章士藻编著

Y

坐标系与解析法证题

O X

江苏人民出版社

坐标系与解析法证题

章 士 藻 编著

江苏人民出版社

内 容 提 要

解析法证题，是在坐标系中应用代数法证明初等几何问题的一种简单易行，便于掌握的方法。它是当前中学数学教学中日益显示重要作用的一条几何证题途径。

本书首先系统介绍向量、坐标以及相应坐标系下的基本公式与方程等解析法证题所必需的预备知识；随之探讨解析法证题的一般方法和基本技能技巧；最后对不同要求的各类解析法证题作示范，并附习题及其答案提示。

本书内容符合中学数学教学大纲和现行课本要求。与此同时，为了扩大解析法证题的范围，使学生获得更为简捷的方法，书中引入了易为中学生接受的仿射坐标系等有关知识。

坐标系与解析法证题

章士藻 编著

江苏人民出版社出版

江苏省新华书店发行　　南京人民印刷厂印刷

开本 787×1092毫米 1/32 印张 6.125 字数 130,000

1983年5月第1版　1983年5月第1次印刷

印数 1—15,010 册

书号：7100·235　定价：0.47 元

责任编辑　何震邦

绪 言

在人类历史上，几何学产生较早.最早的初等几何学，是采用综合法进行研究的.十七世纪中叶起，西方资本主义生产开始发展起来，许多生产实际问题的解决，迫切要求在数学中提出新的概念与方法.在这样的历史条件下，法国数学家笛卡儿于1637年提出了平面坐标系.这是数学中的转折点.

坐标系的建立，使几何学中的基本对象——点和代数学中的基本对象——数之间建立了联系，将几何图形看成曲线(曲面)——动点的轨迹；曲线(曲面)上的点所满足的几何条件，看成点的坐标所满足的代数方程，从而建立曲线(曲面)与方程的对应.随之而来，就产生了通过代数方程研究几何图形的一种新方法——解析法.

解析法证题，为初等几何证题提供了一个简单易行又便于掌握的方法.近几十年来，随着数学教学改革的迅速发展，解析法证题，已越来越被人们所重视.为此笔者尝试编写了这本书，就坐标的概念；相应坐标系下有关的基本公式与方程；解析法证题的一般方法步骤和基本的技能技巧等作了介绍.最后提出各类不同要求的解析法证题实例示范和要求读者完成的习题.从主观愿望来说，以作为中学生课外阅读和中学数学教学参考之用.

为了扩大解析法证题的实用范围与提高解析法证题的技巧，书中介绍了一般仿射坐标系，推导了平面仿射坐标系中的

有关公式与方程．从中也介绍了空间直角坐标系，球面、平面和空间直线方程等．这些论述绝大部分内容仍属于中学范围，同时所介绍的平面仿射坐标系中的有关公式、方程和直角坐标系中的有关公式、方程基本一致，不增加中学生的额外负担，也不致影响对解析法证题的具体掌握和实际应用．

在编写本书过程中，得到了吴大任、陈鹗两位教授的热情指导，晏国荣、周敬、蔡汝周等同志的具体帮助，在此表示衷心感谢．由于本人水平所限，加之时间仓促，书中缺点、错误在所难免，敬希广大读者批评指正．

目　录

一、从三则考题谈起

下面，是近几年高考试题中的三个题目.

题1 试用解析几何的方法证明三角形的三条高线共点(1980年全国高考试题).

这里所指的解析几何的方法，就是解析法. 为回答什么是解析法证题的问题，我们不妨先将本题的证明过程写出来.

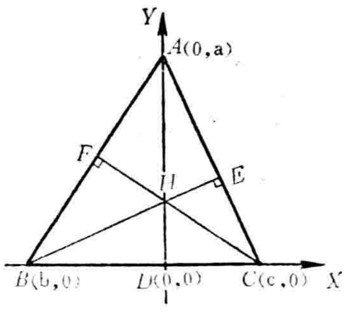

图 1

证明 如图1所示选取直角坐标系，设$\triangle ABC$顶点的坐标为$A(0,a)$、$B(b,0)$、$C(c,0)$.

则 $\because K_{AC}=-\dfrac{a}{c}$,

$$K_{BE}=\frac{c}{a},$$

$\therefore$ BE方程是 $y=\dfrac{c}{a}(x-b)$,

即 $cx-ay-bc=0$.

同理

$\because$ $K_{AB}=-\dfrac{a}{b}$, $K_{CF}=\dfrac{b}{a}$,

$\therefore$ CF 方程是 $y=\frac{b}{a}(x-c)$,

即 $bx-ay-bc=0$.

由 $\begin{cases} cx-ay-bc=0 \\ bx-ay-bc=0 \end{cases}$,解得 BE、CF的交点$H(0,-\frac{bc}{a})$.

显然,H点在直线 AD 上,从而 AD、BE、CF三高线共点,命题得证.

题 2 写出余弦定理(只写出一个公式即可),并加以证明(1981年全国高考试题).

余弦定理:在任意三角形中,一边的平方等于其它两边的平方和减去这两边与它们夹角的余弦之积的两倍.

例如: $a^2=b^2+c^2-2bc\cdot cosA$.

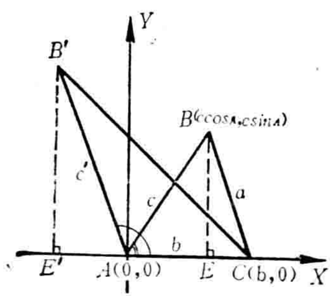

图 2

证明 如图 2 所示选取直角坐标系,在△ABC中不论 A 为锐角或钝角,都可设为$B(c\cdot cosA, c\cdot sinA)$,则由距离公式,得

$$a=|BC|=\sqrt{(b-c\cdot cosA)^2+(0-c\cdot sinA)^2},$$

$$\therefore\quad a^2=(b-c\cdot cosA)^2+(0-c\cdot sinA)^2$$

$$=b^2-2bc\cdot cosA+c^2\cdot cos^2A+c^2\cdot sin^2A,$$

即 $a^2=b^2+c^2-2bc\cdot cosA$.

我们知道,初等几何中的几何证题通常是应用综合法进

行论证的．就以上题1、题2而言，初等几何一般都借助于图形直观，分直角、锐角、钝角三角形的情况逐一进行论证，最后归纳出结论的．然而解析法克服了综合法的这一局限，具有一般性，这就为几何证题开辟了一条新的途径．

题 3 设 $CEDF$ 是一已知圆的内接矩形，过 D 点作该圆的切线，与 CE 的延长线相交于点 A，与 CF 的延长线相交于点 B，求证 $\frac{BF}{AE}=\frac{BC^3}{AC^3}$（1979年全国高考试题）．

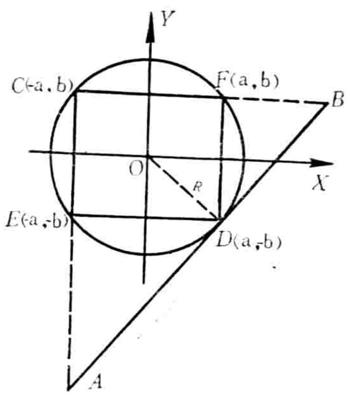

图 3

证明 如图 3 所示选取直角坐标系，设矩形两邻边长为 $2a$ 与 $2b$，外接圆半径为 R，则矩形四个顶点的坐标分别为 $F(a,b)$、$C(-a,b)$、$E(-a,-b)$、$D(a,-b)$；外接圆方程为 $x^2+y^2=R^2$；该圆过 D 点的切线 AB 的方程为 $ax-by=R^2$．

由 $\begin{cases} CF:\ y=b \\ AB:\ ax-by=R^2, \end{cases}$

解得 $B\left(\frac{R^2+b^2}{a},\ b\right)$；

由 $\begin{cases} CE:\ x=-a \\ AB:\ ax-by=R^2 \end{cases}$，解得 $A\left(-a,\ -\frac{R^2+a^2}{b}\right)$．

从图中可见，沿坐标轴方向的有向线段的长度，等于其

端点坐标之差($a^2+b^2=R^2$).

$$\because\ FB=B_x-F_x=\frac{R^2+b^2}{a}-a=\frac{2b^2}{a},$$

$$AE=E_y-A_y=-b+\frac{R^2+a^2}{b}=\frac{2a^2}{b},$$

$$AC=C_y-A_y=b+\frac{R^2+a^2}{b}=\frac{2R^2}{b},$$

$$CB=B_x-C_x=\frac{R^2+b^2}{a}+a=\frac{2R^2}{a},$$

$$\text{又}\ \frac{FB}{AE}=\frac{\frac{2b^2}{a}}{\frac{2a^2}{b}}=\frac{b^3}{a^3},\ \frac{CB^3}{AC^3}=\frac{\left(\frac{2R^2}{a}\right)^3}{\left(\frac{2R^2}{b}\right)^3}=\frac{b^3}{a^3},$$

$$\therefore\ \frac{FB}{AE}=\frac{CB^3}{AC^3}.$$

此题，初等几何通常以综合法通过分析比例式中线段的关系寻求相似形(或添置辅助线构造出相似形)进行证明的，往往具有一定的技巧性.这里运用解析法，在选取坐标系后，仅利用有关公式与方程,通过计算比值,就完成了证明，显示出解析法具有思路明确,易于掌握的特点.

综上所述,象以上这样,经过建立坐标系，设定所论图形上有关点的坐标与曲线的方程后，将几何问题转化成代数问

题，然后运用代数的有关知识，特别是运用恒等变换的方法获得有关结论．再赋予几何意义，从而完成对几何命题的证明，这种证明几何命题的方法，叫做**解析法证题**或**坐标法证题**．这种方法在理论上具有一般性，在方法上比较单一，易于掌握，它又与中学解析几何课程的内容紧密联系，因此，已越来越被广大中学师生所重视．但是，解析法证题的具体方法是怎样的？在实施中应该具备哪些基础知识？需要掌握哪些基本的技能技巧等等？都必须进行系统的探讨，下面，我们将逐一予以介绍．

二、向　　量

§1 向　　量

在生产实际与日常生活中，有些量只有数值的大小，而无方向的意义，例如长度、面积、体积、温度、质量、密度、能量等等，这种量我们叫做**数量**或**标量**；另有一些量，它们不仅有数值的大小，而且还有方向的意义．例如力、速度、加速度、位移、电场强度、磁场强度等等，这种量我们叫做**向量**或**矢量**．人们将这种量抽象出来，就产生了数学中向量这个基本概念，并建立了向量的种种运算．

为形象地表示向量，数学中常用一个带有箭头的线段，即有向线段表示向量，箭头的方向代表向量的方向，线段的长度按选定的比例画出，代表向量的大小．

在书写上为区别于数量，常在普通字母上方加一横线或一箭头表示向量，如$\vec{a}$、$\bar{a}$、$\overrightarrow{AB}$、$\overline{AB}$等，也常用一个或两个大写黑体字母表示向量，如**A**、**AB**等（图 4）．

图　4

向量的长度叫向量的**模**或**绝对值**，记成$|\overline{a}|$、$|\overrightarrow{a}|$、$|\overline{AB}|$、$|\overrightarrow{AB}|$、$|\mathbf{A}|$、$|\mathbf{AB}|$等.模等于1的向量，叫做**单位向量**，通常用$\overline{e}$表示；模等于零的向量，叫做**零向量**，记成$\overline{0}$，零向量的方向不定.

有向线段的起点与终点，也叫做向量的**起点**与**终点**.其中起点可以任意选择的向量，叫**自由向量**，起点固定的向量叫做**固定向量**；起点只能在某一选定方向上滑动的向量叫做**滑动向量**.我们这里主要研究自由向量，因此一般所涉及的向量，如未作声明，皆指自由向量.

向量具有长度与方向两个要素，我们将长度相等，方向相同的两个向量，叫做**相等向量**；而将长度相等，方向相反的两个向量叫做**互逆向量**或**互反向量**．例如图5中，$\overline{a}$与$\overline{b}$是相等向量，$\overline{c}$与$\overline{d}$是互逆向量.

图 5

在自由向量的意义下，我们将平行于同一直线的向量，叫做**共线向量**；空间中平行于同一平面的向量叫做**共面向量**.显然，零向量与任何向量共线，零向量与任何向量共面.

§ 2 向量的加减法

我们知道，两个力F_1与F_2如果同时作用于一质点m

上，它们的合力F，就是以这两个力为边的平行四边形的对角线(图6)，并记成$\overline{F}=\overline{F_1}+\overline{F_2}$.这就是物理学中的所谓“力的平行四边形法则”。

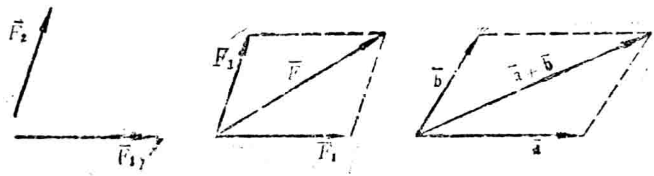

图 6

一般地，两个向量$\overline{a}$与$\overline{b}$的和也符合“平行四边形的法则”，同时，可简便地叙述为：

将第一个向量$\overline{a}$的起点放在任一点上，再将第二个向量$\overline{b}$的起点放在第一个向量$\overline{a}$的终点上，则以第一个向量$\overline{a}$的起点为起点，第二个向量$\overline{b}$的终点为终点的向量叫做$\overline{a}$与$\overline{b}$的和，记成$\overline{a}+\overline{b}$(图7).显然，两个互逆向量的和为零向量，即

$$\overline{a}+(-\overline{a})=\overline{0}.$$

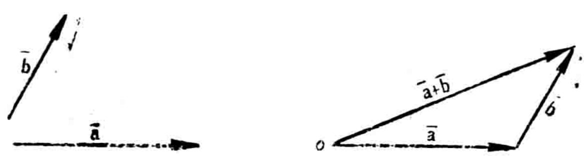

图 7

在以上定义中，三个向量$\overline{a}$、$\overline{b}$和$\overline{a}+\overline{b}$组成一个三角

形，因此，向量和的这种法则又叫做"向量和的三角形法则"，它与"向量和的平行四边形法则"是完全一致的．这一法则，也不难推广到任意有限多个向量的和上去，$\overline{S}=\overline{a}+\overline{b}+\overline{c}+\cdots+\overline{f}$ （图 8）．

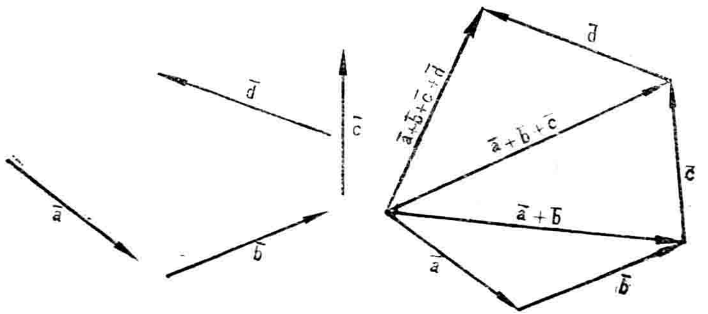

图 8

由向量的几何作图，向量的加法具有下列性质：

（1）加法交换律 $\overline{a}+\overline{b}=\overline{b}+\overline{a}$（图 9）．

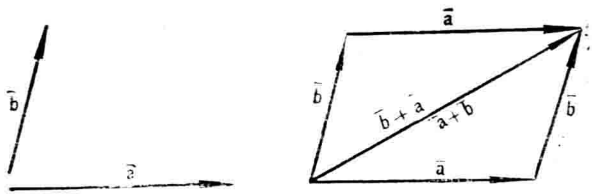

图 9

（2）加法结合律 $\overline{a}+(\overline{b}+\overline{c})=(\overline{a}+\overline{b})+\overline{c}$．

当三个向量$\overline{a}$、$\overline{b}$、$\overline{c}$共面时（图10），显然成立；

当三个向量$\overline{a}$、$\overline{b}$、$\overline{c}$不共面时(图11)，只要将这三个向量的起点放在同一点O，并以它们为棱组成一个平行六面体，这时该平行六面体的对角线$\overline{OM}$，就是$\overline{a}$、$\overline{b}$与$\overline{c}$的和。显然$\overline{OM}$也不因$\overline{a}$、$\overline{b}$、$\overline{c}$相加的顺序不同而改变，这就是说，三个向量$\overline{a}$、$\overline{b}$、$\overline{c}$不论它们共面与否，都具有这一性质。

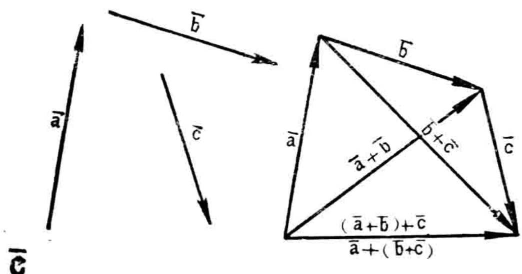

图 10

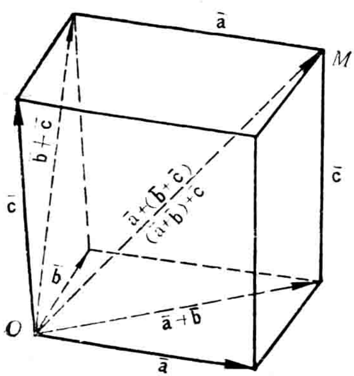

图 11