国家示范性高等职业教育精品规划教材

应用数学

主编 ◎ 张绪绪 高汝林

YINGYONG SHUXUE

北京理工大学出版社
BEIJING INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

国家示范性高等职业教育精品规划教材

应用数学

主　编　张绪绪　高汝林
参　编　郝　军　方小艳　马　俊
　　　　何润民　刘　楠

北京理工大学出版社
BEIJING INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

内 容 简 介

本书共 11 章，内容包括：函数的极限与连续、导数与微分、导数的应用、不定积分、定积分及其应用、空间解析几何、多元函数微积分初步、常微分方程、无穷级数、拉氏变换、MATLAB 软件与数学建模.

本书的特点是：突出重点、深入浅出，对基本概念、重要公式和定理注意其几何意义的解释说明；用大量的实例反映数学在实际中的应用；以图形的直观性解释数学中的概念、定理. 选用本书时，可根据教学需要和学习安排等具体情况取舍.

本书可作为高职、高专类学校各专业的教材，也可作为工程技术人员和数学爱好者的参考资料.

图书在版编目（CIP）数据

应用数学 / 张绪绪，高汝林主编主编. —北京：北京理工大学出版社，2013.8
(2013.11 重印)
ISBN 978-7-5640-8052-5

Ⅰ.①应…　Ⅱ.①张… ②高…　Ⅲ.①应用数学－高等学校－教材　Ⅳ.①O29

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2013）第 178156 号

出版发行 /北京理工大学出版社有限责任公司
社　　址 /北京市海淀区中关村南大街 5 号
邮　　编 /100081
电　　话 /(010) 68914775（总编室）
　　　　82562903（教材售后服务热线）
　　　　68948351（其他图书服务热线）
网　　址 /http：//www.bitpress.com.cn
经　　销 /全国各地新华书店
印　　刷 /北京京华虎彩印刷有限公司
开　　本 /787 毫米×1092 毫米　1/16
印　　张 /22
字　　数 /505 千字
版　　次 /2013 年 8 月第 1 版　2013 年 11 月第 2 次印刷
定　　价 /39.00 元

责任编辑 /钟　博
文案编辑 /钟　博
责任校对 /陈玉梅
责任印制 /王美丽

前　　言

本书是根据高等专科教育、高等职业教育、成人高等教育工程类专科的《高职高专教育高等数学课程教学基本要求》，并在认真总结教改经验的基础上，结合现在学生及教师的实际情况，编写的这本《应用数学》。

教材内容的选取充分体现了高职、高专基础课教学“以应用为目的，以必须为度”的原则，以“强化概念，注重应用”为依据，既考虑人才培养的应用性，又使学生具有一定的可持续发展性。

本课程是根据高职的培养目标，作为一门重要的基础课和工具课而开设的，与高等专科学校使用的《高等数学》相比，本书具有以下几个特点：

（1）重视数学概念的本质表述，有关定理、结论、方法的给出与叙述力求通俗易懂，并结合几何图形的直观性，使学生易于接受，避免繁琐推证；

（2）注意启发引导，从实际问题引出抽象的概念，使学生知道概念的实际背景，从而加深对概念的理解；

（3）教学内容注重实际应用，例题、习题均选择有利于学生对实际问题提炼数学模型的能力的培养。

本教材编写的指导思想是：适当降低理论要求，重视技能训练，加强能力培养，提高应用意识。选用本书时，可根据教学需要和学时安排等具体情况取舍。通过本教材的教学，使学生达到以下要求：

（1）为学生学习后继课程和解决实际问题提供必要的数学基础；

（2）逐步培养学生具有比较熟练的基本运算能力，综合运用所学知识分析和解决实际问题的能力；

（3）具备初步抽象概括问题的能力，自学能力以及一定的逻辑推理能力。

本书由陕西工业职业技术学院的老师编写：第 1 章由刘楠编写；第 2 章、第 5 章由高汝林编写；第 3 章由方小艳编写；第 4 章、第 8 章由张绪绪编写；第 6 章、第 9 章由何润民编写；第 7 章、第 11 章由马俊编写；第 10 章由郝军编写。本书习题的参考答案由方小艳编写。主编高汝林负责本书的统稿、修改和定稿。本书由张广学、云尚伟审编。

本教材在编写过程中得到编者所在院校的领导及有关老师的大力支持，同时也得到北京理工大学出版社的积极协助并对该书提出了许多宝贵的意见与建议，对此一并表示衷心感谢。

限于编者的水平，不妥之处在所难免，希望广大读者批评指正。

编　者

2013.5

目　录

第1章　函数的极限与连续

高等数学以函数为主要研究对象. 极限是研究函数性态的基本方法和工具. 函数的连续性是函数的一种重要性态. 本章将介绍函数、极限和函数连续性等基本概念，以及它们的一些性质.

1.1　初等函数

1.1.1　常量与变量

在观察某种自然现象或进行某项科学实验的过程中，常涉及一些事物的数量变化情况. 例如，一物体作匀速直线运动，那么时间与位移都是变量，而速度则为常量. 又如，一密闭容器内的气体在加热过程中，若考虑容器内气体的体积 V、分子数 n、绝对温度 T 以及压力 P，其中体积 V 与分子数 n 两个量在整个过程中保持不变，而绝对温度 T 与压力 P 则不断变化.

一般地，我们把在某个过程中保持一定数值的量称为常量，把可以取不同数值的量称为变量.

应当注意，一个量究竟是常量还是变量是由该过程的具体条件来确定的. 同一个量在这个过程中是常量，而在另一个过程中却有可能是变量. 例如速度，在匀速运动中是常量，而在匀加速运动中是变量.

1.1.2　区间与邻域

1. 区间

一个变量能取得的全部数值的集合，称为这个变量的变化范围或变域. 今后我们常遇到的变域是区间. 所谓变量 x 的区间就是介于两实数 a 与 b 之间的一切实数，在数轴上就是从 a 到 b 的线段. a 与 b 称为区域的端点，当 $a<b$ 时，a 称为左端点，b 称为右端点.

(1)闭区间：满足不等式 $a\leqslant x\leqslant b$ 的所有实数 x 的集合，称为以 a，b 为端点的闭区间，记为$[a, b]$，见图 1-1，即

$$[a,b]=\{x|a\leqslant x\leqslant b\}$$

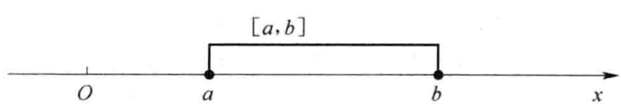


图 1-1

(2)开区间：满足不等式 $a<x<b$ 的所有实数 x 的集合，称为以 a，b 为端点的开区间，记为(a, b)，见图 1-2，即

$$(a,b)=\{x|a<x<b\}$$

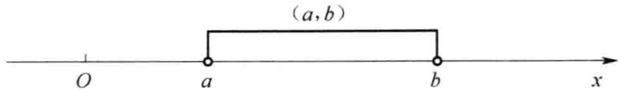


图 1－2

(3)半开区间：满足不等式 $a<x\leqslant b$(或 $a\leqslant x<b$)的所有实数 x 的集合，称为以 a，b 为端点的半开区间，记为$(a, b]$(或$[a, b)$)，分别见图 1－3 和图 1－4，即

$$(a,b]=\{x|a<x\leqslant b\}$$
$$[a,b)=\{x|a\leqslant x<b\}$$

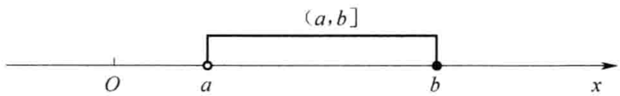


图 1－3

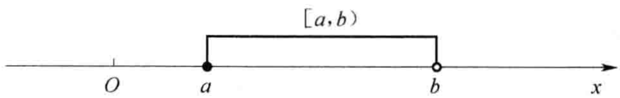


图 1－4

以上这些区间都称为有限区间．有限区间右端点 b 与左端点 a 的差 $b-a$，称为区间的长度．

此外还有所谓的无限区间．引进记号$+\infty$(读作正无穷大)及$-\infty$(读作负无穷大)，则无限的半开或开区间表示如下：

(4)$(a, +\infty)=\{x|x>a\}$

$[a, +\infty)=\{x|x\geqslant a\}$

$(-\infty, b)=\{x|x<b\}$

$(-\infty, b]=\{x|x\leqslant b\}$

它们在数轴上表现为长度为无限的半直线，如图 1－5 所示．

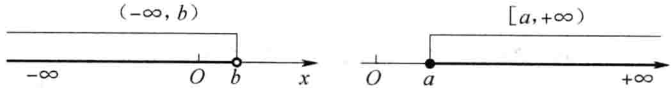


图 1－5

全体实数的集合 **R** 也记为

$$(-\infty,+\infty)=\{x|-\infty<x<+\infty\}$$

2．邻域

设 δ 是一个正数，对于数轴上一点 x_0，我们把以 x_0 点为中心，长度为 2δ 的开区间 $(x_0-\delta, x_0+\delta)$称为点 x_0 的 δ 邻域(见图 1－6)，可用不等式$|x-x_0|<\delta$ 表示．正数 δ 称为这个邻域的半径．若在点 x_0 的邻域内去掉 x_0 点，其余部分称为点 x_0 的去心邻域，可用不等式 $0<|x-x_0|<\delta$ 表示．

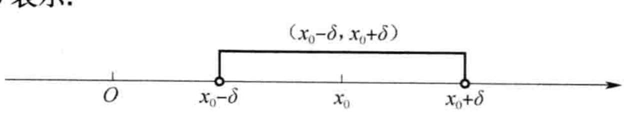


图 1－6

1.1.3　函数概念

在讨论函数的概念之前，我们先来看几个实际生活中的例子.

例 1　某会员制商店对会员购物提供优惠，会员可按商品价格的 85%购买商品，但每年需交纳会员费 300 元. 问：若某人只在此商店购物，至少需购多少钱的商品(按商品价格计算)才能真正受惠? 一年内实际受惠多少钱?

解　假设按商品价格计算此人一年内购买 x 元的商品，获得商品优惠(即在商品上少付的钱)0.15x，但因交纳了 300 元会员费，因此实际获得的优惠 y 是 $0.15x-300$. 按此公式可以计算出受惠的钱数，见表 1－1.

表 1－1

商品钱数 x/元	0	500	1 000	1 500	2 000	2 500	3 000	3 500	4 000
受惠钱数 y/元	－300	－225	－150	－75	0	75	150	225	300

从表 1－1 中可以看出至少需要购 2 000 元商品才能真正受惠.

例 2　火车站收取行李费的规定如下：当行李不超过 50 kg 时，按基本运费 0.15 元/kg 收费；当超过 50 kg 时，超重部分按 0.25 元/kg 收费，则运费 y 与重量 x 之间的关系为

$$y=\begin{cases}0.15x & 0<x\leqslant 50\\ 0.15\times 50+0.25\times(x-50) & x>50\end{cases}$$

例 3　某气象站用自动温度记录仪记下一昼夜气温，如图 1－7 所示.

由上面例子看到，各例中各有两个变量且两变量之间都有一定的对应关系，这种对应关系，正是函数概念的实质.

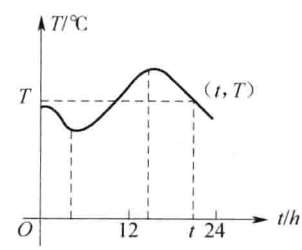


图 1－7

定义 1.1　设 x 和 y 是某过程中的两个变量，D 是一个给定的数集. 如果对于 D 中的每一个数 x，变量 y 按照某种对应法则总有确定的数值和它对应，则称 y 是 x 的函数，记为$y=f(x)$. 数集 D 称为这个函数的定义域，x 称为自变量，y 称为因变量. 因变量 y 所对应的数值范围称为函数的值域. 当 $x=x_0\in D$ 时，对应的函数值记为 $f(x_0)$.

由定义可看出，确定函数有两个要素：定义域和对应法则. 函数 $y=f(x)$中表示对应关系的记号 f 也可改用其他字母，比如函数 $y=\varphi(x)$，$y=\psi(x)$，$y=F(x)$等.

在实际问题中，函数的定义域是根据问题的实际意义确定的. 如例 1 中，$D=\{x\,|\,x\geqslant 0\}$；例 2 中，$D=\{x\,|\,x>0\}$；例 3 中，$D=\{x\,|\,0\leqslant x\leqslant 24\}$. 三个例子中 x 分别表示商品钱数、行李重量及时间.

在数学中，有时不考虑函数的实际意义，这时我们约定：函数的定义域就是自变量所能取的使函数解析式有意义的一切实数. 例如函数 $y=\sqrt{1-x^2}$的定义域是闭区间$[-1, 1]$，函数 $y=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$的定义域是开区间$(-1, 1)$.

如果自变量在定义域内任取一个数值时，对应的函数值都只有一个，这种函数称为单值函数，否则称为多值函数. 以后若无特别说明，本书的函数都是指单值函数.

例 4　求下列函数的定义域：

(1) $y=\ln\sqrt{1-x^2}$；

(2) $y=\dfrac{1}{\sqrt{\sin x}}$.

解 (1)根据对数真数必须为正数，有

$$\sqrt{1-x^2}>0$$

即 $1-x^2>0$，解之，得 $-1<x<1$. 所以定义域为 $\{x\mid -1<x<1\}$ 或记为 $(-1, 1)$.

(2)函数是一个分式且分母开平方，所以有

$$\sin x>0$$

解之，得 $2k\pi<x<2k\pi+\pi$，$k\in\mathbf{Z}$，所以定义域 $D=\{x\mid 2k\pi<x<2k\pi+\pi, k\in\mathbf{Z}\}$.

例 5 下列各对函数是否相同？为什么？

(1) $f(x)=\dfrac{x}{x}$；$p(x)=1$ (2) $f(x)=x$；$p(x)=\sqrt{x^2}$

解 (1)不相同. 因为定义域不同；$f(x)$ 的定义域为 $(-\infty, 0)\cup(0, +\infty)$，而 $p(x)$ 的定义域为 $(-\infty, +\infty)$.

(2)不相同. 因为对应关系不同，当 $x=-1$ 时，$f(-1)=-1$；而 $p(-1)=1$.

例 6 函数 $y=|x|=\begin{cases}x, & x\geqslant 0\\ -x, & x<0\end{cases}$ 的定义域 $D=\{x\mid -\infty<x<+\infty\}$，值域 $W=\{x\mid x\geqslant 0\}$，它的图形如图 1-8 所示.

例 7 函数

$$y=\operatorname{sgn}x=\begin{cases}1, & x>0\\ 0, & x=0\\ -1, & x<0\end{cases}$$

称为符号函数，它的定义域 $D=(-\infty, +\infty)$，值域 $W=\{-1, 0, 1\}$，它的图形如图 1-9 所示.

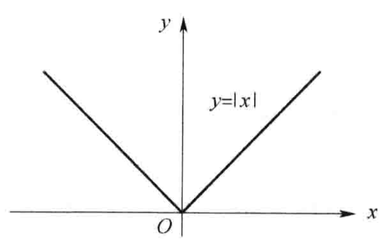


图 1-8

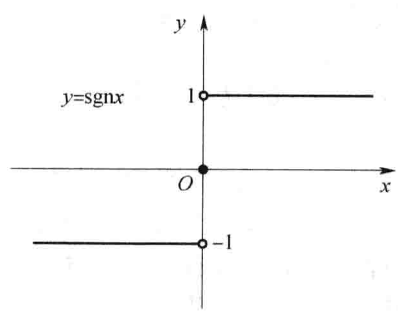


图 1-9

从例 6 和例 7 可以看到，有时一个函数要用几个式子表示. 这种在自变量的不同变化范围中，对应法则用不同式子来表示的函数，通常称为分段函数.

1.1.4 函数的几种特性

1. 单调性

如果函数 $f(x)$ 在区间 (a, b) 内随 x 的增大而增大，即对于 (a, b) 内的任意两点 x_1 和 x_2，当 $x_1<x_2$ 时，有 $f(x_1)<f(x_2)$，则称函数 $f(x)$ 在 (a, b) 内是单调增加的，区间 (a, b) 称为函

数 $f(x)$的单调增加区间．单调增加函数的图像沿横轴正向而上升，如图 1－10 所示．

如果函数 $f(x)$在区间$(a,\ b)$内随 x 的增大而减小，即对于$(a,\ b)$内的任意两点 x_1 和 x_2，当 $x_1<x_2$ 时，有 $f(x_1)>f(x_2)$，则称函数在区间$(a,\ b)$内是单调减少的，区间$(a,\ b)$称为单调减少区间．单调减少函数的图像沿横轴正向而下降，如图 1－11 所示．

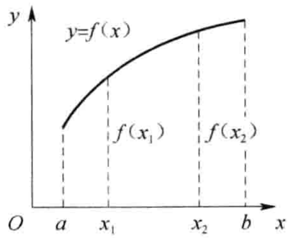


图 1－10

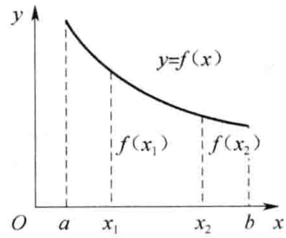


图 1－11

2．奇偶性

如果函数 $f(x)$的定义域关于原点对称，且对任意 x，都有 $f(-x)=-f(x)$，则称$f(x)$为奇函数；如果 $f(x)$的定义域关于原点对称，且对任意 x，都有 $f(-x)=f(x)$，则称$f(x)$为偶函数．

奇函数的图像关于原点对称，如图 1－12 所示，偶函数的图像关于 y 轴对称，如图 1－13所示．

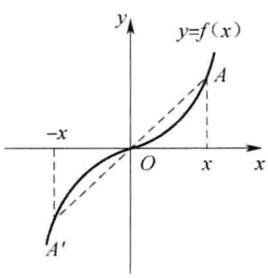


图 1－12

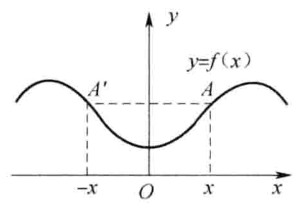


图 1－13

例如，函数 $f(x)=x^2-4$ 是偶函数，函数 $f(x)=x^3$ 是奇函数．

3．周期性

对于函数 $f(x)$，如果存在一个正数 l，使得对于定义域内的一切 x，有 $f(x+l)=f(x)$，则称 $f(x)$为周期函数．周期函数的周期通常是指满足上述条件的最小正数．一个以 l 为周期的函数，它的图像在定义域内每隔长度为 l 的相邻区间上，有相同的形状，如图1－14所示．

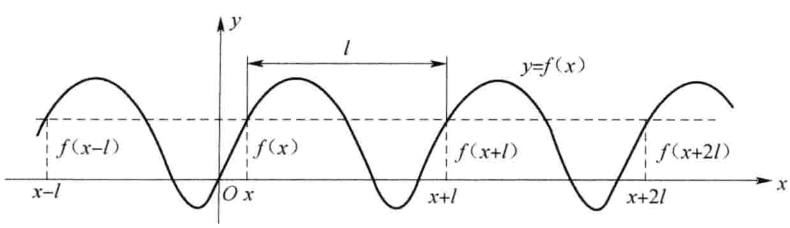


图 1－14

如果函数 $f(x)$是以 l 为周期的周期函数，则函数 $f(x+a)$也是以 l 为周期的周期函数，函数$f(ax)$是以$\dfrac{l}{|a|}$为周期的周期函数．

三角函数为常见的周期函数.

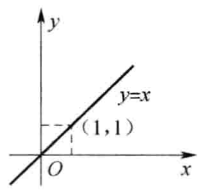
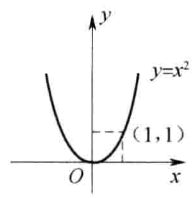
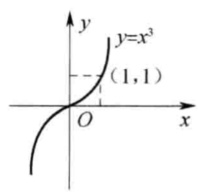
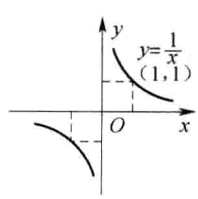
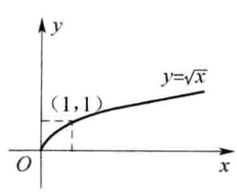
4. 有界性

对于函数 $f(x)$，如果存在一个正数 M，使得对于定义区间 (a, b) 内的一切 x 值，对应的函数值均有 $|f(x)| \leqslant M$，则称 $f(x)$ 在区间 (a, b) 内有界；如果这样的正数不存在，则称 $f(x)$ 在区间 (a, b) 内无界. 例如 $y=\sin x$ 是有界函数，而函数 $y=x^3$ 在 $\boldsymbol{R}$ 内则是无界函数.

1.1.5 基本初等函数

我们将已学过的幂函数、指数函数、对数函数、三角函数和反三角函数统称为基本初等函数. 它们的定义域、值域、图像和特性如表 1-2 所示.

表 1-2

	函 数	定义域与值域	图 像	特 性
幂函数	$y=x$	$x\in(-\infty, +\infty)$ $y\in(-\infty, +\infty)$		奇函数 单调增加
	$y=x^2$	$x\in(-\infty, +\infty)$ $y\in[0, +\infty)$		偶函数 在 $(-\infty, 0)$ 内单调减少 在 $(0, +\infty)$ 内单调增加
	$y=x^3$	$x\in(-\infty, +\infty)$ $y\in(-\infty, +\infty)$		奇函数 单调增加
	$y=x^{-1}$	$x\in(-\infty, 0)\cup(0, +\infty)$ $y\in(-\infty, 0)\cup(0, +\infty)$		奇函数 单调减少
	$y=x^{\frac{1}{2}}$	$x\in[0, +\infty)$ $y\in[0, +\infty)$		单调增加