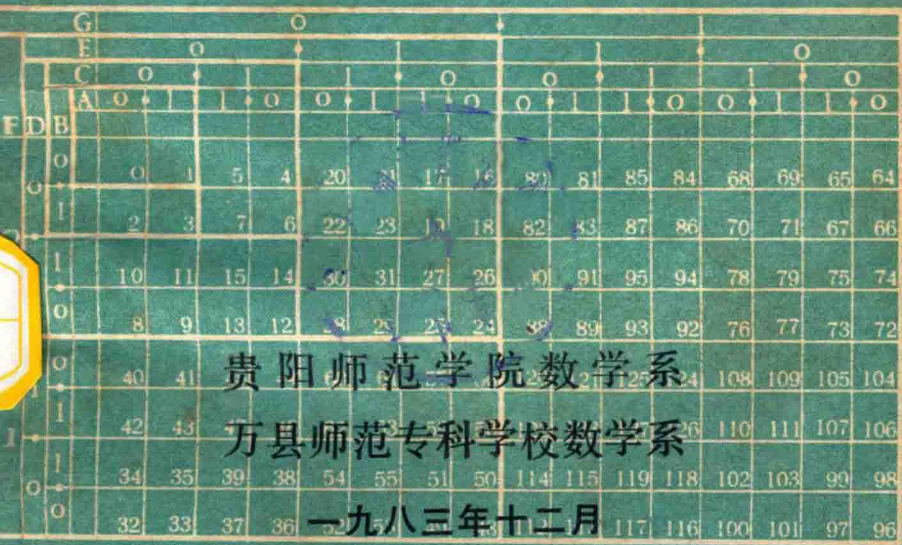
逻辑代数与电子计算机简介

（高师内部交流教材）



贵阳师范学院数学系

万县师范专科学校数学系

一九八三年十二月

前　　言

本书是根据1982年10月教育部在昆明召开的全国师专数学专业教学大纲审定会拟定的《逻辑代数与电子计算机简介教学大纲》编写的。全书共分六章，未加※号部分约为54学时，可供二年制师专讲授，三年制师专可在加※号部分增选14学时内容。本书也可供教育学院和教师进修学院作参考教材；逻辑代数部分还可作师范学院数学系专题讲座参考资料。

本书初稿的第一至五章和附录一由万县师专马自甦执笔编写，第六章由贵阳师院余百年、吕传汉执笔编写，附录二是马自甦根据贵阳师院龙三、吕传汉、段应全三同志的论文进行综合、整理而编写成的。初稿形成后，参加编写的人互相审阅和修改了全部稿件。

在本书的编写过程中，得到了万县师专和贵阳师院学校领导的热情支持与鼓励，陕西师大张德荣副教授和万县师专黄美华对全书结构和部分章节提出了宝贵意见，万县师专钱永苏对有关章节提出了修改意见并收集整理了部分习题，在此一并致谢。

由于编者水平低，编写时间仓促，书中错误和缺点在所难免，敬请读者批评指正。

编　　者

一九八三年十二月

目　　录

第一章 二进制

人类从对数的认识到掌握数的进位制，经历了一个漫长的历史过程。可以说，进位制记数法是人类最早最重大的数学发明，是件了不起的数学成就。当今电子计算机的广泛应用，更促进了人们对数的进位制及其运算的研究。由于电子计算机中一般采用的是二进制记数法，因此，在学习逻辑代数与电子计算机的基本知识之前，有必要首先介绍二进制。

众所周知，算盘是一种十进制的运算工具，它的每一个位上有七颗算珠，这七颗算珠可以组成十六种不同的状态。我们选定其中十种状态分别代表0，1、2，…，9这十个数码。这十种状态的区别是很鲜明的，并且很容易从一种状态变成另一种状态。

电子计算机如果采用十进制进行计算，电子元件就必须能鲜明地反映出十种不同的状态，并且能够从一种状态容易地转变成另一种状态。这给计算机的设计和制造带来很大的困难，这是很不经济的。

然而，如果要电子元件鲜明地反映两种状态，譬如通电与截断，高电压与低电压，有脉冲与无脉冲，正向磁化与负向磁化等，则比较容易实现，而且，这两种物理状态能够灵敏地从一种转变成另一种。如果假设将某个电子元件的正向磁化状态用来代表“1”，负向磁化状态用来代表“0”，那么这样的电子元件就可以用来表示二进制的一个数码。将

这样的四个电子元件排列起来，就可以表示任何一个二进制四位数。

由于电子元件只要求反映两种状态，这就使计算机的设计和制造变得容易。所以，电子计算机不采用习惯的十进制，而采用二进制。

§1.1 常用十进计数制及其推广

为了讲清二进制，先从大家熟悉的十进制说起。

在生产实际和日常生活中，人们最常用最习惯的计数法是十进制计数法，它来源于人类最初用两手十指进行计数的实践。十进制计数法用处之广是不用怀疑的，但这并不等于说，它就是万能的唯一的计数法。事实上，我们知道的非十进制的计数法就很多，例如：一打铅笔是12支，是12进位的；1小时是60分，是60进位的；一双鞋是两支鞋，是二进位的等等。

我们在表示一个十进制数时，是用十个不同的数字符号：0，1，2，…，9中的某一些符号的不同的重复排列来表示其数值部分的。这十个数字符号我们称之为数码。一个数码处于不同的位置（数位）就有不同的位置值（或权），因而所表示的数值也就不同，这就是所谓位值原则。例如十进制数109.09的小数点前的“9”表示9个1，小数点后的“9”表示9个1%。作为特殊的数码“0”，它处于任何位置时都表示同一个数“0”。

数109.09实际上是下面写法的缩写：

$$1\times10^2+0\times10^1+9\times10^0+0\times10^{-1}+9\times10^{-2}$$
$$=109.09,$$

一般地，任一个十进制数 S（不妨设为正数）都可表为：

$$S=K_n(10)^n+K_{n-1}(10)^{n-1}+\cdots+K_1(10)^1+K_0(10)^0+K_{-1}(10)^{-1}+\cdots+K_{-m}(10)^{-m}$$
$$=\sum_{i=n}^{-m}K_i(10)^i。$$

其中K_i是0，1，2，…，9十个数码之一，m、n为正整数，10称为基数。所谓基数，就是该进位制中所有可能用到的数码的总数。实际上，基数可以为任意大于1的正整数P。如前所述的12进位制的基数为12，60进位制的基数为60，2进位制的基数为2等等。

仿照十进制数的写法，任一P进制数S可以表为：

$$S=K_nP^n+K_{n-1}P^{n-1}+\cdots+K_1P^1+K_0P^0+K_{-1}P^{-1}+\cdots+K_{-m}P^{-m}$$
$$=\sum_{i=n}^{-m}K_iP^i$$

其中K_i可以是0，1，2，…，（P－1）中的任一个数码，它和一个固定的P^i相对应。P^i称为各个数位上的位置值（或权）。上式也称为数S按权的展开式。

在P进制中，相邻两个数位的权相差P倍。对P进制小数而言，小数点左移一位原数减小P倍，即乘了$\frac{1}{P}$；右移一位则增大P倍，即乘了P。用P进制计数时，按“逢P进一，退一当P”的进退位原则进行。

P进制数各位的名称规定为：数码K_i所在的数位叫做P的i次幂位。例如二进制数101.11的各个数位的叫法是：

$$\begin{array}{ccccccc} 1 & 0 & 1 & . & 1 & 1 \\ 2^2\text{位} & 2^1\text{位} & 2^0\text{位} & & 2^{-1}\text{位} & 2^{-2}\text{位} \end{array}$$

§1.2 二 进 制 数

在P进制数的按权的展开式中，令P＝2即得二制数：

$$S=K_n2^n+K_{n-1}2^{n-1}+\cdots+K_12^1+K_02^0+K_{-1}2^{-1}+K_{-m}2^{-m},$$

其中K_i只取数码“0”和“1”，它由S的值决定，m、n为正整数。

在二进制数中，相邻两个数位的权相差2倍，用二进制计数时，按“逢二进一，退一当二”的原则进行。

通常将按权的展开式写成如下缩写形式：

$$S=K_nK_{n-1}\cdots K_1K_0.K_{-1}K_{-2}\cdots K_{-m},$$

由于生产实际中提出的计算问题都是采用十进制，要能用电子计算机进行计算，就必须将十进制数转变成二进制数。另一方面，电子计算机输出的结果也必须还原成十进制表示，否则我们根本看不懂，当然也就无法利用了。因此，有必要研究二进制数与十进制数相互间是怎样转换的。

以下我们将讨论二进制数与十进制数的转换关系。为了区分两种进制的数，必要时在数的右下角加标注。通常对十进制的标注省略不写。

任给一个二进制数，很容易把它转换成等值的十进制数。方法是将二进制数按权展开，然后计算其值。

例如：

$$11011.1011_{(2)}=1\times2^4+1\times2^3+0\times2^2+1\times2^1+1\times2^0+1\times2^{-1}+0\times2^{-2}+1\times2^{-3}$$

$$+1\times 2^{-4}$$

$$=16+8+2+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}$$

$$=27.6875$$

上式表明，二进制数11011.1011等于十进制数27.6875。

从以上例子还可看出，同一个数用二进制表示要比用十进制表示的位数多。粗略地讲，前者约为后者的三倍（指整数部分）。

这是因为，假设一个数S在两种进位制中分别近似地表为：

$$S\approx 2^n;\qquad S\approx 10^m,$$

则 $m\approx n\mathrm{Log}_{10}2,\qquad \therefore n/m\approx 3$。

如前所言，电子计算机采用二进制，就可以用具有两个稳定状态的电子元件来表示数，使计算机的设计制造变得很容易，这是采用二进制的优点。但是，由于用二进制表示数时位数成倍增多，这就使需要的电子元件的数目也成倍增多。因此，电子计算采用二进制并不一定是最佳方案。

可以证明，计算机采用三进制最省设备。为证明这点，假定一个元件表示一种物理状态，P进制数的每位需要P种状态，则m位共需要物理状态个数为$x=m\cdot P$。又设m位P进制数所能表示的最大数是M，则有$M+1=P^m$。两边取对数后得

$$\mathrm{Ln}(M+1)=m\cdot \mathrm{Ln}P=x\cdot\frac{\mathrm{Ln}P}{P}$$

故有

$$x=\frac{P\cdot \mathrm{Ln}(M+1)}{\mathrm{Ln}P}$$

欲使计算机最省设备，即需物理状态个数最少，即需求x的最小值。为此，可令$\frac{dx}{dP}=0$，即

$$\frac{dx}{dP}=\frac{Ln(M+1)}{(LnP)^2}\cdot(L_nP-1)=0$$

由此得P＝e。可见，当P等于e时，x最小，即所需物理状态个数最少。由于进位制基数P只能取正整数，故取最接近e的整数3时最省设备。但由于目前制造具有三个稳定状态的电子元件比较困难，而且可靠性很差，所以电子计算机中不采用三进制仍采用二进制。

以上我们用计算二进制数按权展开式的值的方法，将一个二进制数化成了十进制数。这个计算值的过程还可用综合除法的方法来进行。事实上，一个n位的二进制整数按权的展开式可看成是一个系数为1或0的n－1次多项式在2处的值，一个m位的二进制小数按权的展开式可看成是一个m次多项式在$\frac{1}{2}$处的值。例如对上面的例题，若用综合除法来做就是：

$$\begin{array}{ccccc|c}
1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 2 \\
 & 2 & 6 & 12 & 26 & \\
\hline
1 & 3 & 6 & 13 & 27 &
\end{array}
\qquad
\begin{array}{ccccc|c}
1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0.5 \\
 & 0.5 & 0.75 & 0.375 & 0.6875 & \\
\hline
1 & 1.5 & 0.75 & 1.375 & 0.6875 &
\end{array}$$

注意，用综合除法计算二进制小数部分的值时，应按2^{-m}，$2^{-(m-1)}$，…，2^{-1}位的顺序排列，并在2^{-1}位后面加上系数为0的2^0位。

以上讨论表明，将一个二进制数化成十进制数并不困

难。但是反过来将一个十进制数化成二进制数就麻烦得多了，这个问题留在后面讨论。

§1.3 八 进 制 数

二进制数位数太多，书写不方便，看起来也不习惯，为了克服这一缺点，引入八进制数作为二进制数与十进制数的中间过渡是很方便的。

在一般P进制中，取P＝8就得到八进制。

任给一个八进制数如625.1，按权展开并计算其值，就可将八进制数转换成十进制数：

$$\begin{aligned}625.1_{(8)} &= 6\times 8^2+2\times 8^1+5\times 8^0+1\times 8^{-1}\\ &=384+16+5+0.125\\ &=405.125\end{aligned}$$

这说明八进制数625.1等于十进制数405.125。

将八进制数化成十进制数同样可以采用综合除法。

下面讨论二进制数与八进制数的相互转换关系。

由重复排列的知识知，所有可能的不同的三位二进制数（包括首位为0的情形）共有八个，将这八个三位的二进制数由小到大顺次列出，然后转换成十进制数，可得下表：

二进制数	000	001	010	011	100	101	110	111
十进制数	0	1	2	3	4	5	6	7

以上八个十进制数恰好是八进制中的八个数码。因此，我们也可以把它们看成八进制中的八个数码，则上表即表示二进制数与八进制数的对应关系。按照这个对应关系，我们就

可以实现八进制数与二进制数的相互转换。

譬如将八进制数625.1转换成二进制数，我们先作如下变化：

$$
\begin{aligned}
625.1_{(8)} &= 6\times8^2+2\times8^1+5\times8^0+1\times8^{-1}\\
&=(2^2+2)\times2^6+2\times2^3+(2^2+2^0)\times2^0\\
&\quad+1\times2^{-3}\\
&=2^8+2^7+2^4+2^2+2^0+2^{-3}\\
&=110010101.001_{(2)}。
\end{aligned}
$$

注意上式两端的特点，我们发现有如下规律：将八进制数的每一位换成对应的三位二进制数按原来的顺序排列起来即得到这个八进制数所对应的二进制数。

将以下过程反推转去即可总结出将一个二进制数转换成八进制数的方法：

将二进制数从小数点开始，分别向左和向右依次将每三位合成一组(就象十进制数开立方那样每三位加一撇)，譬如二进制数10110110011.01100111分组后成为：

10　110　110　011 . 011　001　11

如果首末两组不足三位可以在前和在后添0：

010　110　110　011 . 011　001　110

最后把每组三位二进制数按对应关系写八进制数，按此法则，以上二进制数转换成八进制数就是2663.316。

以上分析表明，二进制数与八进制数的相互转换是很简单的，它不需要做任何计算就可实现。此外，我们还看出，采用八进制书写二进制数，位数约减少到原来的三分之一，看起来也比较习惯。

§1.4 化十进制数为二进制数

为了叙述方便起见，我们结合具体例子来加以说明。

例 1 将十进制数405化成二进制数。

解 设$405=K_nK_{n-1}\cdots K_1K_0(2)$

我们的目的是求出K_i的值。

将等式右端按权展开：

$$405=K_n2^n+K_{n-1}2^{n-1}+\cdots+K_12^1+K_02^0$$
$$=2(K_n2^{n-1}+K_{n-1}2^{n-2}+\cdots+K_1)+K_0$$

等式两端同除以2：

$$202+\frac{1}{2}=(K_n2^{n-1}+K_{n-1}2^{n-2}+\cdots+K_1)+\frac{K_0}{2}$$

要等式成立，必须要等式两端整数和小数部分对应相等，于是$K_0=1$，它正好是$405\div2$的余数。

等式两端划去相等的数后再除以2：

$$101=(K_n2^{n-2}+K_{n-1}2^{n-3}+\cdots+K_2)+\frac{K_1}{2}$$

比较等式两端得$K_1=0$，它正好是$202\div2$的余数。

将以上过程继续下去，直到商数等于0时为止（后面将证明，这种情形必定出现）。

整个计算过程和结果可用竖式表述如下：

$$
\begin{array}{r|l}
2 & 405 \\ \hline
2 & 202 \cdots\cdots \text{余数为 } 1 = K_0 \\ \hline
2 & 101 \cdots\cdots \text{余数为 } 0 = K_1 \\ \hline
2 & \ \ 50 \cdots\cdots \text{余数为 } 1 = K_2 \\ \hline
2 & \ \ 25 \cdots\cdots \text{余数为 } 0 = K_3 \\ \hline
2 & \ \ 12 \cdots\cdots \text{余数为 } 1 = K_4 \\ \hline
2 & \ \ \ \ 6 \cdots\cdots \text{余数为 } 0 = K_5 \\ \hline
2 & \ \ \ \ 3 \cdots\cdots \text{余数为 } 0 = K_6 \\ \hline
2 & \ \ \ \ 1 \cdots\cdots \text{余数为 } 1 = K_7 \\ \hline
 & \ \ \ \ 0 \cdots\cdots \text{余数为 } 1 = K_8
\end{array}
$$

最后按从下到上的顺序将余数排列起来即得所求的二进制数，即

$$405 = 110010101(2)$$

为节省篇幅，也可将以上竖式排列成如下横式：

$$
\begin{array}{ccccccccccccc}
405 & \xrightarrow{\div 2} & 202 & \longrightarrow & 101 & \longrightarrow & 50 & \longrightarrow & 25 & \longrightarrow & 12 & \longrightarrow & 6 \\
\text{余数}\downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
1 & & 0 & & 1 & & 0 & & 1 & & 0 & & \\
(K_0) & & (K_1) & & (K_2) & & (K_3) & & (K_4) & & (K_5) & &
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{cccccc}
\longrightarrow & 3 & \longrightarrow & 1 & \longrightarrow & 0 \\
 & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 & 0 & & 1 & & 1 \\
 & (K_6) & & (K_7) & & (K_8)
\end{array}
$$

通常称以上方法为“除 2 取余法”。

对不很大的十进制整数，还可以用重复减法：累次减去包含在前一步结果中的 2 的最高次幂来化成二进制整数。

例如用重复减法来做上一题：

$$
\begin{array}{rl}
405 & \\
-256 & \cdots\cdots\cdots 2^{8} \\
\hline
149 & \\
-128 & \cdots\cdots\cdots 2^{7} \\
\hline
21 & \\
-16 & \cdots\cdots\cdots 2^{4} \\
\hline
5 & \\
-4 & \cdots\cdots\cdots 2^{2} \\
\hline
1 & \\
-1 & \cdots\cdots\cdots 2^{0} \\
\hline
0 &
\end{array}
$$

$\therefore \quad 405=2^{8}+2^{7}+2^{4}+2^{2}+2^{0}=110010101_{(2)}$

例2　将十进制小数0.625化成二进制小数。

解　设$0.625=0.K_{-1}K_{-2}\cdots K_{-m}\cdots\cdots_{(2)}$

$$=K_{-1}2^{-1}+K_{-2}2^{-2}+\cdots+K_{-m}2^{-m}+\cdots\cdots$$

我们的目的是确定K_{-1}，K_{-2}，…的值。

将等式两端同乘以2：

$$1.25=K_{-1}+(K_{-2}2^{-1}+\cdots+K_{-m}2^{-m+1}+\cdots\cdots)$$

等式两端整数部分和小数部分必须对应相等，于是$K_{-1}=1$，它正好是0.625乘以2的整数部分。

等式两端划去整数部分保留小数部分继续乘以2：

$$0.5=K_{-2}+(K_{-3}2^{-1}+\cdots+K_{-m}2^{-m+2}+\cdots\cdots)$$

比较等式两端得$K_{-2}=0$，它正好是0.25乘以2的整数部分。

继续以上过程，将结果列成竖式：

$$
\begin{array}{l|l}
 & 0.625 \\
 & \quad\times\ 2 \\
\hline
1. & \ 25 \cdots\cdots \text{整数部分为 } 1 = K_{-1} \\
 & \times 2 \\
\hline
0. & \quad 5 \cdots\cdots \text{整数部分为 } 0 = K_{-2} \\
 & \times 2 \\
\hline
1. & \quad 0 \cdots\cdots \text{整数部分为 } 1 = K_{-3}
\end{array}
$$

最后将每一步的整数部分按从上到下的顺序排列起来即得所求的二进制小数：

$$0.625 = 0.101 \quad (2)$$

此方法通常称为“乘2取整法”。

在上面的例子中，经有限次乘法就出现小数部分为0的情形，从而使乘2取整过程终止，但确有乘积的小数部分永不为0的情形，例如将十进制小数0.1化成二进制 小数就会出现无限循环的情形：

$$0.1 = 0.000110011001100\cdots\cdots(2) = 0.0\overline{0011}(2)$$

此时可根据精度要求取有限位作为近似值：

$$0.1 \approx 0.0001100110011(2)$$

此例说明，十进制小数0.1是有限位，化成二进制后却变成了无限位而且是循环的。那么，会不会出现无限不循环的情况呢？凭直观感觉我们会回答：不会！若不然，用十进制表示的有理小数0.1改用二进制表示后变成了无理数，这是不可能的。但这种凭直观感觉下的结论不能算作严格的证明，因为我们还不能肯定，数制转换是否改变数的“有理”或“无理”的本质特征，后面我们将证明：任一十进制有理纯小数（有限小数或无限循环小数）都可唯一地化成任意p进制的纯小数，而且这种纯小数还是有理的；反之亦然。

乘2取整法也可写成横式形式：