

Z 427/1033 (2008) - (10)



NUAA2009044427



能源与动力学院

202



2009044427

12

目录

序号	姓名	职称	单位	论文题目	刊物、会议名称	年、卷、期
1	宋迎东 张福军 岳珠峰 蔡显新	正高 博士生 正高 正高	021 608所 西工大 608所	一类冷却导向叶片的多学科设计优化	航空动力学报	2008年23卷11期
2	许仁红 宋迎东 李龙彪 孙志刚	硕士生 正高 博士生 副高	021 021 021 021	准静态加载下陶瓷基复合材料层合板应力-应变曲线的模拟	航空动力学报	2008年23卷10期
3	孙杰 宋迎东 孙志刚 高希光	博士生 正高 副高 博士后	021 021 021 021	水平集法在多相材料微观结构优化中的应用	航空动力学报	2008年23卷8期
4	孙杰 宋迎东 孙志刚	博士生 正高 副高	021 021 021	涡轮冷却叶片热-固耦合分析与优化设计	航空动力学报	2008年23卷12期
5	黄寿伟 宋迎东	硕士生 正高	021 021	某型发动机附件传动机匣应力分析	航空发动机	2008年34卷4期
6	孙杰 黄寿伟 孙志刚	博士生 硕士生 副高	021 021 021	多场耦合的宏-细观统一本构模型	南京航空航天大学博士论坛	2008年
7	李龙彪 宋迎东 孙志刚 许仁红	博士生 正高 副高 硕士生	021 021 021 021	陶瓷基层合复合材料基体裂纹演化研究	南京航空航天大学博士论坛	2008年
8	周超羨 孙志刚 高希光 宋迎东	硕士生 副高 博士生 正高	021 021 021 021	基于四边形子胞的多尺度温度场计算方法	中国航空学会第十四届发动机结构强度振动学术会议	2008年10月
9	孙志刚 李龙彪 朱彬 宋迎东	副高 博士生 硕士生 正高	021 021 021 021	界面层参数对单向陶瓷基复合材料单轴拉伸行为的影响	中国航空学会第十四届发动机结构强度振动学术会议	2008年10月
10	刘存 孙志刚 胡绪腾 宋迎东	硕士生 副高 博士生 正高	021 021 021 021	某发动机Ⅱ级涡轮叶片低循环疲劳寿命分析	中国航空学会第十四届发动机结构强度振动学术会议	2008年10月
11	季玉辉 宋迎东 胡绪腾	硕士生 正高 博士生	021 021 021	TC4合金应变率和温度相关变形的Johnson-Cook模型	中国航空学会第十四届发动机结构强度振动学术会议	2008年10月
12	李龙彪 孙志刚 许仁红 宋迎东	博士生 副高 硕士生 正高	021 021 021 021	陶瓷基层合复合材料疲劳迟滞回线模拟	中国航空学会第十四届发动机结构强度振动学术会议	2008年10月
13	胡绪腾 宋迎东 董风亮	博士生 正高 本科生	021 021 021	应用TS-SEP法预测热机械疲劳寿命	中国航空学会第十四届发动机结构强度振动学术会议	2008年10月
14	何晓静 孙志刚 李龙彪 宋迎东	硕士生 副高 博士生 正高	021 021 021 021	二维编织陶瓷基复合材料的力学行为模拟	中国航空学会第十四届发动机结构强度振动学术会议	2008年10月
15	高希光 孙志刚 胡绪腾 宋迎东 朱如鹏	博士后 副高 博士生 正高 正高	021 021 021 021 021	可模拟裂纹的高精度四边形子胞模型	中国航空学会第十四届发动机结构强度振动学术会议	2008年10月
16	胡绪腾 宋迎东 季玉辉	博士生 正高 硕士生	021 021 021	TC4合金应变率和温度相关变形试验	中国航空学会第十四届发动机结构强度振动学术会议	2008年10月
17	雷航 孙志刚 李龙彪 宋迎东	硕士生 副高 博士生 正高	021 021 021 021	陶瓷基层合复合材料的初始开裂	中国航空学会第十四届发动机结构强度振动学术会议	2008年10月
18	孙杰 孙志刚 刘存 宋迎东	博士生 副高 硕士生 正高	021 021 021 021	考虑强度和位移约束的涡轮盘优化设计	中国航空学会第十四届发动机结构强度振动学术会议	2008年10月

目录

序号	姓名	职称	单位	论文题目	刊物、会议名称	年、卷、期
19	赵龙 孙志刚 李龙彪 宋迎东	硕士生 副高 博士生 正高	021 021 021 021	蒙特卡罗模拟单向陶瓷基复合材料单轴拉伸行为	中国航空学会第十四届发动机结构强度振动学术会议	2008年10月
20	郑君 温卫东 崔海涛 高建辉	博士生 正高 正高 博士生	021 021 021 021	2.5维编织结构复合材料的几何模型	复合材料学报	2008年25卷2期
21	李俭 温卫东 崔海涛	博士生 正高 正高	021 021 021	基于傅立叶级数的缠绕复合材料刚度预测方法	复合材料学报	2008年25卷5期
22	张宏建 温卫东 崔海涛 陶永昌	博士生 正高 正高 硕士生	021 021 021 021	不同温度下IC10合金的本构关系	航空学报	2008年29卷2期
23	郑君 温卫东 崔海涛 高建辉	博士生 正高 正高 博士生	021 021 021 021	2.5维机织结构复合材料的弹性性能预测	航空动力学报	2008年23卷11期
24	古远兴 温卫东 崔海涛	博士生 正高 正高	021 021 021	高低周载荷作用下燕尾榫结构的微动疲劳寿命预测	推进技术	2008年29卷9期
25	袁辉 温卫东 崔海涛	博士生 正高 正高	021 021 021	纤维单丝及纤维束强度统计学分析	纺织学报	2008年29卷1期
26	邵将 温卫东 崔海涛	博士生 正高 正高	021 021 021	三维纵横步进编织预成型件的计算机仿真	纺织学报	2008年29卷9期
27	张宏建 温卫东 崔海涛 陶永昌	博士生 正高 正高 硕士生	021 021 021 021	IC10合金的高温拉伸性能	机械工程材料	2008年32卷3期
28	李俭 温卫东 崔海涛	博士生 正高 正高	021 021 021	缠绕复合材料力学特性研究进展	材料科学与工程学报	2008年26卷3期
29	李俭 温卫东 崔海涛 徐颖	博士生 正高 正高 中级	021 021 021 021	缠绕复合材料圆筒结构应力分析方法	中国航空学会第十四届发动机结构强度振动学术会议	2008年10月
30	杨莹 崔海涛 温卫东	硕士生 正高 正高	021 021 021	二维机织复合材料强度预测方法研究	中国航空学会第十四届发动机结构强度振动学术会议	2008年10月
31	袁辉 温卫东 崔海涛 徐颖	博士生 正高 正高 中级	021 021 021 021	碳/碳复合材料断裂韧性实验研究	中国航空学会第十四届发动机结构强度振动学术会议	2008年10月
32	郑君 温卫东 崔海涛	博士生 正高 正高	021 021 021	几何假设对2.5D机织复合材料刚度预测的影响	中国航空学会第十四届发动机结构强度振动学术会议	2008年10月
33	张光磊 温卫东	中级 正高	院机关 021	党校教育的现状与对策建议	南京航空航天大学学报（社科版）	2008年10卷2期
34	张光磊 温卫东	中级 正高	院机关 021	党课教学改革研究	今日南国	2008年9月 总第103期

文章编号: 1000-8055(2008)11-1982-06

一类冷却导向叶片的多学科设计优化

宋迎东¹, 张福军^{1,3}, 岳珠峰², 蔡显新³

(1. 南京航空航天大学 能源与动力学院, 南京 210006;

2. 西北工业大学 力学与土木建筑学院, 西安 710072;

3. 中国航空动力机械研究所, 株洲 412002)

摘 要: 提出含冲击、孔排及尾缘劈缝气膜、扰流柱复合冷却方式的燃气涡轮导向叶片多学科设计优化的一种方法, 介绍了研究对象的结构特点、换热系数计算方法并给出了部分计算公式, 建立了一种一类冷却导向叶片的多学科设计优化模型, 以某燃气涡轮导向叶片为例, 进行了多学科设计优化, 获得了较好的效果。

关 键 词: 燃气涡轮; 导向叶片; 冷却; 多学科优化设计

中图分类号: V231.1

文献标识码: A

Multidisciplinary design optimization of a cooling vane

SONG Ying-dong¹, ZHANG Fu-jun^{1,3}, YUE Zhu-feng², CAI Xian-xin³

(1. College of Energy and Power Engineering,

Nanjing University of Aeronautics and Astronautics, Nanjing 210016;

2. Engineering Mechanics Department, Northwestern Polytechnical University, Xi'an 710072;

3. China Aviation Powerplant Research Institute, Zhuzhou 412002)

Abstract: A multidisciplinary design optimization (MDO) procedure for a vane with jet impinging cooling, film cooling of slots and holes, pin-fin array cooling was proposed in this paper. The structure of the vane and the prediction method of heat transfer were discussed and some of the formulas are presented. A mathematic model is established for multidisciplinary design optimization of a vane. A vane of a gas turbine is taken as an example to be optimized by using the procedure presented in this report. The obtained results show that the presented procedure is efficient.

Key words: gas turbine; vane; cooling; multidisciplinary design optimization

提高涡轮前温度是提高燃气涡轮发动机性能的重要途径。涡轮前温度从上个世纪 50 年代 1100 K 左右逐年提高, 发展到目前的 2000 K 左右。涡轮进口温度的不断提高, 已经远远超过叶片材料的熔点, 燃气涡轮叶片将首当其冲地受到影响, 因而对其气动、冷却及强度设计提出了严峻的挑战。

目前燃气涡轮叶片一般采用各学科相对独立的设计方法, 其效率较低, 综合设计质量难以提

高。即便某个学科获得了较好的结果, 而另一学科的结果可能很不理想。为此本文对一种涡轮导向叶片的多学科设计优化方法进行研究, 该方法考虑了冲击、扰流柱排、孔排及尾缘槽缝气膜等冷却方式。多学科设计优化 (MDO, multidisciplinary design optimization) 是一种通过充分探索和利用工程系统中相互作用的协调机制来设计复杂系统和子系统的方法^[1]。其主要思想是, 在复杂系统设

收稿日期: 2007-10-26; 修订日期: 2008-04-07

基金项目: 湖南省自然科学基金(05JJ30002); 航空科学基金(05c52013)

作者简介: 宋迎东(1969-), 男, 安徽太湖人, 教授, 博士, 主要从事结构强度振动, 多学科设计优化, 材料, 可靠性, 载荷等方向的研究。E-mail: ydsong@nuaa.edu.cn

计的整个过程中,集成各个学科知识,应用有效的设计优化策略,通过充分利用各个学科之间的相互作用所产生的协同效应获得系统的整体最优解,同时缩短设计周期.通过本文方法的研究,以期能提高涡轮带冠叶片的设计质量和设计效率.

1 结构简介

图 1 为研究的涡轮导向叶片结构示意图.来自压气机的冷却空气通过冲击管冲击叶片的内部壁面(参见图 2).冲击冷却由一股或多股冷气射流冲击热表面,在冲击驻点区形成强行的对流换热.这种冷却方式适用于重点冷却局部热表面,对于大面积的冲击冷却必须采用冷气射流孔阵或多排缝射流.冲击冷却主要用于叶片内部前缘冷却.

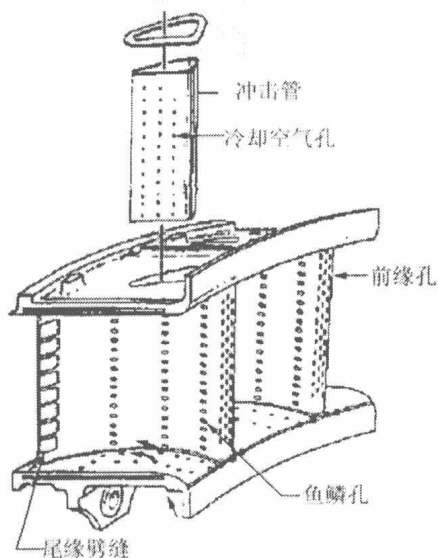


图 1 导向叶片的结构示意图

Fig. 1 A vane structure

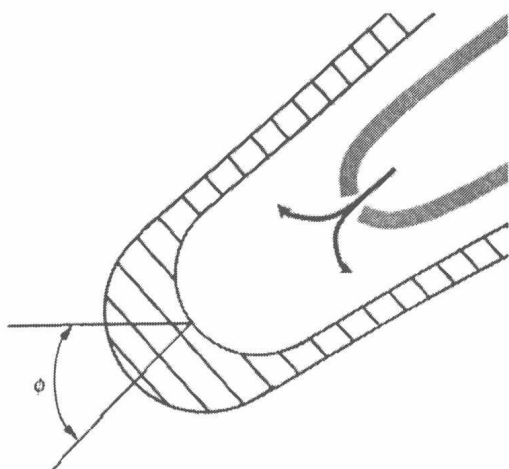


图 2 前缘冲击冷却

Fig. 2 Jet impinging cooling

在冲击冷却之后冷却空气经过前缘孔、鱼鳞孔、中弦孔和尾缘劈缝用作气膜冷却.气膜冷却从热表面的孔排或缝隙中吹出冷气流,并在热表面上形成一层冷气膜,用以阻隔热燃气对固体表面的加热.这是一种十分有效的热防护措施,同时还可以阻隔热燃气对固体的腐蚀.由于冷气膜与主燃气不断掺混,故沿流动方向其隔热作用逐渐下降,为了保持气膜的隔热作用,就需要在一排气膜实效处再喷出冷气形成新的气膜.涡轮叶片上气膜孔径一般为 $0.3 \sim 1 \text{ mm}$.冷气射流轴线与主流流的夹角被称为入射角,由于构造上的原因,涡轮叶片上的构造角较大.

由于叶片尾缘较薄,其内部很难布置有效的冷却结构,目前常采用在空心的叶片尾缘缝隙中安排交错排列的扰流柱(参见图 3),以提高空心叶片尾缘中空气流对叶片尾缘内壁的换热系数.通常扰流柱带来的换热面积增加在 $6\% \sim 10\%$ 之间,带来的换热系数增加可在一倍以上.除叶片尾缘以外在叶片前缘、叶盆、叶背的冷却结构中也常采用扰流柱以强化与冷却气流的换热.本文仅考虑叶身的优化问题,因此在分析模型中将不包括上下缘板.

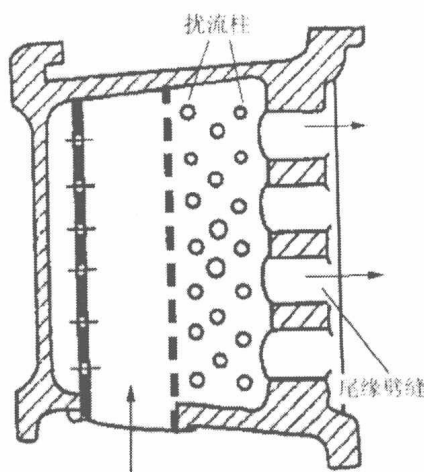


图 3 尾缘处的扰流柱强化冷却

Fig. 3 Pin-fin array cooling

2 多学科设计与分析

涡轮冷却导向叶片的设计主要涉及气动、结构、传热、强度等学科.由于在设计优化的过程中,需要反复对叶片进行多学科分析,因此在分析方法上应对精度和时间上进行权衡.本文在不同学科选用的分析方法如下:

1) 叶片造型采用传统的抛物线/双纽线造型方法;

2) 气动分析选择耗时较少且具有良好精度的 S_1 - S_2 两类流面迭代的准三维方法;

3) 热传导采用经验公式,根据流场数据及叶片各个不同部位计算换热系数,然后采用三维有限元的方法进行温度场计算.温度场计算的有限元网格与强度分析的有限元网格相同;

4) 强度分析采用三维有限元方法进行叶片强度分析.

气动分析的输出流场数据将作为热传导(换热系数和温度场)分析和的输入数据,叶片造型获得的叶型数据将作为三维有限元网格生成的输入数据.多学科分析步骤如下所示.

本文进行三维叶片换热系数计算的过程为:

1) 气动设计,包括叶片造型、叶片径向积叠、 S_2 计算、 S_1 计算等,以便获得流场分布及出口处的效率、损失、膨胀比等参数,这些数据一方面将作为换热系数计算、温度场计算、结构强度分析的输入数据,另一方面可供优化设计(目标函数、约束条件等)选用;

2) 根据气动设计输出的叶型数据,自动生成3个以上截面的二维有限元网格,这些二维网格的单元及节点都是一一对应的;

3) 对于每一个截面,将气动设计及空气系统设计获得的气体速度和温度等插值到有限元节点上,将冲击孔、气膜孔位置与节点号关联起来,采用经验公式计算每个节点上的换热系数;

4) 采用超单元法由二维有限元网格生成三维有限元网格,通过插值的方法获得三维网格节点上的换热系数及气体温度值,并由此自动生成叶片温度场的有限元分析数据,其中包括换热系数边界条件和气体温度边界条件;

5) 进行三维有限元温度场分析,根据温度场分析获得温度数据以及气动设计时生成的压力数据,自动生成三维有限元应力分析数据,其中包括温度和气动载荷边界条件,同时输出最高温度值以供优化设计选用;

6) 三维有限元应力分析,输出每个节点的应力供持久寿命分析用,输出最高应力、最大位移、叶片重量等以供优化设计选用;

7) 根据每个节点的温度、应力值以及持久寿命方程计算相应的持久寿命,输出最低寿命值以供优化设计选用.

3 叶片换热系数计算

在进行叶片温度场计算前,首先要获得与叶

片内外边界接触的气体温度、气体流速及换热系数作为有限元分析的边界条件.为了缩短计算时间,本文采用经验公式^[2-4]计算换热系数,以获得求解热传导方程所需要的边界条件.叶片外表面的气体温度和气体流速可通过 S_1 流面的计算获得.

换热系数的计算是针对二维有限元网格进行的.如图4所示,采用8节点四边形单元,沿叶片厚度方向仅划分一层单元,内外表面节点对的距离可用于确定叶片各处的厚度,可由本文采用的换热系数公式计算.

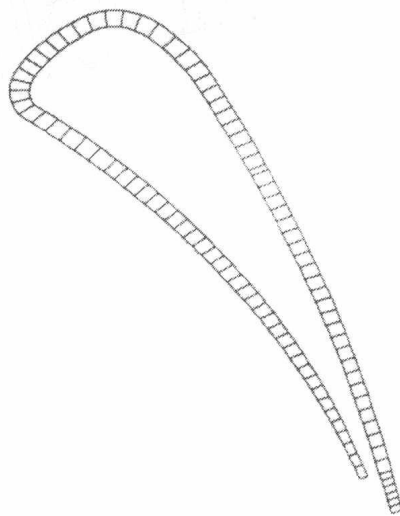


图4 截面二维有限元网格

Fig. 4 2-D FEM mesh

如图5所示,叶盆(或叶背)层流区 i 节点处的换热系数 h_i 为

$$h_i = \frac{0.332 \cdot \lambda \cdot \sqrt{Pr}}{s_i \cdot \sqrt{\rho \cdot u_i \cdot s_i / \mu}} \quad (1)$$

紊流区 i 节点处的换热系数为

$$h_i = \frac{0.0296 \cdot \lambda (\rho \cdot u_i \cdot s_i / \mu)^{0.8} \cdot \sqrt{Pr}}{s_i} \quad (2)$$

$$s_i = \sum_{j=1}^{j=i} \sqrt{(x_j - x_1)^2 + (y_j - y_1)^2} \quad (3)$$

其中: x_i, y_i 为 i 节点的坐标, u_i 为 i 节点处的气体速度, λ 为材料导热系数, Pr 为普朗特数, ρ 为密度, μ 为粘度.

对于前缘部位

$$h_i = \frac{k \cdot \lambda \cdot [1.14 - \sqrt{\rho \cdot u_\infty \cdot s_i / \mu}]}{2} \cdot \frac{(Pr)^{0.4} (1 - 2[(\alpha_1 - \alpha_q) / \pi]^3)}{\sqrt{(x_1 - x_0)^2 + (y_1 - y_0)^2}} \quad (4)$$

$$\alpha_1 = \tan^{-1} \left(\frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} \right), \quad \alpha_q = \tan^{-1} \left(\frac{y_q - y_0}{x_q - x_0} \right)$$

$$x_0 = \frac{[(x_p^2 - x_q^2) + (y_p^2 - y_q^2)](y_p - y_r) -}{2[(y_p - y_q)(x_p - x_r) -} \rightarrow$$

$$\leftarrow \frac{[(x_p^2 - x_r^2) + (y_p^2 - y_r^2)](y_p - y_q)}{(y_p - y_r)(x_p - x_q)]}$$

$$y_0 = \frac{[(x_p^2 - x_r^2) + (y_p^2 - y_r^2)](x_p - x_q) -}{2[(y_p - y_q)(x_p - x_r) -} \rightarrow$$

$$\leftarrow \frac{[(x_p^2 - x_q^2) + (y_p^2 - y_q^2)](x_p - x_r)}{(y_p - y_r)(x_p - x_q)]}$$

其中 $k = 1.2 \sim 1.8$, 下标 ∞ 表示来流, r, q, p 为圆弧的起、止、中点。

冷却叶片内部流场采用现有的空气系统分析软件获得, 并参与优化循环。

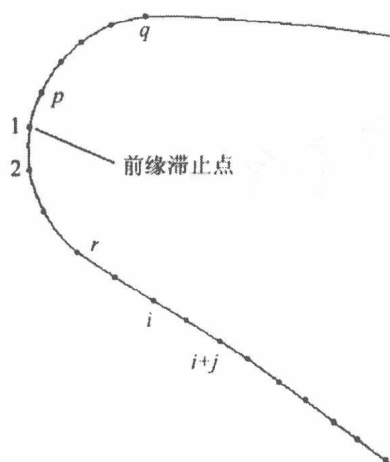


图 5 计算节点的换热系数

Fig. 5 Nodes for heat transfer coefficients calculation

8 节点四边形单元每条边有 3 个节点, 如图 6 所示, 采用一条单元边 k 对绕流柱排进行模拟, 边中点位于绕流柱中心. 单元边 k 处 3 个节点的平均努塞尔数可采用有关公式^[2]进行计算。

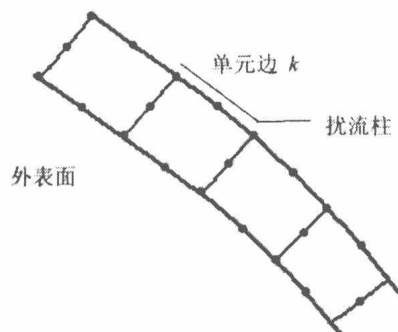


图 6 扰流柱与单元关联

Fig. 6 Pin-fin associated with an element

气膜孔中心处需设置一节点, 例如节点 i (见图 5), 其下游各节点的换热系数为

$$h_{i+j} = h_{0i+j} \left[k_1 - k_2 \frac{T_g - T_c}{T_g - T_w} \bar{M}^{0.6} \left(\frac{s_{i+j}}{r} \right)^{-0.5} \right]$$

$$j = 0, 1, \dots \quad (5)$$

$$s_{i+j} = \sum_{j=0} \sqrt{(x_{i+j} - x_i)^2 + (y_{i+j} - y_i)^2} \quad (6)$$

其中 h_0 为相同主流情况下无气膜孔时的平均换热系数; k_1, k_2 为系数, α 为气膜孔中心线与表面切面的夹角; $\bar{M}$ 为吹风比, 下标 c, g 分别为燃气和冷却气; r 为气膜孔半径。

4 超单元方法

叶片换热系数的计算是针对若干个叶片截面进行的. 在采用超单元方法由二维网格生成三维网格的同时, 将换热系数及气体温度插值到三维有限元网格的表面节点上。

现以 3 个截面为例说明采用超单元法生成三维有限元网格以及进行换热系数、气体环境温度的插值计算过程. 如图 7 所示, 由 3 个截面上相互对应的 3 个四边形单元联成一个 20 节点六面体超单元, 给定沿 (ξ, η, ζ) 3 个方向所需划分的单元数 (一般为均匀划分), 并由此确定每个生成节点的 (ξ, η, ζ) 坐标值. 超单元内部各划分点的坐标 (X, Y, Z) 及换热系数 (H) 环境温度 (T) 由下式确定

$$U = \sum_{i=1}^{20} N_i(\xi, \eta, \zeta) u_i,$$

$$(U = X, Y, Z, H, T; u_i = x_i, y_i, z_i, h_i, t_i) \quad (7)$$

其中 (x_i, y_i, z_i) 为超单元的节点坐标, h_i, t_i 为超单元节点处的换热系数和环境温度, N_i 为形函数, (ξ, η, ζ) 为划分节点在单元内的局部坐标。

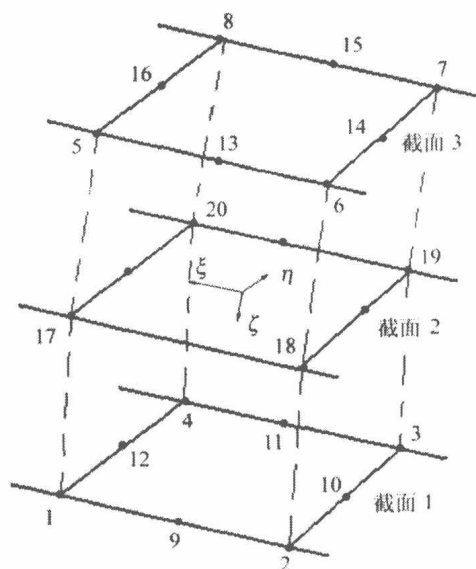


图 7 超单元

Fig. 7 Super elements

换热系数和环境温度只需在叶片表面进行插值, 设单元局部坐标沿叶片厚度方向为 η , 则可

分别设 $\eta = \pm 1$, 采用式(7)进行插值. 对截面每个单元都进行上述计算, 可生成整个叶片的三维有限元网格及其表面的换热系数和环境温度值.

5 优化数学模型

优化设计的数学模型由设计变量、目标函数和约束条件3个要素构成.

1) 设计变量: 可选择的设计变量包括(参见图1和图8)叶型的最大厚度, 最大厚度相对于弦线的位置, 前缘构造角, 尾缘构造角, 前缘楔角, 尾缘楔角, 安装角, 前缘圆头半径, 叶片的壁厚(分布) t , 劈缝到尾缘的长度 L , 气膜孔排数和直径, 叶盆夹层绕流柱排数, 叶背夹层绕流柱排数, 尾缘绕流柱排数, 各绕流柱直径和高度, 绕流柱之间沿叶高的距离, 夹层出口最小面积, 前缘冲击孔直径等. 这些设计变量当中有些是连续型的, 如 t, L , 绕流柱直径和高度, 冲击孔直径等, 有些是离散型的, 如气膜孔排数, 绕流柱排数等, 在进行优化计算时应选择适当的优化方法.

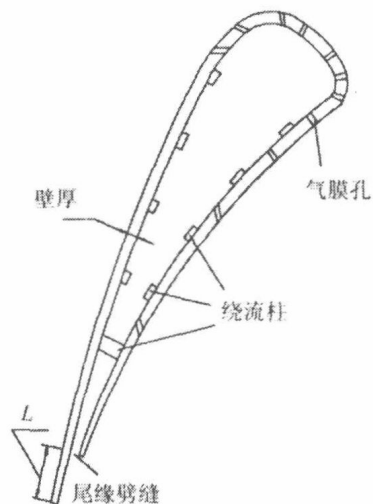


图8 部分可供选择的设计变量

Fig. 8 Some design variables

2) 约束条件: 在性能约束方面可选择, 如最高温度, 寿命、效率、损失、马赫数沿叶盆叶背的分布形式, 重量等. 值得注意的是 L 的取值不应使喉部位置落在尾缘劈缝处.

3) 目标函数: 与约束条件的情况相类似, 目标函数可最高温度, 寿命、效率、损失、马赫数沿叶盆叶背的分布形式, 重量等参数中进行选择. 可选择一个或多个. 当选择多个性能参数时, 为多目标优化问题, 应采用多目标优化的方法进行求解.

优化数学模型可表达为

$$\min f(X), X = [x_1, x_2, \dots, x_n]^T,$$

$$X \in D \subset R^n$$

$$D = g_i(X) \leq 0, (i = 1, 2, \dots, m) \quad (8)$$

式中 $f(X)$ 为单或多目标函数, $X = [x_1, x_2, \dots, x_n]^T$ 为设计变量, R^n 为实欧氏空间, $g_i(X)$ 为约束函数.

6 应用研究

采用本文方法某燃气涡轮导向叶片进行多学科设计优化. 设计变量选择叶片壁厚、 L (见图8), 气膜孔排数, 叶盆夹层绕流柱排数, 叶背夹层绕流柱排数, 尾缘绕流柱排数等. 优化前后这些变量值列于表1. 约束函数包括效率 $\geq 85\%$, 重量 ≤ 0.251 kg. 目标函数为持久寿命最长. 采用自行开发的多学科设计优化软件进行设计优化, 分别采用了可同时处理离散变量和连续变量的复合型法和遗传算法进行优化. 图9为叶片中截面表面马赫数分布图, 图10为优化后的叶片温度分布图, 图11为应力分布图. 表2列出了燃气涡轮导向叶片优化结果. 寿命延长了近2倍, 获得了较好的效果.

表1 优化前后设计变量值

Table 1 Design variables before and after optimization

设计变量	优化前	优化后
叶片壁厚/mm	1.40	1.26
L /mm, 见图8	3.00	2.72
气膜孔排数	3	4
叶盆夹层绕流柱排数	4	5
叶背夹层绕流柱排数	3	4
尾缘绕流柱排数	5	6

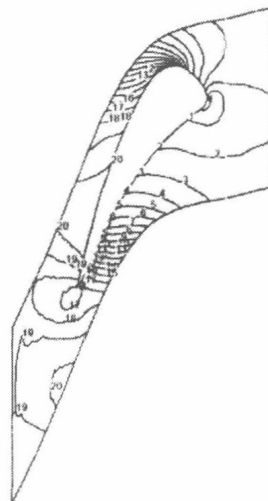


图9 叶片中截面马赫数分布

Fig. 9 Mach number distribution on the mid-section

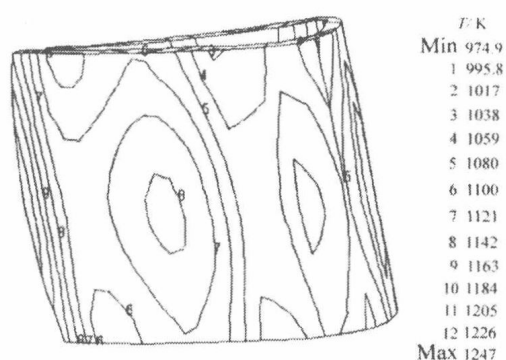


图 10 温度分布

Fig. 10 Temperature distribution

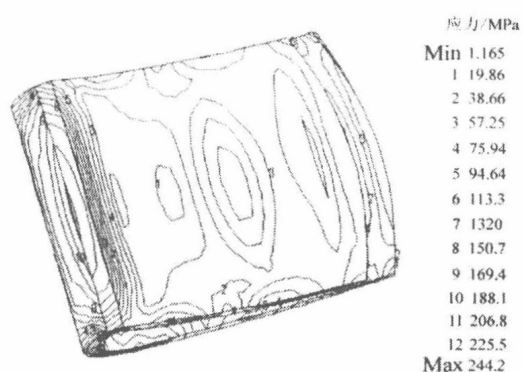


图 11 应力分布

Fig. 11 Stress distribution

表 2 燃气涡轮导向叶片优化结果

Table 2 Results of the optimization of the vane

状态	最高温度/℃	最高应力/MPa	持久寿命/h
优化前	1285	269.5	4353
优化后	1247	244.2	8384
优化率 %	2.9	9.4	192.6

7 结 论

现代冷却叶片含冲击、扰流柱排、孔排及尾缘槽缝气膜等冷却方式,结构复杂,设计分析难度大.本文探讨了一类燃气涡轮冷却叶片的多学科优化方法.提出的经验公式与有限元相结合的换热系数计算方法考虑了上述各种冷却方式的影响,具有简单、实用、省时、有效的特点.发展的多学科优化方法同时考虑了气动、结构、传热、强度等多学科,为获得这类叶片多学科综合最优设计结果,缩短设计周期,提供了有效手段.

参考文献:

- [1] CAI Xianxin. MDO of gas turbine engines[J/CD]. 2004, (9): 5-10. Beijing: Tsinghua University Press. Computational Mechanics, WCCM VI in Conjunction with AP-COM'04.
- [2] 曹玉璋. 航空发动机传热学[M]. 北京:北京航空航天大学出版社,2005.
- [3] Metzger D E. Heat transfer with film cooling near non tangential injection slots[J]. ASME, J. of Eng. for Power, 1968, 90(1): 157-163.
- [4] 《航空发动机设计手册》总编委. 航空发动机设计手册 16 册空气系统及传热分析[M]. 北京:航空工业出版社,2001.

文章编号: 1000-8055(2008)10-1854-05

准静态加载下陶瓷基复合材料层合板 应力-应变曲线的模拟

许仁红, 宋迎东, 李龙彪, 孙志刚

(南京航空航天大学 能源与动力学院, 南京 210016)

摘 要: 采用细观力学方法来模拟纤维增强陶瓷基复合材料层合板在准静态加载下应力-应变行为。采用层合板修正剪滞模型分析复合材料出现损伤时的细观应力场, 通过临界基体应变能准则、Nair 脱粘准则确定基体裂纹间隔和界面脱粘长度。最后结合剪滞模型和损伤机制模拟陶瓷基复合材料层合板应力-应变曲线, 并与试验数据进行比较, 结果吻合较好。

关 键 词: 陶瓷基复合材料; 层合板; 剪滞理论; 本构模型

中图分类号: TB33

文献标识码: A

Modeling behavior of cross-ply ceramic matrix composites under quasi-static loading

XU Ren-hong, SONG Ying-dong, LI Long-biao, SUN Zhi-gang

(College of Energy and Power Engineering,

Nanjing University of Aeronautics and Astronautics, Nanjing 210016, China)

Abstract: The stress-strain response of cross-ply fiber-reinforced ceramic composites laminates under quasi-static loading was discussed by using a micromechanical approach. The cross-ply modified shear lag model was used to analyze the micro stress field of the damage composites. The critical matrix strain energy criterion and the Nair de-bond criterion were used to determine the matrix crack spacing and interface de-bonded length. At last, the tensile stress-strain curves were modeled by combining laminated shear-lag theory and failure criterion. The results from the present analysis match well with experimental data.

Key words: ceramic matrix composites; cross-ply laminate; shear-lag theory; constitutive laws

纤维增强陶瓷基复合材料由于具有高比模、耐高温和抗腐蚀等特点, 而且其强度, 特别是韧性均优于单相陶瓷。这些特点使其成为许多结构件的可行材料, 而且在航空以及其它高温环境中有着广阔应用前景。

通过对陶瓷基复合材料层合板应力-应变行为的模拟可以深刻了解其变形和损伤机制, 可以

更好的了解其力学参数对材料性能的影响, 对陶瓷基复合材料的设计和应用有着重要的意义。

许多学者对陶瓷基复合材料层合板单向加载的失效过程进行了研究^[1-9]。Beyererle 和 Evans^[1]通过能量平衡方法对层合板 0° 层和 90° 层基体裂纹演化进行模拟, Karandikar 和 Chou^[2]通过对单层板弹性模量并结合混合率来模拟层合板弹性模

收稿日期: 2007-10-12; 修订日期: 2008-04-17

基金项目: 航空科学基金(05CS2013); 973 项目资助博士点基金(20070287039)。

作者简介: 许仁红(1984-), 男, 安徽宣城人, 硕士生, 主要研究方向为陶瓷基复合材料疲劳与寿命预测。

量.上述理论模拟均与试验结果存在一定的差距. Pryce 和 Smith^[3]则通过试验得到裂纹密度,对层合板力学行为进行了模拟,但是没有考虑裂纹演化. Daniel^[4]等人通过最大应力准则来计算层合板 90°层横向裂纹和 0°层基体裂纹的形成和演化,但是这种基于单值基体强度的最大应力准则预测的基体裂纹会迅速饱和,也就是说基体裂纹的应力范围很窄. Weitsman 和 Zhu^[5]基于经典断裂力学方法提出了一种能量平衡法,结合剪滞模型来预测裂纹随应力的变化,但是在他们的模型中,应变能释放率的计算很复杂. Soliti 等人^[6]在能量平衡模型基础上,提出了临界基体应变能准则,假设基体应变能存在一个临界值,当基体应变能超过临界值时,额外的基体应变能将通过新裂纹产生、界面脱粘等形式耗散掉,该模型考虑了界面脱粘对基体裂纹演化的影响,很好的预测了基体裂纹间隔随应力演化.

目前主要存在两种方法来确定界面脱粘-最大剪应力准则^[7]和断裂力学方法^[8]. 最大剪应力准则认为当界面剪应力达到界面粘结强度时界面脱粘;而断裂力学方法将界面脱粘作为一种裂纹扩展来研究,认为当界面脱粘尖端的应变能释放率达到界面脱粘韧性时界面脱粘. 本文将采用基于断裂力学的 Nair 脱粘准则确定界面脱粘.

本文首先对复合材料出现损伤(横向裂纹、基体裂纹和界面脱粘)时细观应力场进行分析,然后分别介绍临界基体应变能准则、Nair 脱粘准则,最后将失效准则与本构关系相结合模拟层合板陶瓷基复合材料应力-应变曲线.

1 层合板剪滞理论

1.1 基本假设

为了模拟层合板单轴加载下的响应,使用一维单元体及一系列简化假设:

- 1) 假设纤维均匀分布在基体中;
- 2) 假设层合板是对称铺层形式;
- 3) 假设复合材料中的横向裂纹间隔和基体裂纹间隔等间距分布,且贯穿每一层;
- 4) 只考虑加载方向的应力以及 0°层和 90°层层间剪应力和 0°层组分之间的剪应力.

1.2 基本公式

层合板的特征单元体如图 1 所示. 将层合板分成三个部分:90°层,0°层纤维和 0°层基体. 假设 0°层基体裂纹不影响 90°层的应力分布. 因此,横

向裂纹可以影响层间的应力传递,而基体裂纹只影响 0°层组分之间的应力分布.

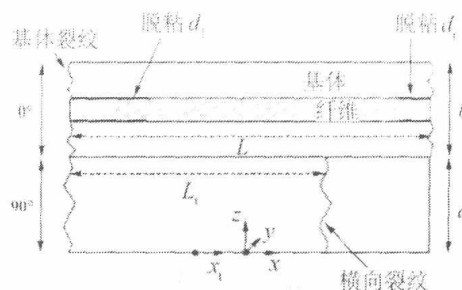


图 1 层合板特征单元体

Fig. 1 Representative volume element of cross-ply laminates

0°层和 90°层的厚度分别为 2b 和 2d. 90°层和 0°层的平均裂纹间隔分别为 L_t 和 L_f , 裂纹密度则为单位长度内的平均裂纹间隔(比如 $1/L_t$ 或 $1/L_f$). 通过混合法,可得方程

$$\sigma = \frac{b}{b+d} \sigma_L(x) + \frac{d}{b+d} \sigma_T(x) \quad (1)$$

式中

$$\alpha(x) = v_f \sigma_f + v_m \sigma_m \quad (2)$$

其中 σ 是层合板轴向应力; $\alpha(x)$ 是纵向层(0°层)的轴向应力; $\sigma_T(x)$ 是横向层(90°层)的轴向应力, $\alpha(x)$ 和 $\sigma_m(x)$ 则是 0°层的组分应力, v_f 和 v_m 分别为纤维和基体的体积百分比.

在加载过程中,当 90°层形成裂纹(横向裂纹),层间载荷重新分布主要是依靠 90°层和 0°层之间的层间剪应力 $\tau(x)$

$$\tau(x) = b \frac{d\alpha(x)}{dx} = -d \frac{d\sigma_T(x)}{dx} \quad (3)$$

根据 Kuo 和 Chou^[9]的复合材料单层板分析,剪应力表达式如下:

$$\begin{cases} \tau(x, z) = \left\{ \frac{(b+d)^2}{z+b} - \left[z + \frac{(b+d)^2}{b} \right] \right\} \\ \left\{ b - \frac{(b+d)^2}{b} \right\}^{-1} \tau(x) & \text{当 } z \in \bar{z}_{90} \\ \tau(x, z) = \frac{b+d-z}{b} \tau(x) & \text{当 } z \in \bar{z}_0 \end{cases} \quad (4)$$

运用传统的剪滞理论和方程(1)~(4),可得 90°层和 0°层应力分布微分方程

$$\frac{d^2 \sigma_T(x)}{dx^2} = \lambda^2 [\sigma_T(x) - \alpha] \quad (5)$$

$$\begin{aligned} & \frac{d^2 \alpha(x)}{dx^2} - \beta \alpha(x) = \\ & -\beta \left[\alpha - \frac{E_f}{E_l} \cdot \frac{d}{b} \left(\sigma_T(x) - \alpha \right) \right] \end{aligned} \quad (6)$$

其中 α 和 α 是在层合板未损伤的情况下的轴向应力,通过混合法得到. E_f 为纤维弹性模量, E_l

为 0° 层弹性模量,常数 λ 和 β 是剪滞常数^[7].在考虑了裂纹附近应力重新分布的情况下, 90° 层轴向应力和 0° 层轴向应力即方程(5)和(6)的解表达如下:

$$\sigma_T(x) = c_1 \sinh(\lambda x) + c_2 \cosh(\lambda x) + \sigma_0^T \quad (7)$$

$$\sigma(x) = c_3 \sinh(\beta x) + c_4 \cosh(\beta x) +$$

$$\frac{E}{E_1} \cdot \frac{d}{b} \frac{\beta}{\lambda^2 - \beta^2} \{c_1 \sinh(\lambda x) + c_2 \cosh(\lambda x)\} + \sigma_0^T \quad (8)$$

其中 $c_1 \sim c_4$ 为待定常数.坐标 x_1 为横向裂纹的局部坐标,如图1所示.

0° 层基体轴向应力如下表示:

$$\sigma_m(x) = \frac{1}{v_m} \left\{ \frac{b+d}{b} \sigma - \frac{d}{b} \sigma_T(x_1|x) \right\} - \frac{v}{v_m} \sigma(x) \quad (9)$$

其中 $\sigma_T(x_1|x)$ 是 $\sigma_T(x_1)$ 在 $x_1 = x$ 处的值.方程(7)和(8)中的常数 $c_1 \sim c_4$ 通过边界条件解出.边界条件主要是根据复合材料的损伤状态得到,主要分为以下两种情况:出现横向裂纹后和出现基体裂纹后的应力分布,如图2和图3所示.

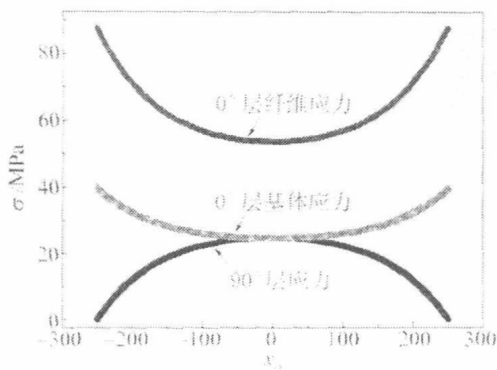


图2 出现横向裂纹后层合板应力分布

Fig. 2 Micro-stresses for cross-ply after transverse crack

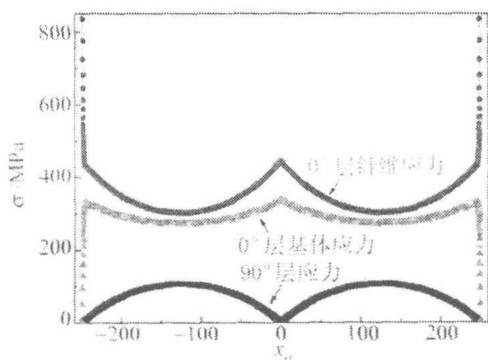


图3 出现基体裂纹后层合板应力分布

Fig. 3 Micro-stresses for cross-ply after matrix crack

2 陶瓷基复合材料的损伤机制

2.1 横向裂纹和基体裂纹

本文采用 Solti 等人^[6]提出的临界基体应变能(CMSE)方法来预测基体裂纹随应力的变化,

该理论认为当基体应变能达到一定临界值时,基体失效,出现裂纹,随着应力增加,基体应变能不再发生变化,但是裂纹密度发生变化.图4为CMSE描述的裂纹随应力增加演化过程:

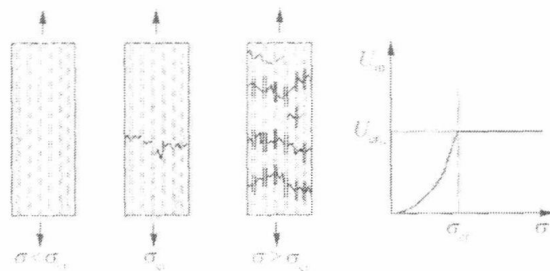


图4 CMSE标准描述的裂纹随应力增加演化过程

Fig. 4 Critical matrix strain energy criterion

层合板的横向裂纹和基体裂纹平均裂纹间隔通过临界基体应变能准则估算

$$U_{m_0} + U_m \left(\frac{L}{L_1} \right) = U_{cr_m} \quad (10)$$

$$U_{T_0} + U_T \left(\frac{L}{L_1} \right) = U_{cr_T} \quad (11)$$

通过CMSE准则可得横向裂纹密度以及基体裂纹密度随应变的变化,如图5和图6所示.

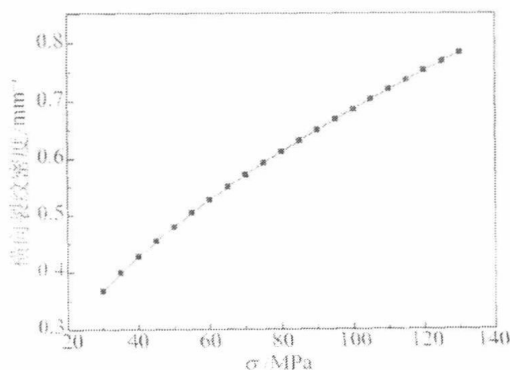


图5 横向裂纹密度随应力变化

Fig. 5 Applied stress versus transverse crack density for cross-ply laminates

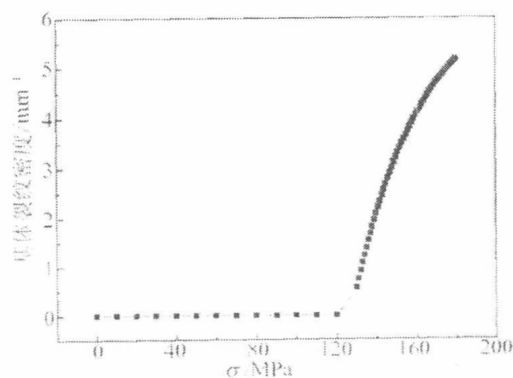


图6 基体裂纹密度随应力变化

Fig. 6 Applied stress versus matrix crack density for cross-ply laminates

2.2 界面脱粘

当基体裂纹扩展到纤维/基体界面时,将沿界面发生偏转,界面发生脱粘.本文采用 Nair 脱粘准则^[8]确定脱粘长度.

Nair 脱粘准则通过在界面脱粘过程中的能量交换来确定脱粘长度

$$dU_d + dU_s + dU_f - dU_T = 0 \quad (12)$$

其中 dU_d 是纤维/基体界面在脱粘过程中吸收的能量; dU_s 是单元体增加的应变能; dU_f 是界面摩擦能; dU_T 是纤维拉伸力 T 所做的功.

根据现在分析的损伤形式,如图 1 所示,单元体两边的脱粘长度不相等,即 $x < 0$ 的脱粘长度不等于 $x > 0$ 的脱粘长度.为了区分两边的脱粘长度,分别用 $d_l (x < 0)$ 和 $d_r (x > 0)$ 表示.根据 Nair 脱粘准则和损伤结构,可以求出裂纹两端的脱粘长度.

脱粘区界面剪应力假设为常数.通过 Nair 脱粘准则可得脱粘长度随应力的变化,如图 7 所示.

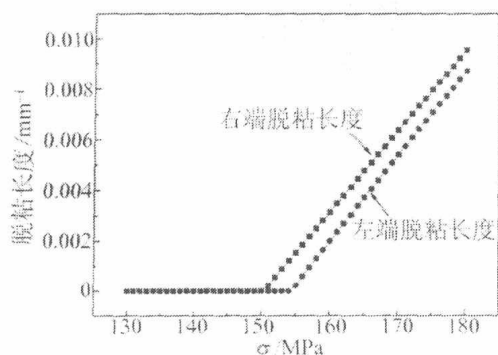


图 7 脱粘长度随应力变化

Fig. 7 Applied stress versus de-bond length for cross-ply laminates

3 应力-应变曲线模拟与实验验证

通过层合板剪滞模型和损伤机制,可对层合板应力-应变曲线进行模拟.由剪滞理论得到层合板应力分布.由下式可得层合板的应变

$$\epsilon_c = \frac{1}{E_f L} \int \sigma_f(x) dx + (\alpha_f - \alpha_c) \Delta T \quad (13)$$

根据损伤机制可以求得横向裂纹 L_f , 基体裂纹 L 和脱粘长度 d_l , d_r . 结合剪滞理论和损伤机制即可以对层合板应力-应变关系进行模拟,并与实验数据^[10]进行对比,如图 8 所示.层合板材料常数如下:

$$E_f = 210 \text{ GPa}, E_m = 95.5 \text{ GPa}, V_f = 0.38,$$

$$\pi = 7.5 \mu\text{m}, \alpha_f = 3.1 \times 10^{-4} \text{ } ^\circ\text{C}^{-1}, \alpha_m = 4.5 \times 10^{-4} \text{ } ^\circ\text{C}^{-1},$$

$$\tau_i = 20 \text{ MPa}, \Delta T = -1000 \text{ } ^\circ\text{C}$$

从图 8 中可以看出,理论计算与试验结果吻合较好.

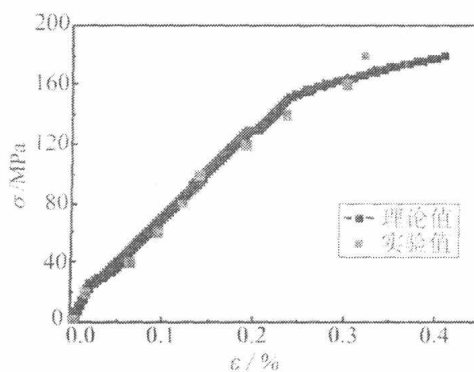


图 8 层合板应力-应变曲线

Fig. 8 Stress-strain prediction of cross-ply laminates

4 结 论

提出了陶瓷基复合材料层合板拉伸力学行为的模拟方法.即通过临界基体应变能模拟横向裂纹和基体裂纹演化以及 Nair 脱粘准则模拟界面脱粘,然后将修正层合板剪滞理论和损伤机制进行结合来模拟陶瓷基复合材料层合板的单向加载力学行为.

采用本文提出的方法模拟了陶瓷基复合材料层合板的单向拉伸应力-应变曲线,并与试验数据吻合的较好,验证了所提出方法的有效性.

参考文献

- [1] Beyerle D S, Spearing S M, Evans A G. Damage mechanisms and the mechanical properties of a laminated 0/90 ceramic matrix composite [J]. J. Amer. Cer. Soc., 1992, 75(12): 2719-2725.
- [2] Karandikar P, Chou T W. Characterization and modeling of micro-cracking and elastic moduli changes in nicalon/CAS composites[J]. Composites Science and Technology, 1993, 46: 1-11.
- [3] Pryce A W, Smith P A. Behavior of unidirectional and cross-ply ceramic matrix composites under quasi-static tensile loading [J]. J. Mater. Sci., 1992, 27: 2695-2704.
- [4] Daniel I M, Anastassopoulos G. Failure mechanisms and damage evolution in crossply ceramic-matrix composite [J]. International Journal of Solids and Structures, 1995, 32(3/4): 341-355.
- [5] Weitsman Y, Zhu H. Multi-fracture of ceramic composites [J]. J. Mech. Phys. Solids, 1993, 41(2): 351-388.
- [6] Solti J P, Mall S, Robertson D D. Modeling behavior of cross-ply ceramic matrix composites under quasi-static loading [J]. Applied Composite Materials, 1995, 2: 265-292.
- [7] Lawrence P. Some theoretical considerations of fiber pull-

- out from an elastic matrix [J]. J Mater Sci, 1972, 7(1): 1-6.
- [8] Shanti V. Nair crack-wake de-bonding and toughness in fiber or whisker-reinforced brittle-matrix composites [J]. J Am Ceram. Soc., 1990, 73(10): 2839-2847.
- [9] Kuo W S. Damage of multi-directionally reinforced ceramic matrix composites [D]. Newark USA: Department of Mechanical Engineering, University of Delaware, 1992.
- [10] James P S. Modeling of progressive damage in fiber-reinforced ceramic matrix composites [D]. Ohio USA: Air Force Institute of Technology, 1996.

第六届全国核心期刊与期刊国际化、网络化研讨会 联合共赢、协作创新——让 DOI 架起中国期刊走向世界的桥梁

2008年9月6日,由中国科学技术期刊编辑学会、中国科学技术信息研究所和万方数据股份有限公司联合主办,广西科技情报研究所、广西科技期刊编辑学会承办的"第六届全国核心期刊与期刊国际化、网络化研讨会"在广西南宁召开.会议由万方数据公司顾问宋培元主持.

参会的领导有:中宣部出版局副局长刘建生,科技部条财司吴波尔巡视员,省科技厅纪检组组长奉明芳,省新闻出版署报刊处处长汤晓荣,科技期刊编辑学会秘书长姚希彤,中国科学技术信息研究所副所长赵志耘,万方数据股份有限公司副总裁乔晓东,市场总监张秀梅,WK 期刊出版集团 LWW 副总裁 Kevin Fitzpatrick 等来自国内多家学术团体的领导和专家,以及全国数百家期刊的 500 多名专家、学者及部分国际期刊出版商代表参加会议.

研讨会的主题为"联合共赢,协作创新——让 DOI(数字对象唯一标识符)架起中国期刊走向世界的桥梁".会上,代表们就期刊出版业发展的现状、国际期刊出版未来发展的机遇和方向、中国期刊业的整合共赢等问题进行了广泛交流;并就期刊评价的精品战略问题,DOI 对于国内科技信息资源特别是科技期刊发展的重要价值与期刊发展相关的具体问题进行了深入探讨.此外,会议代表还就开放存取和科技期刊发展网络化、国际化、期刊网络品牌的开发与保护等主题进行了发言,并展开了热烈的讨论.

随着中国科技论文数量快速增长,期刊国际化、网络化越来越受到重视,《航空动力学报》也一直注重期刊国际化、网络化的发展进程,从 2007 年 8 月 1 日起就正式采用了网上采编系统,实行了网络投稿、审稿,实现了编辑部的网上办公.此次会议上我们和很多家期刊进行了交流,取长补短,今后将继续关注国际化的发展趋势,办出国际品牌期刊.



大会会场



中宣部出版局副局长刘建生



中国科学技术信息研究所副所长赵志耘



科技期刊编辑学会秘书长姚希彤



万方数据股份有限公司副总裁乔晓东



WK 期刊出版集团副总裁 Kevin Fitzpatrick

图文:王娟

文章编号: 1000-8055(2008)08-1443-06

水平集法在多相材料细观结构优化中的应用

孙 杰, 宋迎东, 孙志刚, 高希光

(南京航空航天大学 能源与动力学院, 南京 210016)

摘 要: 利用高精度通用单胞模型将多相材料的细观拓扑结构和宏观力学性能联系起来, 将一个单胞离散成有限个单元, 通过单元中材料的有无来描述细观结构, 利用水平集法将这个离散变量的拓扑优化问题转化为连续变量的形状优化问题, 从而实现了多相材料的细观结构优化. 以一种多相材料结构为例进行了细观结构的优化, 并获得了具有负泊松比的特性, 从而验证了所提出方法的合理性.

关 键 词: 多相材料; 细观结构; 水平集法; 通用单胞法

中图分类号: TB33

文献标识码: A

Application of level set method in microstructure optimization of multiphase material

SUN Jie, SONG Ying-dong, SUN Zhi-gang, GAO Xi-guang

(College of Energy and Power Engineering,

Nanjing University of Aeronautics and Astronautics, Nanjing 210016, China)

Abstract: Topological microstructure and macro-mechanic performance of multiphase materials were combined using high-fidelity generalized method of cell (HFGMC), so a single cell was dispersed into finite elements; the presence or otherwise of the microstructure was described by materials in the elements, and topological optimization of discrete variables was transferred into continuous variables' shape optimization, thus achieving microstructure optimization of multiphase materials. The microstructure of a multiphase material was optimized, and property of auxetic performance was obtained, helping to prove the validity of this method.

Key words: multiphase materials; microstructure; level set method; generalized method of cell

1994 年 Sigmund 根据逆均匀化方法率先提出了复合材料单胞细观结构拓扑优化设计思路^[1], 标志着复合材料细观结构优化设计理论的建立. 拓扑优化兼有尺寸和形状优化的复杂性, 细观结构最终拓扑形式是未知, 它基于逆均匀化理论追求一定的约束条件下的结构最佳布局, 并使其性能达到最优. 当前, 复合材料细观结构的拓扑优化设计已经成为复合材料研究领域的前沿课

题. 通过对微结构单胞进行拓扑优化设计可获得具有良好特性的复合材料, 例如负的泊松比^[2]、负的热膨胀系数^[3]、最优阻尼材料^[4]以及良好压电特性的压电材料^[5].

Hassani B, Hinton E 指出连续体拓扑优化问题本质上是一种 0-1 离散变量的组合优化问题^[6,7]. 由于数学模型中目标函数与约束函数的不连续性, 使得优化问题成为不可微和非凸的模型.

收稿日期: 2007-07-18; 修订日期: 2007-11-19

基金项目: 航空科学基金(05C52013); 973 项目

作者简介: 孙杰(1982-), 男, 江苏灌南人, 研究生, 主要研究方向为航空宇航推进系统结构、强度与振动.

水平集法 (Level set method) 正体现了这一思想, 它通过一个嵌入到高维尺度中的隐式移动边界来表示优化问题, 即结构的边界用嵌入到高维尺度函数中的水平集模型来表示, 该模型在描述复杂结构的拓扑及边界变化方面具有较好的灵活性. 本文采用水平集法来描述多相材料的细观结构, 将复合形法作为优化手段, 对多相材料的细观结构进行了优化, 获得了具有负泊松比的特性.

1 高精度通用单胞模型

(HFGMC)^[8]

通用单胞法的基本思想是将代表性体元划分为若干个矩形子胞 (Sub-cell), 假设每个子胞的位移函数, 通过子胞边界上的力和位移边界条件, 建立宏观量场和细观量场之间的关系方程, 根据已知的宏观量, 求解细观量场, 再根据子胞的几何方程以及物理方程, 得到完整的子胞应力和应变场即细观力学解, 最后根据均匀化方法获得代表性体元的宏观应力 - 应变之间的关系即本构关系.

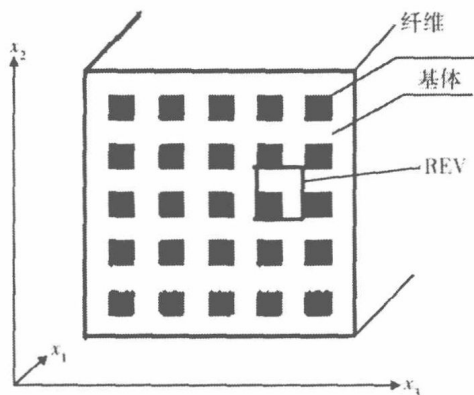


图1 多相材料周期性细观结构

Fig. 1 Periodic microstructure of multiphase material

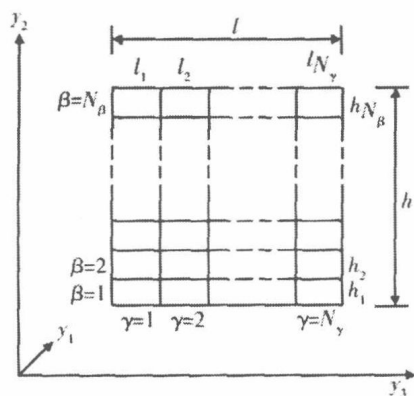


图2 $N_\beta \times N_\gamma$ 规模单元

Fig. 2 RVE which contains $N_\beta \times N_\gamma$ sub elements

假设多相材料在 $x_2 - x_3$ 方向是周期排列的, 如图1所示, 将代表性体积单元 (REV) (即单胞)

划分为 $N_\beta \times N_\gamma$ 个子胞, 如图2所示. 假设高精度通用单胞模型的位移为下列形式

$$u_i^{(\beta\gamma)} = \bar{\varepsilon}_{ij} x_j + W_{i(00)}^{(\beta\gamma)} + \bar{y}_2^{(\beta)} W_{i(10)}^{(\beta\gamma)} + \bar{y}_3^{(\gamma)} W_{i(01)}^{(\beta\gamma)} + \frac{1}{2} \left(3\bar{y}_2^{(\beta)^2} - \frac{h_\beta^2}{4} \right) W_{i(20)}^{(\beta\gamma)} + \frac{1}{2} \left(3\bar{y}_3^{(\gamma)^2} - \frac{l_\gamma^2}{4} \right) W_{i(02)}^{(\beta\gamma)} \quad (1)$$

其中: $i = 1, 2, 3, 0 \leq y_2 \leq h, 0 \leq y_3 \leq l, W_{i(00)}^{(\beta\gamma)}$ 是可变的体积平均位移, $W_{i(mn)}^{(\beta\gamma)}$ ($m, n = 0, 1, 2$) 为位移的高价项, h_β, l_γ 为子胞 (β, γ) 的尺寸, $\beta = 1, 2, \dots, N_\beta, \gamma = 1, 2, \dots, N_\gamma$.

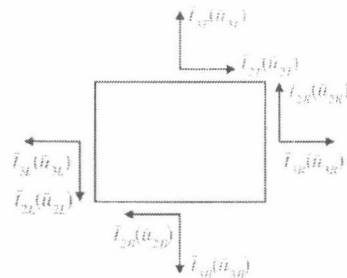


图3 二维表面平均量的示意图

Fig. 3 Schematic of two-dimensional surface average displacement and stress

左表面的平均位移 $\bar{u}_{1d}^{(\beta, \gamma)}$ 定义为下列形式

$$\bar{u}_{1d}^{(\beta, \gamma)} = \frac{1}{l_\gamma} \int_{l_\gamma/2}^{l_\gamma/2} u_i^{(\beta, \gamma)} \left(-\frac{h_\beta}{2}, \bar{y}_3^{(\gamma)} \right) d\bar{y}_3^{(\gamma)} \quad (2)$$

右、上、下表面的平均位移为

$$\begin{aligned} \bar{u}_{1r}^{(\beta, \gamma)} &= \frac{1}{l_\gamma} \int_{l_\gamma/2}^{l_\gamma/2} u_i^{(\beta, \gamma)} \left(\frac{h_\beta}{2}, \bar{y}_3^{(\gamma)} \right) d\bar{y}_3^{(\gamma)} \\ \bar{u}_{2d}^{(\beta, \gamma)} &= \frac{1}{h_\beta} \int_{h_\beta/2}^{h_\beta/2} u_i^{(\beta, \gamma)} \left(\bar{y}_2^{(\beta)}, -\frac{l_\gamma}{2} \right) d\bar{y}_2^{(\beta)} \\ \bar{u}_{2r}^{(\beta, \gamma)} &= \frac{1}{h_\beta} \int_{h_\beta/2}^{h_\beta/2} u_i^{(\beta, \gamma)} \left(\bar{y}_2^{(\beta)}, \frac{l_\gamma}{2} \right) d\bar{y}_2^{(\beta)} \end{aligned} \quad (3)$$

把式(1)代入几何方程

$$\varepsilon_{ij}^{(\beta\gamma)} = \bar{\varepsilon}_{ij} + \frac{1}{2} (\partial_i u_j^{(\beta\gamma)} + \partial_j u_i^{(\beta\gamma)}) \quad (4)$$

其中 $\partial_1 = 0, \partial_2 = \partial / \partial \bar{y}_2^{(\beta)}, \partial_3 = \partial / \partial \bar{y}_3^{(\gamma)}$.

可得每个子胞的应变分量如下:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{11}^{(\beta\gamma)} &= \bar{\varepsilon}_{11} \\ \varepsilon_{22}^{(\beta\gamma)} &= \bar{\varepsilon}_{22} + W_{2(10)}^{(\beta\gamma)} + 3\bar{y}_2^{(\beta)} W_{2(20)}^{(\beta\gamma)} \\ \varepsilon_{33}^{(\beta\gamma)} &= \bar{\varepsilon}_{33} + W_{3(01)}^{(\beta\gamma)} + 3\bar{y}_3^{(\gamma)} W_{3(02)}^{(\beta\gamma)} \\ \varepsilon_{12}^{(\beta\gamma)} &= \bar{\varepsilon}_{12} + \frac{1}{2} (W_{1(10)}^{(\beta\gamma)} + 3\bar{y}_2^{(\beta)} W_{1(20)}^{(\beta\gamma)}) \\ \varepsilon_{13}^{(\beta\gamma)} &= \bar{\varepsilon}_{13} + \frac{1}{2} (W_{1(01)}^{(\beta\gamma)} + 3\bar{y}_3^{(\gamma)} W_{1(02)}^{(\beta\gamma)}) \\ \varepsilon_{23}^{(\beta\gamma)} &= \bar{\varepsilon}_{23} + \frac{1}{2} (W_{2(01)}^{(\beta\gamma)} + W_{3(10)}^{(\beta\gamma)} + \frac{3}{2} (\bar{y}_2^{(\beta)} W_{3(20)}^{(\beta\gamma)} + \bar{y}_3^{(\gamma)} W_{2(02)}^{(\beta\gamma)})) \end{aligned} \quad (5)$$