概率统计教程

黄建雄　李康弟　主编





华东师范大学出版社

概率统计教程

黄建雄 李康弟 主编

华东师范大学出版社

图书在版编目（CIP）数据

概率统计教程/黄建雄，李康弟主编．—上海：华东师范大学出版社，2014．5

ISBN 978－7－5675－2126－1

Ⅰ．①概…　Ⅱ．①黄…　②李…　Ⅲ．①概率统计－高等学校－教材　Ⅳ．①O211

中国版本图书馆CIP数据核字(2014)第114955号

概率统计教程

主　　编　黄建雄　李康弟
责任编辑　朱建宝
项目编辑　蒋　将
审读编辑　李　娜
装帧设计　高　山

出版发行　华东师范大学出版社
社　　址　上海市中山北路3663号　邮编200062
网　　址　www.ecnupress.com.cn
电　　话　021－60821666　行政传真021－62572105
客服电话　021－62865537　门市(邮购)电话021－62869887
地　　址　上海市中山北路3663号华东师范大学校内先锋路口
网　　店　http://hdsdcbs.tmall.com/

印 刷 者　昆山市亭林彩印厂有限公司
开　　本　787×1092　16开
印　　张　15.75
字　　数　395千字
版　　次　2014年7月第1版
印　　次　2014年7月第1次
书　　号　ISBN 978－7－5675－2126－1/O·251
定　　价　32.00元

出 版 人　王　焰

前　言

概率论与数理统计是高等学校理、工、管、经济各类专业的必修课，同时是许多专业的研究生入学考试内容.

从概率统计学科的发展来看，概率论起源于博弈问题研究，但现在概率统计方法已广泛应用于国民经济的各个领域及人民生活的很多方面. 例如天气预报、水文预报及地震预报，产品的抽样检验，试验方案的制定，系统的可靠性评估，提高通信系统的效率，自动控制系统控制方案的设计，保险险种设计及费率计算，彩票出售方案的设计，期权定价问题等方面大量地应用概率论的研究方法，甚至在确定性问题研究中也应用随机性方法，如计算机对确定性问题的计算中用随机算法来大幅度提高运算效率等.

同时，概率论作为一门数学学科，其公理化体系形成较晚. 大约于 20 世纪 30 年代，由于苏联数学家 Kolmogrov 的研究，概率论的公理化工作得以完成. 因此，学习概率论的研究方法，对提高广大科学技术人员的科学素养也有较大的帮助.

考虑到概率论的公理化思想的重要性，本书从事件的运算封闭性和概率的公理化定义两方面，对概率论的公理化思路进行了简单的叙述.

概率论与数理统计包含两个部分：概率论和数理统计技术. 概率论是对随机现象统计规律进行演绎的研究，而数理统计是对随机现象的统计规律进行归纳的研究. 两者在方法上有着明显的不同，但两者却相互联系、相互渗透. 本书的前五章为概率论部分，后四章为数理统计部分.

概率论与数理统计是应用性很强的一门学科，同时其抽象和技巧程度也非常高，本书在编排上力图做到简繁得当，通俗易懂. 对现实生活中有大量应用的概率方法进行了较多的例题讨论，力求提高读者的兴趣，又能使读者从中加深对基本概念的理解及对基本方法的掌握. 本书在概率论部分对几个重要分布，如 0－1 分布、二项分布、Poisson 分布、均匀分布、正态分布的来源与应用有大量的讨论，望读者关注.

本书在习题的选择上作了一些改动，每章后的习题着重于基本概念的理解及基本方法的掌握，每章后的补充题则偏重于综合训练及综合应用，读者可酌情试做一部分以开拓思路，加深对内容的理解和重要方法的掌握.

本书第一至八章附有“基本要求”，该基本要求大体符合工科学生概率论与数理统计课程研究生入学考试要求，因第九章内容超出工科学生概率论与数理统计的研究生入学考试范围，故未列出基本要求. 本书的习题和补充题列入了较多的近年来高等数学研究生入学考

试试题中的原题，供大学生选用.

本书在黄建雄、蔡文康、蒋书法、李康弟等编写的《概率论与数理统计》的基础上，根据教师和学生对该书的反馈意见，借鉴各院校在本课程教学方式的近期发展趋势，在内容、例题和习题的编排上进行了改写和调整，力求使本书能更好地适应课程教学工作的需要.

本书第一章至第五章由李彦、朱威编写，第六章至第九章由于娜编写，全书由黄建雄、李康弟进行改写和定稿.

限于编者的能力及时间，书中肯定存在错误和缺点，敬请读者批评和指正.

编　者

2014 年 4 月

目　录

第一章

随机事件及其概率

本章基本要求

1. 了解样本空间(基本事件空间)的概念,理解随机事件的概念,掌握事件的关系及运算.

2. 理解概率、条件概率的概念,掌握概率的基本性质,会计算古典型概率和几何型概率,掌握概率的加法公式、减法公式、乘法公式、全概率公式,以及贝叶斯(Bayes)公式.

3. 理解事件独立性的概念,掌握用事件独立性进行概率计算;理解独立重复试验的概念,掌握计算有关事件概率的方法.

自然界中有两类现象:一类为确定性现象,例如上抛的石子必定落下、同性电荷必定相斥等,这类现象的结果是确定的.另一类为随机性现象,例如掷硬币,有可能出现正面,也有可能出现反面;掷骰子可能出现的点数为"1, 2, 3, 4, 5, 6"中的一个,但在抛掷之前不可能知道究竟出现哪一种结果;还有炮弹瞄准射击的弹着点问题,每一颗炮弹在射击前不可能知道其弹着点的确切位置,这些现象称为随机性现象.这些在相同条件下的试验有一个共同点:在试验之前不可能预先知道出现哪个结果,有可能出现这样或那样的结果,但从大量的试验结果分析,则呈现出一种统计规律性.如掷硬币时,出现正面的次数大致占到总次数的一半;掷骰子时,出现点数"6"的次数大致占到总次数的1/6;瞄准射击时,目标附近的弹着点较为密集等.

这种在个别试验中,试验结果呈现不确定性,但在大量重复试验中,试验结果呈现出统计规律性的随机现象,就是概率论与数理统计的主要研究对象.概率论与数理统计是研究随机现象的内在统计规律性的一门学科.现在概率统计的方法已广泛应用于国民经济的许多领域及人民生活的很多方面,例如用于天气预报、水文预报及地震预报,产品的抽样检验中检验方案的确定,对系统可靠性进行评估,在通信中用于提高通信系统的效率,编码和密码破译,用于自动控制系统的控制方案的设计,进行保险险种设计及费率计算,彩票销售方案的设计,股票市场的期权定价问题研究,甚至在确定性现象的研究中也广泛地应用随机方法,如利用计算机对某些确定性问题进行计算时,可选用随机算法来大幅度提高运算效率.

§1.1 随机试验与随机事件

在科学和工程技术研究中，时常要在相同条件下进试验，并对结果进行观察，下面举一些试验的例子.

例 1.1.1 口袋中有编号为 1, 2, …, n 的球，从袋中任取一只，观察球的编号.

例 1.1.2 掷骰子一次，观察出现的点数.

例 1.1.3 将一枚硬币掷两次，观察第一次、第二次正面、反面出现的情况.

例 1.1.4 将一枚硬币掷两次，观察两次中正面出现的次数.

例 1.1.5 在 7:00～9:00，观察通过路口的车辆数.

例 1.1.6 在一批电视机中，任取一台，测试其寿命(小时).

例 1.1.7 对一个圆柱体构件，测量其直径.

上述举出的 7 个试验的例子，它们有如下共同的特点：

1. 试验可在相同的条件下进行；
2. 每次试验的可能结果不止一个，但能事先知道所有可能的结果；
3. 试验之前并不知道哪一种结果会出现.

具有上述三个性质的试验称为**随机试验**，以后将随机试验简称为试验.

对于随机试验，尽管试验之前不能预知哪一个结果出现，但所有可能的结果是知道的，我们将所有可能结果组成的集合称为随机试验的**样本空间**，记为 S，每一个可能的结果，即样本空间的元素称为**样本点**.

例 1.1.8 在例 1.1.1—例 1.1.7 的试验中，分别写出相应试验的样本空间.

解 在例 1.1.1 的试验中，样本空间为 $S_1=\{1, 2, \cdots, n\}$；

在例 1.1.2 的试验中，样本空间为 $S_2=\{1, 2, \cdots, 6\}$；

在例 1.1.3 的试验中，样本空间为 $S_3=\{(正, 正), (正, 反), (反, 正), (反, 反)\}$，如将掷硬币时出现正面的结果记为 1，出现反面的结果记为 0，则可记样本空间为 $S_3'=\{(1, 1), (1, 0), (0, 1), (0, 0)\}$；

在例 1.1.4 的试验中，样本空间为 $S_4=\{0, 1, 2\}$；

在例 1.1.5 的试验中，样本空间为 $S_5=\{0, 1, 2, \cdots\}$

在例 1.1.6 的试验中，样本空间为 $S_6=\{t \mid t\geqslant 0\}=[0, +\infty)$；

在例 1.1.7 的试验中，样本空间为 $S_7=\{x \mid a\leqslant x\leqslant b\}$，这里 a, b 分别表示可能测到的最小值和最大值.

注意到事实上，由于试验的观察目的性不相同，因此对同一种试验样本空间的表达也可能不一样，如例 1.1.3 和例 1.1.4 的试验中，样本空间的表达就不相同.

在实际应用中，我们关心的是某一类试验结果是否发生，如在例 1.1.2 中掷骰子的试验中，若我们关心的是是否出现较大的点子，即结果 4, 5, 6 是否出现，这些结果组成集合 $A=\{4, 5, 6\}$. 当且仅当集合 $A=\{4, 5, 6\}$ 中的某一样本点出现时，掷骰子就掷出了较大的点子；在例 1.1.6 的试验中，若我们关心的是电视机寿命不低于 5 000 小时，满足这一条件的样本点组成集合 $B=\{t \mid t\geqslant 5\,000\}=[5\,000, +\infty)$，当且仅当 B 中的某一样本点出现时，电视机寿命不低于 5 000 小时.

通常，样本空间 S 的一个子集称为随机试验的一个**随机事件**，简称**事件**. 当且仅当这一

子集的某个样本点出现时，称**事件发生**. 随机事件通常用大写字母 A、B 或 A_1、A_2、B_1、B_2 等表示.

由样本点组成的单点集，称为**基本事件**. 如例 1.1.2 的试验中，基本事件有 6 个，即$\{1\}$，$\{2\}$，$\{3\}$，$\{4\}$，$\{5\}$，$\{6\}$；例 1.1.5 的试验中，基本事件有无穷多个，即$\{0\}$，$\{1\}$，$\{2\}$，….

S 是样本空间 S 的一个子集，它包含了所有可能的试验结果，在每次试验中必定发生，因此称 S 是**必然事件**，空集$\varnothing$也是样本空间 S 的子集，它不含任何的试验结果，在试验中必定不发生，因此称空集$\varnothing$是**不可能事件**. 下面举几个事件的例子.

例 1.1.9 1. 在例 1.1.1 的试验中，摸到号码不超过 $\dfrac{n}{2}$ 的球的事件为 $A_1 = \left\{1, 2, \cdots, \left[\dfrac{n}{2}\right]\right\}$，摸到号码为整数的球的事件为 S；

2. 在例 1.1.3 的试验中，将掷硬币时出现正面的结果记为 1，出现反面的结果记为 0，则首次掷出反面的事件为 $A_2 = \{(0, 0), (0, 1)\}$，恰好掷出一次正面的事件为 $A_3 = \{(1, 0), (0, 1)\}$，掷出 3 次正面的事件是不可能出现的，记为$\varnothing$；

3. 在例 1.1.5 的试验中，通过车辆数超过 1 000 辆的事件为 $A_4 = \{1\,001, 1\,002, 1\,003, \cdots\}$；

4. 在例 1.1.6 的试验中，若电视机的寿命低于 5 000 小时时称电视机是次品，则电视机是次品的事件为 $A_5 = \{t \mid 0 \leqslant t < 5\,000\} = [0, 5\,000)$.

§1.2 事件的关系与运算

上节中，利用集合的表示方法，用样本空间的子集来表示随机事件，因此集合的关系与运算可用到事件的关系与运算中，下面就给出事件的关系和运算在概率论中的提法.

1. 包含关系

如果随机事件 A 发生必定导致随机事件 B 发生，则称 A 是 B 的**子事件**或称 $\boldsymbol{B}$ **包含** $\boldsymbol{A}$，记为 $A \subset B$ 或 $B \supset A$(图 1-1). 若记 A 为随机事件"通过车辆数超过 1 000 辆"，B 为随机事件"通过车辆数超过 100 辆"，则事件 A 发生意味着事件 B 发生，则 A 是 B 的**子事件**，**即** $\boldsymbol{A \subset B}$. 显然对每个随机事件 A，都有$\varnothing \subset A \subset S$.

2. 相等关系

如果事件 A 发生必定导致事件 B 发生，并且事件 B 发生必定导致事件 A 发生，即 $A \subset B$ 且 $B \subset A$，则称事件 A 与事件 B **等价**，或称事件 A 与事件 B **相等**，记为 $A = B$.

3. 事件互斥(互不相容)

如果事件 A 与 B 不能同时发生，则称事件 A 与事件 B **互斥**或称事件 A 与事件 B **互不相容**，其集合表示为 $A \cap B = \varnothing$ (图 1-2). 基本事件是两两互斥的.

4. 和事件

如果事件 A 与 B 至少一个发生，就称 A 与 B 的**和事件**发生，A 与 B 的和事件记为 $A \cup B$，和事件的集合表示为 $A \cup B = \{x \mid x \in A \text{或} x \in B\}$ (图 1-3). 在概率论中通常表达为：

当且仅当事件 A 发生或者事件 B 发生时，和事件 $A\cup B$ 发生.

类似地，称 $\bigcup_{k=1}^{n}A_k$ 为 n 个事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 的和事件. 事件 $\bigcup_{k=1}^{n}A_k$ 发生，当且仅当事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 至少有一个发生. 同理，称 $\bigcup_{k=1}^{\infty}A_k$ 为可列个事件 $A_1, A_2, \cdots$ 的和事件.

5. 积事件

如果事件 A 与 B 同时发生，就称 A 与 B 的**积事件**发生，A 与 B 的积事件记为 $A\cap B$（或记为 AB），积事件的集合表示为 $A\cap B=\{x\mid x\in A \text{ 且 } x\in B\}$（图 1-4）. 在概率论中通常表达为：当且仅当事件 A 发生**并且**事件 B 发生时，积事件 AB 发生.

类似地，称 $\bigcap_{k=1}^{n}A_k\left(\text{或记为}A_1A_2\cdots A_n=\prod_{k=1}^{n}A_k\right)$ 为 n 个事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 的积事件. 事件 $\bigcap_{k=1}^{n}A_k$ 发生，当且仅当事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 同时发生. 同理，称 $\bigcap_{k=1}^{\infty}A_k\left(\text{或记为}\prod_{k=1}^{\infty}A_k=A_1A_2\cdots\right)$ 为可列个事件 $A_1, A_2, \cdots$ 的积事件.

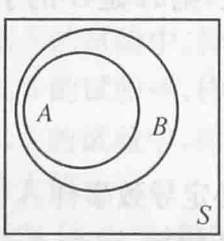
6. 逆事件(对立事件)

如果事件 A、B 至少一个发生，且不能同时发生（即 $A\cup B=S$ 且 $A\cap B=\varnothing$），则称事件 A 与 B 互为**逆事件**，或称 A 与 B 互为**对立事件**，也称 A 是 B 的**逆事件**或 B 是 A 的逆事件，记 $A=\overline{B}$ 或 $B=\overline{A}$，在概率论中通常表达为：当且仅当事件 A **不**发生时，逆事件 $\overline{A}$ 发生. 事件 A 的逆事件 $\overline{A}$ 也可表示为 $\overline{A}=S-A$，其集合表示为 $\overline{A}=\{x\mid x\in S, x\notin A\}$（图 1-5），显然 $\overline{\overline{A}}=A$.

7. 差事件

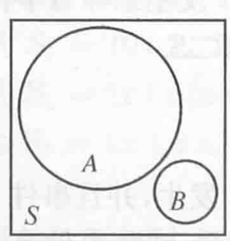
如果事件 A 发生且 B 不发生，则称 A 与 B 的**差事件 $A-B$** 发生. 差事件的集合表示为 $A-B=\{x\mid x\in A \text{ 且 } x\notin B\}$（图 1-6）. 差事件 $A-B$ 通常可表达为 $A-B=A\overline{B}$.

通常用矩形内的图形（Venn 图）表示事件的关系和运算，此方法比较容易掌握（图 1-1—图 1-6）.



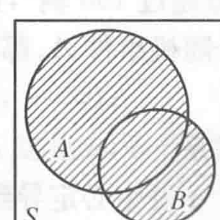
$A\subset B$

图 1-1



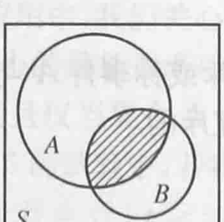
A 与 B 互斥

图 1-2



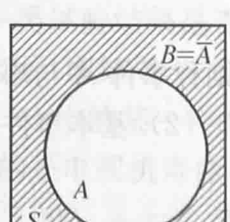
$A\cup B$

图 1-3



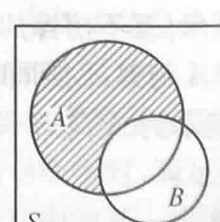
$A\cap B(AB)$

图 1-4



$B=\overline{A}$

图 1-5



$A-B=A\overline{B}$

图 1-6

例 1.2.1 设一口袋中有白球若干只，红球若干只，从袋中取三次球，记第一次取白球的事件为 A，第二次取白球的事件为 B，第三次取白球的事件为 C，则

1. 第一次取到红球的事件为 $\bar{A}$；
2. 第一次取到红球且第二次取到白球的事件为 $\bar{A}\cap B=\bar{A}B$；
3. 第一次取到白球且第二次取到红球的事件为 $A\cap\bar{B}=A\bar{B}=A-B$；
4. 三次全取到红球的事件为 $\bar{A}\cap\bar{B}\cap\bar{C}=\bar{A}\bar{B}\bar{C}=\overline{A\cup B\cup C}$；
5. 三次中至少取到一只白球的事件为 $A\cup B\cup C=\overline{\bar{A}\cap\bar{B}\cap\bar{C}}=\overline{\bar{A}\bar{B}\bar{C}}$；
6. 第三次才取到白球的事件为 $\bar{A}\cap\bar{B}\cap C=\bar{A}\bar{B}C$.

类似于集合的运算规律，事件的运算也经常要用到下列的规律. 设 A、B、C 是三个事件，则有下列运算规律成立.

交换律

$$A\cup B=B\cup A;$$
$$A\cap B=B\cap A.$$

结合律

$$(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C);$$
$$(A\cap B)\cap C=A\cap(B\cap C).$$

分配律

$$A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C);$$
$$A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C).$$

对偶律(De Morgan 律)

$$\overline{A\cup B}=\bar{A}\cap\bar{B};$$
$$\overline{A\cap B}=\bar{A}\cup\bar{B}.$$

例 1.2.2 在图 1-7 的电路中，分别记 A、B、C 为电键Ⅰ，Ⅱ，Ⅲ闭合的事件，D 为灯泡通电事件. 则灯泡通电可表示为电键Ⅰ，Ⅱ同时闭合或者电键Ⅰ，Ⅲ同时闭合，即 $D=(A\cap B)\cup(A\cap C)$. 同时，灯泡通电可表示为电键组Ⅱ，Ⅲ至少一个闭合并且电键Ⅰ闭合，即 $D=A\cap(B\cup C)$.

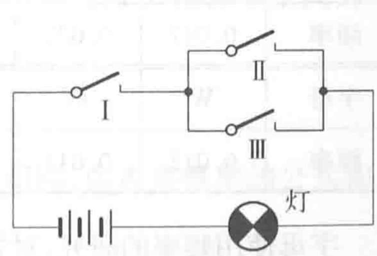


图 1-7

例 1.2.2 的讨论实际上从事件表达的角度验证了事件运算的分配律

$$A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C).$$

在概率论的研究中，复杂事件用较为简单事件的运算结果来表达，特别是用事件的三种运算(和、积和逆运算)表达较为复杂事件，这将是以后概率计算中常用方法的基础.

§1.3 事件的频率与概率

随机事件 A(除必然事件、不可能事件外)在一次试验中，它有可能发生，也有可能不发

生，具有偶然性，但在大量的重复试验中，其发生的统计规律性是客观存在的，这种性质称为频率稳定性. 若随机事件 A 在 n 次试验中发生 n_A 次，则称

$$f_n(A)=\frac{n_A}{n}$$

为随机事件 A 在 n 次试验中出现的频率. 下面对历史上几个著名随机试验进行讨论.

1. 几个著名试验

历史上有不少人对随机事件出现的频率进行了观察，下面列举一些试验的结果.

在掷硬币的试验中，在一次试验中，正面有可能出现，也可能不出现，预先作出确定的预测是不可能的. 记 A 为出现正面事件，下面的表格中列出了几个实验结果：

实　验　者	试验次数 n	正面出现次数 n_A	频率 $f_n(A)$
德・摩根	2 048	1 061	0.518 1
蒲　丰	4 040	2 048	0.506 9
K・皮尔逊	12 000	6 019	0.501 6
K・皮尔逊	24 000	12 012	0.500 5

从上述表格可以看出，在大量的重复试验中，出现正面的频率接近 50%，和直觉上出现正面的机会很近似.

又如，在英文中某些字母出现的频率远远高于另外一些字母，人们经过深入研究之后，发现字母的使用频率相当稳定. 下面是字母使用频率的统计表：

字母	空格	E	T	O	A	N	I	R	S
频率	0.2	0.105	0.072	0.065 4	0.063	0.059	0.055	0.054	0.052
字母	H	D	L	C	F	U	M	P	Y
频率	0.047	0.035	0.029	0.023	0.022 5	0.022 5	0.021	0.017 5	0.012
字母	W	G	B	V	K	X	J	Q	Z
频率	0.012	0.011	0.010 5	0.008	0.003	0.002	0.001	0.001	0.001

字母使用频率的研究，对打字机键盘的设计(方便的地方安排使用频率较高的字母键)、信息编码(常用字母使用较短的编码)、密码的破译等方面有重要的意义.

另一个著名验证频率稳定性的试验是由英国的生物统计学家高尔顿(Galton)作出的，试验用具如图 1-8 所示. 在上端放入一小球，任其下落，下落过程中，小球碰到钉子，经过一系列的碰撞后，小球落入底板中的某格子中，一个小球将落入哪个格子事先无法确定. 但进行重复放入一大袋小球的试验后，小球最后所呈现的曲线几乎都是一样的. 这说明，小球落入每个格子的频率具有稳定性.

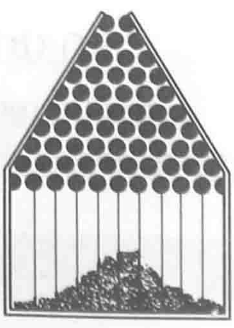


图 1-8

人们在长期的实践活动中，观察到如下事实，随机事件 A 出现的频

率 $f_n(A)$ 有如下特点. 在试验次数 n 较小时，频率 $f_n(A)$ 在 $0\leftrightarrow 1$ 之间波动较大，但当试验次数 n 逐渐增大时，频率 $f_n(A)$ 逐渐接近于某一常数. 因此，用频率的这一稳定值来刻画事件 A 发生的可能性大小是合理的，这就是平常我们所说的事件 A 发生的**概率**，事件 A 的概率通常记为 $P(A)$.

但在许多实际应用中，事件 A 发生的概率不可能经过大量的重复试验来得到. 因此，实际应用及理论上的要求，都需要对概率产生的机理进行研究. 下面对几类特殊问题的概率计算进行讨论.

2. 古典概型(等可能性概型)

在例 1.1.1、例 1.1.2、例 1.1.3 中的试验中，我们观察到它们有如下的共同特点：

(1) 试验的样本空间只有有限个样本点；

(2) 试验中每个样本点出现的可能性相同.

具有上述两个特点的试验是大量存在的，我们将它们称为**古典概型**，也称为**等可能性概型**.

若等可能性概型中样本空间 S 包含的样本点个数为 n，事件 A 中包含的样本点的个数为 k，则事件 A 发生的概率为

$$P(A)=\frac{\text{事件 }A\text{ 包含的样本点个数}}{\text{样本空间 }S\text{ 包含的样本点个数}}=\frac{k}{n}.$$

由上式给出的概率称为**古典概率**.

拉普拉斯(Laplace)曾将上述公式作为概率的一般定义，现在则将上述公式称为概率的古典定义，因为它只实用于古典概型场合. 古典概型有较大的应用范围.

例 1.3.1 将一枚硬币抛掷两次.

1. 事件 A_1 为“恰好出现一次正面”，求 $P(A_1)$；

2. 事件 A_2 为“至少出现一次正面”，求 $P(A_2)$；

3. 事件 A_3 为“两次都出现反面”，求 $P(A_3)$.

解 1. 每次掷硬币时出现正面的结果记为 1，出现反面的结果记为 0，则样本空间为

$$S=\{(1,0),(1,1),(0,0),(0,1)\}.$$

而 $\quad A_1=\{(0,1),(1,0)\}$，

由于 S 中含有 4 个样本点，且每个基本事件发生的可能性相同，由古典概率的公式知

$$P(A_1)=\frac{2}{4}=\frac{1}{2};$$

2. $A_2=\{(1,0),(0,1),(1,1)\}$，因此，$P(A_2)=\dfrac{3}{4}$；

3. $A_3=\{(0,0)\}$，有 $P(A_3)=\dfrac{1}{4}$.

但若在本题中使用样本空间 $S'=\{0,1,2\}$，由于各个基本事件出现的概率不相同，因而不能用古典概型来计算其概率.

产品抽样技术在各生产场合中广泛地应用，由于产品数量很大，对每件产品逐一进行检

验是不现实的或是不经济的. 特别有些检验方式还是破坏性的，例如，电器寿命，建筑构件强度的检验是破坏性的，这样需要从产品中选取一批来进行检验，根据检验结果来判定整批产品的质量.

例 1.3.2 设一批产品中有 N 件产品，其中有 D 件次品，现分别就下列情形：

1. **有放回抽样情形**，即每次取出一件产品后，观察是否是次品，然后放回，再取一件，一共取 n 次；

2. **不放回抽样情形**，即每次取出一件产品后，观察是否是次品，然后从剩下的产品中再取一件，一共取 n 次. ($k \leqslant n,\ k \leqslant D,\ N \geqslant n$)

求取到的产品中恰好有 k 件次品的概率.

解 1. **有放回抽样情形**：将 N 件产品进行编号，有放回地取 n 次，则共有 N^n 种取法，将每种取法看作是一个基本事件. 在指定的 k 次（如前 k 次取到次品，后 $n-k$ 次取到正品）中取到次品的取法有

$$D^k (N-D)^{n-k}$$

种，这样的指定方式有 $\binom{n}{k}$ 种，故取到的 n 件产品中恰好有 k 件次品的取法有

$$\binom{n}{k} D^k (N-D)^{n-k}$$

种. 故在有放回抽样情形，取到的 n 件产品中恰好有 k 件次品的概率为

$$b_k = \frac{\binom{n}{k} D^k (N-D)^{n-k}}{N^n} = \binom{n}{k}\left(\frac{D}{N}\right)^k \left(1-\frac{D}{N}\right)^{n-k};$$

2. **不放回抽样情形**：将 N 件产品进行编号，取出 n 件 ($n \leqslant N$)，共有 $\binom{N}{n}$ 种取法. 在 D 件产品中恰好有 k 件次品的取法有 $\binom{D}{k}$ 种 ($k \leqslant D$)，$N-D$ 件正品中恰好有 $n-k$ 件正品的取法有 $\binom{N-D}{n-k}$ 种，在取出的 n 件产品中恰好有 k 件次品的取法有 $\binom{D}{k}\binom{N-D}{n-k}$ 种，因此，在不放回抽样情形，恰好有 k 件次品的概率为

$$h_k = \frac{\binom{D}{k}\binom{N-D}{n-k}}{\binom{N}{n}}.$$

例 1.3.3 一批产品中有 3 件一等品，4 件二等品，5 件三等品，从中取出 4 件，要求 1 件为一等品，1 件为二等品，另 2 件为三等品，问取一次就能达到要求的概率是多少.

解 这批产品共有 12 件产品，从中取 4 件，所有可能的取法有 $\binom{12}{4} = 495$ 种，每种取法为一基本事件. 又 3 件一等品取出一件的取法有 $\binom{3}{1} = 3$ 种，4 件二等品取出一件的取法有

$\binom{4}{1}=4$ 种，5 件三等品取出两件的取法有 $\binom{5}{2}=10$ 种，故四件中恰好有一等品 1 件，二等品 1 件，三等品两件的取法有 $\binom{3}{1}\binom{4}{1}\binom{5}{2}=120$ 种，因此，所求的取一次就能达到要求的概率为

$$p=\frac{\binom{3}{1}\binom{4}{1}\binom{5}{2}}{\binom{12}{4}}=\frac{120}{495}=\frac{8}{33}.$$

下面讨论几个有趣的古典概型问题.

例 1.3.4 将 n 只球随机放入 N 个格子中 ($N\geqslant n$，每个格子可放入多个球)，求

1. 一个格子中至多有一只球的概率；
2. 在指定的 n 个格子恰有一球的概率.

解 1. 将 n 只球进行编号，由于每只球都可放入任一格子中，它有 N 种放法，n 只球有 N^n 种不同的放法，而 n 只球放入不同的格子中共有 $N(N-1)\cdots(N-n+1)$ 种不同的放法. 故所求的概率为

$$p_1=\frac{N(N-1)\cdots(N-n+1)}{N^n};$$

2. 在指定的 n 个格子恰有一球的不同的放法为 $n!$ 种. 故所求概率为

$$p_2=\frac{n!}{N^n}.$$

若将球解释为粒子，格子解释为空间中的小区域，则上述问题对应于统计物理学中的麦克斯威尔-波尔兹曼(Maxwell-Boltzmann)统计问题；

若将球解释为人的生日，将格子解释为一年的 365 天，那么，参加聚会的 $n(n\leqslant 365)$ 个人生日各不相同的概率为

$$\frac{365\cdot 364\cdots(365-n+1)}{365^n}.$$

n 个人中至少两人生日在同一天的概率为

$$1-\frac{365\cdot 364\cdots(365-n+1)}{365^n}.$$

经计算，至少两人生日在同一天的概率有下表

人　数	23	30	40	50	64
概　率	0.507	0.706	0.891	0.970	0.997

上面的表格说明，在参加聚会的 64 人之间，至少两人生日相同的事件几乎总是会出现的.

例 1.3.5 设袋中有 a 只红球，b 只白球，现按照不放回抽样，依次从袋中取出一球，求第 k 次取出红球的概率.

解法 1 将 $a+b$ 只球进行编号，将它们依次取出，相当于 $a+b$ 只球进行排队，共有 $(a+b)!$ 种排法. 红球在第 k 个位置的排法为 a 种，其余的 $a+b-1$ 只球的排法为 $(a+b-1)!$ 种，故第 k 次取出红球的取法为 $a(a+b-1)!$ 种. 因此，第 k 次取出红球的概率为

$$p=\frac{a(a+b-1)!}{(a+b)!}=\frac{a}{a+b};$$

解法 2 可只考虑前 k 次取球. 将 $a+b$ 只球进行编号，将它们依次取出 k 只，相当于 k 只球进行排队，共有

$$(a+b)(a+b-1)\cdots(a+b-k+1)$$

种排法. 红球在第 k 个位置的排法为 a 种，其余的 $a+b-1$ 只球的任选 $k-1$ 只排在前 $k-1$ 个位置的排法为

$$(a+b-1)(a+b-2)\cdots(a+b-k+1)$$

种，故第 k 次取出红球的取法为 $a(a+b-1)(a+b-2)\cdots(a+b-k+1)$ 种. 因此，第 k 次取出红球的概率为

$$p=\frac{a(a+b-1)(a+b-2)\cdots(a+b-k+1)}{(a+b)(a+b-1)\cdots(a+b-k+1)}=\frac{a}{a+b}.$$

上述问题就是著名的**抽签原理**，即抽签过程中，每次抽签的概率和抽签次序无关. 抽签原理在体育竞赛、彩票发售、实物的公平分配等场合有广泛的应用.

古典概率有下列的性质：

(1) 对于每一事件 A，有 $P(A)\geqslant 0$；$P(S)=1$；

(2) 若事件 A，B 互斥，则 $P(A\cup B)=P(A)+P(B)$.

3. 几何概型

在古典概型中，我们利用等可能性概念，成功地计算了一系列概率，但古典概型要求样本空间的样本点总数为有限，在许多场合不能应用，下面将这种做法推广到样本点总数是无限的情况.

例 1.3.6 公共汽车为半小时一班，某人在不知道时刻表的情况下赶到汽车站，问他等待时间少于 10 分钟的概率.

解 我们自然可认为该人到汽车站的时刻处于两班汽车之间，例如(12:00～12:30)，而且该人到汽车站的时刻是等可能的，要使等待时间少于 10 分钟，只能是他赶到车站的时间在 12:20～12:30 之间才可能，因此相应的概率为 $\frac{10}{30}=\frac{1}{3}$.

例 1.3.7 某 1 000 平方公里的范围内有面积为 100 平方公里的矿床，现任选一点进行钻探，问钻探到矿床的概率.

解 由于 1 000 平方公里的范围内每点选到的可能性相同，因此所求概率自然为矿床面积和总面积之比，即 $\frac{100}{1\,000}=\frac{1}{10}$.