数学一题多解

（平面三角）

数学通讯　增刊

数 学 一 题 多 解

（平 面 三 角）

一 水

《教学通讯》编辑部

数 学 一 题 多 解

（平面三角）

一　　水

《教学通讯》编辑部出版

（郑州市南阳路）

郑州铁路局印刷厂印刷内文

河南新华第二印刷厂印刷封面

（内部发行）

代号36—36　定价0.68元

前　　言

为了激发学生学习数学的兴趣，开拓解题的思路，加强基本知识的综合运用，提高分析问题和解决问题的能力，我们汇集了一部分一题多解的题目，经过筛选和整理，编写成了这套《数学一题多解》。

此书可供中学数学教师在教材的适当地方选作范例用和中学学生、知识青年自学时参考用。建议在阅读此书时，最好先不看书中的答案，可根据题目的条件和结论，从各个不同角度进行分析和思考，寻求几种解法，并将各种解法进行比较，找出最合理和最简捷的解法，最后再对照书中的答案。如果能做到这一点，或许有些裨益。

本书在编写过程中，承蒙郑州师专仝允潮，马自力老师审稿和指导，省教材编辑室梁秋莲同志和《数学通讯》编辑部马恩超同志帮助绘图，在此一并致谢。

由于水平所限，错误之处，恳请读者批评指正。

一　水

1979.10于郑州

目　　录

一　三角函数及其性质

1. 把$\sin(-1001°)$化为锐角三角函数.

【解法一】

$$\begin{aligned}\sin(-1001°) &= -\sin1001°\\ &= -\sin(360°\times2+281°)\\ &= -\sin281°\\ &= -\sin(360°-79°)\\ &= -\sin(-79°)\\ &= -(-\sin79°)\\ &= \sin79°.\end{aligned}$$

【解法二】

$$\begin{aligned}\sin(-1001°) &= \sin(-3\times360°+79°)\\ &= \sin79°\end{aligned}$$

2. 已知 $\sin\alpha=\frac{5}{13}$，且$90°<\alpha<180°$，求$\cos\alpha$和$\operatorname{tg}\alpha$的值.

【解法一】

由　$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$，　　$90°<\alpha<180°$，

得　　　$\cos\alpha=-\sqrt{1-\sin^2\alpha}$.

$$\because \qquad \sin\alpha = \frac{5}{13},$$

$$\therefore \quad \cos\alpha = -\sqrt{1-\left(\frac{5}{13}\right)^2} = -\sqrt{\frac{13^2-5^2}{13}} = -\frac{12}{13}.$$

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{\frac{5}{13}}{-\frac{12}{13}} = -\frac{5}{12}.$$

【解法二】

依三角函数的定义，按题设条件作图（图1）。

$$\because \qquad \sin\alpha = \frac{MP}{OP} = \frac{5}{13},$$

设 $\quad |OP| = 13K,$

$\quad |MP| = 5K.$

根据勾股定理，得

$$|OM| = \sqrt{OP^2 - MP^2} = \sqrt{(13K)^2 - (5K)^2}$$
$$= 12K,$$

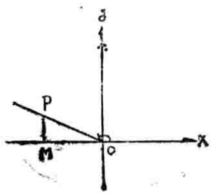

图1

$\therefore\quad |\cos\alpha| = \frac{|OM|}{|OP|} = \frac{12K}{13K} = \frac{12}{13}$.

由题意 $90° < \alpha < 180°$，知

$$\cos\alpha < 0,$$

$$\therefore\qquad \cos\alpha = -\frac{12}{13}.$$

同样 $|\mathrm{tg}\,\alpha| = \frac{|MP|}{|OM|} = \frac{5K}{12K} = \frac{5}{12}$.

$\because\quad \mathrm{tg}\,\alpha < 0$,

$\therefore\quad \mathrm{tg}\,\alpha = -\frac{5}{12}$.

注意 所求函数值的符号是根据已知角所在象限来确定的。

3。已知 $\mathrm{ctg}x = -3$， 求$\sin x$的值。

【解法一】

$\because\quad \mathrm{ctg}x = -3,\qquad \therefore\quad \frac{\cos x}{\sin x} = -3,$

$$\cos x = -3\sin x.$$

上式两边平方，得

$$\cos^2 x = 9\sin^2 x,$$

$$1 - \sin^2 x = 9\sin^2 x.$$

$\therefore\quad \sin^2 x = \frac{1}{10},\qquad \sin x = \pm\frac{\sqrt{10}}{10},$

即　x在第Ⅱ象限时，$\sin x=\frac{\sqrt{10}}{10}$；

x在第Ⅳ象限时，$\sin x=-\frac{\sqrt{10}}{10}$.

【解法二】

$\because$　$\operatorname{ctg}x=-3$，

$\therefore$　$\operatorname{cosec}^2 x=1+\operatorname{ctg}^2 x=1+(-3)^2=10$.

$\therefore$　$\frac{1}{\sin^2 x}=10$，　$\sin^2 x=\frac{1}{10}$.

$\therefore$　$\sin x=\pm\frac{\sqrt{10}}{10}$.

即　x在第Ⅱ象限时，$\sin x=\frac{\sqrt{10}}{10}$；

x在第Ⅳ象限时，$\sin x=-\frac{\sqrt{10}}{10}$.

4．求函数$y=\sqrt{\cos x\cdot\operatorname{ctg}x}$的定义域。

【解法一】

因负数没有偶次方根，故cosx与ctgx必须同号。

当cosx与ctgx同号时，x一定在Ⅰ、Ⅱ象限，且$x\neq K\pi$。因为若$x=K\pi$（k为整数），ctgx无意义。

$\therefore$　函数$y=\sqrt{\cos x\cdot\operatorname{ctg}x}$的定义域是：

$$2k\pi<x<2k\pi+\pi.$$

【解法二】

因负数没有偶次方根，所以必须$\cos x\cdot\operatorname{ctg}x\geqslant 0$，且

使ctgx有意义。由此可得

$$(1)\begin{cases}\cos x\geqslant 0,\\ \operatorname{ctg}x>0;\end{cases}\quad 或 \quad (2)\begin{cases}\cos x\leqslant 0,\\ \operatorname{ctg}x<0.\end{cases}$$

解不等式组(1),得

$$2k\pi<x\leqslant 2k\pi+\frac{\pi}{2}. \qquad (k为整数)$$

解不等式组(2),得

$$2k\pi+\frac{\pi}{2}\leqslant x<2k\pi+\pi. \qquad (k为整数)$$

把不等式组(1)、(2)的解结合起来,得函数y的定义域是:

$$2k\pi<x<2k\pi+\pi.$$

5. 不查表,求下式的值。

$\sin^4 22.5°+\sin^4 67.5°+\sin^4 112.5°+\sin^4 157.5°$

【解法一】

$$\because \quad \sin 22.5°=\sin 157.5°,$$

$$\sin 67.5°=\sin 112.5°,$$

$$\sin 67.5°=\cos 22.5°.$$

$$\therefore \quad 原式=2\sin^4 22.5°+2\sin^4 67.5°$$

$$=2(\sin^4 22.5°+\cos^4 22.5°)$$

$$=2\Big[(\sin^2 22.5°+\cos^2 22.5°)^2$$

$$-2\sin^2 22.5°\cos^2 22.5°\Big]$$

$$2-4\sin^2 22.5°\cos^2 22.5°$$
$$=2-(2\sin 22.5°\cos 22.5°)^2$$
$$=2-\sin^2 45°$$
$$=2-\frac{1}{2}=\frac{3}{2}.$$

【解法二】

$\because$
$$\sin 22.5°=\cos 67.5°,$$
$$\sin 67.5°=\cos 22.5°,$$
$$\sin 112.5°=-\cos 157.5°,$$
$$\sin 157.5°=-\cos 112.5°,$$

$\therefore$ 原式 $=\cos^4 67.5°+\cos^4 22.5°+\cos^4 157.5°$
$+\cos^4 112.5°$
$=\cos^4 67.5°+\cos^4 22.5°+\cos^4(180°-157.5°)$
$+\cos^4(180°-112.5°)$
$=\cos^4 67.5°+\cos^4 22.5°+\cos^4 22.5°$
$+\cos^4 67.5°$
$=2(\cos^4 22.5°+\cos^4 67.5°)$
$=2\left[\cos^4 22.5°+\sin^4(90°-67.5°)\right]$
$=2(\cos^4 22.5°+\sin^4 22.5°)$
$=2\left[(\cos^2 22.5°+\sin^2 22.5°)^2\right.$

$$-2\cos^2 22.5°\sin^2 22.5°\Big]$$

$$=2\left(1-\frac{1}{2}\sin^2 45°\right)$$

$$=2\left(1-\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\right)=\frac{3}{2}.$$

【解法三】

$$原式=\cos^4 67.5°+\cos^4 22.5°+\cos^4 157.5°$$

$$+\cos^4 112.5°$$

$$=\cos^4 67.5°+\cos^4 22.5°$$

$$+\cos^4(180°-22.5°)+\cos^4(180°-67.5°)$$

$$=\cos^4 67.5°+\cos^4 22.5°+\cos^4 22.5°$$

$$+\cos^4 67.5°$$

$$=2\left(\frac{1+\cos 45°}{2}\right)^2+2\left(\frac{1+\cos 135°}{2}\right)^2$$

$$=2\left(\frac{1+\frac{\sqrt{2}}{2}}{2}\right)^2+2\left(\frac{1-\frac{\sqrt{2}}{2}}{2}\right)^2$$

$$=2\cdot\frac{(2+\sqrt{2})^2}{16}+2\cdot\frac{(2-\sqrt{2})^2}{16}$$

$$=\frac{4+4\sqrt{2}+2}{8}+\frac{4-4\sqrt{2}+2}{8}$$

$$=\frac{12}{8}=\frac{3}{2}.$$

6. 求证： $\dfrac{\cos\alpha+\sin\alpha}{\cos\alpha-\sin\alpha}=\operatorname{tg}(45^\circ+\alpha)$.

【证法一】

$$左边=\frac{\cos\alpha-\cos(90^\circ+\alpha)}{\cos\alpha+\cos(90^\circ+\alpha)}$$

$$=\frac{-2\sin(45^\circ+\alpha)\sin(-45^\circ)}{2\cos(45^\circ+\alpha)\cos(-45^\circ)}$$

$$=\frac{\sin(45^\circ+\alpha)}{\cos(45^\circ+\alpha)}$$

$$=\operatorname{tg}(45^\circ+\alpha)=右边.$$

∴ 原式成立.

【证法二】

$$左边=\frac{\frac{\sqrt{2}}{2}\cos\alpha+\frac{\sqrt{2}}{2}\sin\alpha}{\frac{\sqrt{2}}{2}\cos\alpha-\frac{\sqrt{2}}{2}\sin\alpha}$$

$$=\frac{\sin45^\circ\cos\alpha+\cos45^\circ\sin\alpha}{\cos45^\circ\cos\alpha-\sin45^\circ\sin\alpha}$$

$$=\frac{\sin(45^\circ+\alpha)}{\cos(45^\circ+\alpha)}$$

$$=\operatorname{tg}(45^\circ+\alpha)=右边.$$

$\therefore$ 原式成立。

【证法三】

$$右边=\frac{\operatorname{tg}45^\circ+\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}45^\circ\operatorname{tg}\alpha}$$

$$=\frac{1+\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}\alpha}$$

$$=\frac{(1+\operatorname{tg}\alpha)\cos\alpha}{(1-\operatorname{tg}\alpha)\cos\alpha}$$

$$=\frac{\cos\alpha+\sin\alpha}{\cos\alpha-\sin\alpha}=左边。$$

$\therefore$ 原式成立。

7. 已知 $\sin x+\sin^2x=1$,

求证 $\cos^2x+\cos^4x=1$。

【证法一】

$\because$ $\sin x+\sin^2x=1$,

$\therefore$ $\sin^2x+\sin x-1=0$。

解这个二次方程，得

$$\sin x=\frac{-1\pm\sqrt{1+4}}{2}=\frac{-1\pm\sqrt{5}}{2}.$$

$$\therefore\ \sin x=\frac{-1+\sqrt{5}}{2},\ \sin x=\frac{-1-\sqrt{5}}{2}<-1.(舍去)$$

$$而\ \cos^2x=1-\sin^2x=1-\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^2$$

$$=\frac{\sqrt{5}-1}{2},$$

$\therefore\quad \cos^4 x=(\cos^2 x)^2=\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^2=\frac{3-\sqrt{5}}{2}.$

$\therefore\quad \cos^2 x+\cos^4 x=\frac{\sqrt{5}-1}{2}+\frac{3-\sqrt{5}}{2}=1.$

$\therefore\quad \cos^2 x+\cos^4 x=1.$

【证法二】

$\because\quad \sin x+\sin^2 x=1,$

$\therefore\quad \sin x=1-\sin^2 x=\cos^2 x.$

$\sin x=\cos^2 x.$

将上式两边平方，得

$\sin^2 x=\cos^4 x.$

$\because\quad 1-\cos^2 x=\sin^2 x.$

$\therefore\quad 1-\cos^2 x=\cos^4 x,$

$\therefore\quad \cos^2 x+\cos^4 x=1.$

8. 求证：$\dfrac{\cos\alpha}{1-\sin\alpha}=\dfrac{1+\sin\alpha}{\cos\alpha}.$

【证法一】

$$左边=\frac{\cos\alpha(1+\sin\alpha)}{(1-\sin\alpha)(1+\sin\alpha)}$$

$$=\frac{\cos\alpha(1+\sin\alpha)}{1-\sin^2\alpha}$$

$$=\frac{\cos\alpha(1+\sin\alpha)}{\cos^2\alpha}$$

$$=\frac{1+\sin\alpha}{\cos\alpha}=\text{右边。}$$

∴　　原式成立。

【证法二】

∵　$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$，

∴　$\cos^2\alpha=1-\sin^2\alpha$。

上式两边同除以$\cos\alpha(1-\sin\alpha)$，得

$$\frac{\cos\alpha}{1-\sin\alpha}=\frac{1+\sin\alpha}{\cos\alpha}。$$

∴　　原式成立。

9．求证：$\dfrac{1+\sec\alpha+\operatorname{tg}\alpha}{1+\sec\alpha-\operatorname{tg}\alpha}=\sec\alpha+\operatorname{tg}\alpha$。

【证法一】

∵　$\sec^2\alpha-\operatorname{tg}^2\alpha=1$。

∴　左边$=\dfrac{\sec^2\alpha-\operatorname{tg}^2\alpha+\sec\alpha+\operatorname{tg}\alpha}{1+\sec\alpha-\operatorname{tg}\alpha}$

$$=\frac{(\sec\alpha+\operatorname{tg}\alpha)(\sec\alpha-\operatorname{tg}\alpha)+(\sec\alpha+\operatorname{tg}\alpha)}{1+\sec\alpha-\operatorname{tg}\alpha}$$

$$=\frac{(\sec\alpha+\operatorname{tg}\alpha)(\sec\alpha-\operatorname{tg}\alpha+1)}{1+\sec\alpha-\operatorname{tg}\alpha}$$

$$=\sec\alpha+\operatorname{tg}\alpha=\text{右边。}$$

$\therefore$ 原式成立。

【证法二】

$\because \quad \sec^2\alpha - \operatorname{tg}^2\alpha = 1,$

$$\therefore \quad \frac{\sec\alpha + \operatorname{tg}\alpha}{1} = \frac{1}{\sec\alpha - \operatorname{tg}\alpha}.$$

由等比定理，得

$$\frac{\sec\alpha + \operatorname{tg}\alpha + 1}{1 + \sec\alpha - \operatorname{tg}\alpha} = \frac{\sec\alpha + \operatorname{tg}\alpha}{1},$$

即
$$\frac{1 + \sec\alpha + \operatorname{tg}\alpha}{1 + \sec\alpha - \operatorname{tg}\alpha} = \sec\alpha + \operatorname{tg}\alpha.$$

$\therefore$ 原式成立。

【证法三】

$$左边 = \frac{1 + \sec\alpha + \operatorname{tg}\alpha}{(\sec^2\alpha - \operatorname{tg}^2\alpha) + (\sec\alpha - \operatorname{tg}\alpha)}$$

$$= \frac{1 + \sec\alpha + \operatorname{tg}\alpha}{(\sec\alpha - \operatorname{tg}\alpha)(1 + \sec\alpha + \operatorname{tg}\alpha)}$$

$$= \frac{1}{\sec\alpha - \operatorname{tg}\alpha} = \frac{\cos\alpha}{1 - \sin\alpha}$$

$$= \frac{\cos\alpha(1 + \sin\alpha)}{(1 - \sin\alpha)(1 + \sin\alpha)}$$

$$= \frac{\cos\alpha(1 + \sin\alpha)}{1 - \sin^2\alpha} = \frac{1 + \sin\alpha}{\cos\alpha}$$