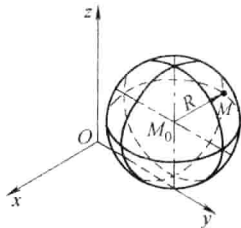


图 6-11

平方项系数相等.

当 $x_0 = y_0 = z_0 = 0$ 时, 得到球心在原点的球面方程为

$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2.$$

二、旋转曲面与柱面

1. 旋转曲面

一条平面曲线绕该平面内的一条定直线旋转一周而形成的曲面叫做**旋转曲面**. 这条定直线, 叫做旋转曲面的**轴**.

设在 yOz 平面上有一已知曲线 C , 它的方程为

$$f(y, z) = 0,$$

把这条曲线绕 z 轴旋转一周, 就得到一个以 z 轴为轴的旋转曲面(图 6-12). 现在我们来求这个曲面的方程.

设 $M_0(0, y_0, z_0)$ 是曲线 C 上任意一点, 则有

$$f(y_0, z_0) = 0.$$

当曲线 C 绕 z 轴旋转时, 点 M_0 转到点 $M(x, y, z)$, 其中 $z = z_0$, 点 M 到 z 轴的距离为

$$d = \sqrt{x^2 + y^2} = |y_0|.$$

将 $z = z_0$, $y_0 = \pm \sqrt{x^2 + y^2}$ 代入 $f(y_0, z_0) = 0$ 中, 得旋转曲面的方程为

$$f(\pm \sqrt{x^2 + y^2}, z) = 0. \quad (6.4)$$

由这个方程可以看出, 只要在曲线 C 的方程 $f(y, z) = 0$ 中将 y 以 $\pm \sqrt{x^2 + y^2}$ 代替, 就得到曲线 C 绕 z 轴旋转所成的旋转曲面的方程.

同理, 曲线 C 绕 y 轴旋转所成的旋转曲面的方程为

$$f(y, \pm \sqrt{x^2 + z^2}) = 0. \quad (6.5)$$

例 3 一直线 L 绕另一条与直线 L 相交的直线旋转一周, 所得旋转曲面叫做**圆锥面**. 试建立顶点在原点 O 、旋转轴为 z 轴的圆锥面的方程(图 6-13).

解 在 yOz 坐标面上, 直线 L 的方程为

$$z = y \cot \alpha. \quad (6.6)$$

由于 z 轴为旋转轴, 所以, 只要将方程(6.6)中的 y 改为 $\pm \sqrt{x^2 + y^2}$, 便得到这圆锥面的方程为

$$z = \pm \sqrt{x^2 + y^2} \cot \alpha$$

或

$$z^2 = a^2(x^2 + y^2), \quad (6.7)$$

其中, $a = \cot \alpha$.

2. 柱面

一直线 L 沿一定曲线 C 平行移动所形成的轨迹, 叫做**柱面**(图 6-14). 动直线 L

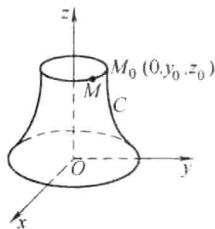


图 6-12

叫做柱面的**母线**，定曲线 C 叫做柱面的**准线**。

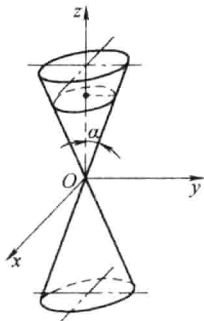


图 6-13

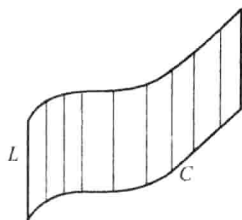


图 6-14

一般来说，不完全的三元方程（即 x, y, z 不同时出现的方程）在空间直角坐标系中表示柱面。方程 $f(x, y) = 0$ 只含 x, y 而不含 z ，在空间中就表示母线平行于 z 轴的柱面；同理，方程 $f(y, z) = 0$ 表示母线平行于 x 轴的柱面；方程 $f(x, z) = 0$ 表示母线平行于 y 轴的柱面。

例如：方程 $x^2 + y^2 = R^2$ 表示一个柱面，它表示母线平行于 z 轴的柱面，准线是 xOy 面上的一个以原点为圆心、半径为 R 的圆（图 6-15），这个柱面叫做**圆柱面**。

类似地，方程 $y^2 = 2x$ 表示母线平行于 z 轴，准线是 xOy 面上的抛物线 $y^2 = 2x$ 的柱面，这个柱面叫做**抛物柱面**（图 6-16）。

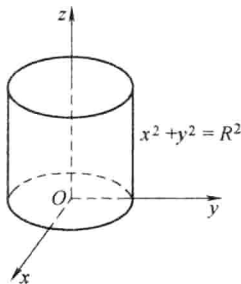


图 6-15

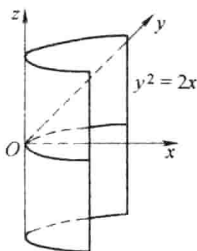


图 6-16

三、平面及其方程

1. 平面的点法式方程

若一个非零向量 $\mathbf{n}$ 垂直于平面 π ，则称向量 $\mathbf{n}$ 为平面 π 的一个**法向量**。

若 $\mathbf{n}$ 是平面 π 的一个法向量， $M_0(x_0, y_0, z_0)$ 是平面 π 的一个定点，下面建立平面 π 的方程。

设 $M(x, y, z)$ 为平面 π 上的任一点，由于 $\mathbf{n} \perp \pi$ ，因此 $\mathbf{n} \perp \overrightarrow{M_0M}$ 。即