Fundamentals of Complex Analysis

复分析基础

廖良文 编

科学出版社

复分析基础

廖良文　编

科学出版社
北　京

内 容 简 介

本书是大学数学系本科生的复变函数教材，是作者在南京大学数学系复变函数课程讲义的基础上修订而成. 全书共分八章，主要内容包括复数，复变函数，复变函数的积分，级数，留数，共形映射，调和函数和解析开拓.

本书可作为高等学校数学专业的教材，也可作为相关专业科研人员的阅读参考书.

图书在版编目(CIP)数据

复分析基础/廖良文编. —北京：科学出版社，2014.5

ISBN 978-7-03-040407-7

Ⅰ. ①复… Ⅱ. ①廖… Ⅲ. ①复分析-高等学校-教材 Ⅳ. ①O174.5

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2014) 第 072952 号

责任编辑：于盼盼 曾佳佳／责任校对：韩 杨

责任印制：肖 兴／封面设计：许 瑞

科学出版社 出版

北京东黄城根北街 16 号

邮政编码：100717

http://www.sciencep.com

双青印刷厂 印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2014 年 5 月第 一 版 开本：787×1092 1/16

2014 年 5 月第一次印刷 印张：9 3/4

字数：230 000

定价：29.00 元

(如有印装质量问题，我社负责调换)

前　　言

复变函数论是数学系本科学生必修的基础课, 同时也是数学中一个古老而重要的分支. 它在自然科学和工程技术中有着广泛的应用, 特别地, 它是很多数学分支的基础. 现代数学中很多重要概念都能在复变函数论中找到它们的雏形, 例如同伦理论、流形等. 本书是为数学系本科生编写的复变函数课程的教材. 全书共分八章, 主要内容包括复数, 复变函数, 复变函数的积分, 级数, 留数, 共形映射, 调和函数和解析开拓.

在编写本教材的过程中, 作者参阅了大量国内外现有的教材, 汲取其精华和合理部分, 又根据自己的理解和经验, 对本教材进行精心编排, 并配备了相当数量的习题.

本教材得到了南京大学数学系领导, 特别是分管教学的系副主任朱晓胜教授的支持和关心. 同时, 本书的出版得到了国家自然科学基金"南京大学数学基地"项目 (J1103101, J1210049) 的部分资助. 在此表示衷心的感谢.

由于作者水平有限, 错误和缺点在所难免, 期盼读者批评指正.

作　者

2014 年 4 月

目　录

第1章 复 数

我们用 $\mathbb{R}$ 表示实数域,$\mathbb{Q}$ 表示有理数域,$\mathbb{Z}$ 表示整数环. 当我们将有理数域扩充到实数域时, 一些在有理数域上没有解的方程, 有了实数解. 例如, $x^2 = 2$. 然而, 我们知道有一些方程, 如 $x^2 = -1$, 在实数范围内没有解. 我们将定义一种新的数集, 使得上面的方程在这个新的数集里有解.

1.1 复数及其代数运算

我们定义 $z = x + iy$ 为复数, 其中 x, y 为实数, i 为虚数单位, 满足 $i^2 = -1$(也可记为 $i = \sqrt{-1}$). x, y 分别被称为复数 z 的实部和虚部. 记为

$$x = \mathrm{Re}\ z \text{ (real part)}, \quad y = \mathrm{Im}\ z \text{ (imaginary part)}.$$

当 $x = 0$ 时, $z = iy$ 称为纯虚数.

当 $y = 0$ 时, $z = x$ 为实数, 由此可见, 实数集是复数集的一个子集. 如果两个复数的实部和虚部分别相等, 那么称这两个复数相等, 记为 $z_1 = z_2$. 如果设

$$z_1 = x_1 + iy_1, \quad z_2 = x_2 + iy_2, \quad x_1, x_2, y_1, y_2 \in \mathbb{R},$$

则 $z_1 = z_2$, 当且仅当 $x_1 = x_2, y_1 = y_2$. $z = x + iy = 0$, 当且仅当 $x = y = 0$.

设 $z_1 = x_1 + iy_1, z_2 = x_2 + iy_2 (x_1, x_2, y_1, y_2 \in \mathbb{R})$, 复数的加法和乘法运算由下面的等式所定义:

$$z_1 + z_2 = (x_1 + iy_1) + (x_2 + iy_2) = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2),$$
$$z_1 \cdot z_2 = (x_1 + iy_1)(x_2 + iy_2) = (x_1x_2 - y_1y_2) + i(x_1y_2 + y_1x_2),$$

其中 $x_1, x_2, y_1, y_2 \in \mathbb{R}$. 减法和除法定义为加法和乘法的逆运算, 从而有

$$\begin{aligned} z_1 - z_2 &= (x_1 + iy_1) - (x_2 + iy_2) = (x_1 - x_2) - i(y_1 - y_2), \\ \frac{z_1}{z_2} &= \frac{x_1 + iy_1}{x_2 + iy_2} = \frac{(x_1 + iy_1)(x_2 - iy_2)}{(x_2 + iy_2)(x_2 - iy_2)} \\ &= \frac{x_1x_2 + y_1y_2}{x_2^2 + y_2^2} + i\frac{x_2y_1 - x_1y_2}{x_2^2 + y_2^2}, \qquad z_2 \neq 0. \end{aligned}$$

可以证明, 复数对上面所定义的加减乘除是封闭的, 并且复数的加减乘除与实数的相应运算满足同样的一些法则. 这样, 我们就在复数集上引进了一个代数结构, 使其成为一个域, 我们称其为复数域, 记为 $\mathbb{C}$, 它是由实数域 $\mathbb{R}$ 扩张而成.

$x - iy$ 称为复数 $z = x + iy$ 的共轭复数, 记作 $\bar{z} = x - iy$.

共轭复数具有如下性质:

$$\overline{z_1+z_2}=\bar{z}_1+\bar{z}_2,\quad \overline{z_1\cdot z_2}=\bar{z}_1\cdot\bar{z}_2,\quad \overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)}=\frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2},$$
$$\bar{\bar{z}}=z,\quad z\bar{z}=x^2+y^2=[\mathrm{Re}z]^2+[\mathrm{Im}z]^2,$$
$$z+\bar{z}=2\mathrm{Re}z,\qquad z-\bar{z}=2\mathrm{Im}z.$$

复数 z 的绝对值定义为 $|z|=\sqrt{x^2+y^2}$. 复数的绝对值有下面的性质:

$$|z|^2=z\bar{z},$$
$$\max\{|x|,|y|\}\leqslant|z|\leqslant|x|+|y|,$$
$$|\bar{z}|=|z|,$$
$$|z_1\cdot z_2|=|z_1|\cdot|z_2|,$$
$$|z_1+z_2|\leqslant|z_1|+|z_2|,$$
$$|z|=0,\ \text{当且仅当}\ z=0.$$

$|z|=R$ 表示平面上的圆周 $x^2+y^2=R^2$.

1.2 复数的几何表示

1.2.1 复平面

任一复数 $z=x+iy$ 都与一有序数对 (x,y) 成一一对应. 而一有序数对 (x,y) 又与坐标平面上的点一一对应. 所以, 对于给定直角坐标系的平面, 复数 $z=x+iy$ 可以用平面上坐标为 (x,y) 的点来表示, 这样的平面称为复平面, x 轴称为实轴, y 轴称为虚轴 (图 1.1).

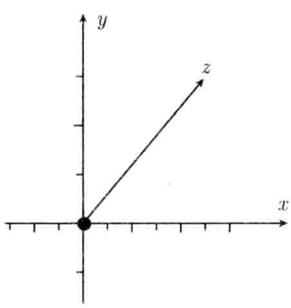

图 1.1

复数 z 还能用平面上从坐标原点指向点 $z(x,y)$ 的向量 $\vec{oz}$ 来表示.

容易验证, 向量 $\vec{oz}$ 的长度等于 z 的绝对值 (也称 z 的模).

当 $z\neq 0$ 时, x 轴正向与向量 $\vec{oz}$ 之间的夹角称为 z 的辐角, 记为 $\mathrm{Arg}z$. 显然, z 的辐角有无穷多个不同的值, 若 θ 为 z 的一个辐角值, 则有

$$\mathrm{Arg}z=\theta+2k\pi,\qquad k\in\mathbb{Z}.$$

$\mathrm{Arg}z$ 中有一个值 θ 满足 $-\pi<\theta\leqslant\pi$, 我们称它为 $\mathrm{Arg}z$ 的主值, 记作 $\arg z$. 我们有时也把 $\mathrm{Arg}z$ 中一确定的辐角值, 记为 $\arg z$.

辐角有下面的性质:

$\tan(\mathrm{Arg}z) = \dfrac{y}{x}$.

$\arg \overline{z} = -\arg z$ (z 不在负实轴和原点上).

记 $\theta = \mathrm{Arg}z, r = |z|$, 则 $x = r\cos\theta, y = r\sin\theta$, 所以 z 可以表示为

$$z = r(\cos\theta + i\sin\theta).$$

上面的式子称为复数 z 的三角表达式. 根据复数的加法运算容易验证, $z_1 + z_2$ 所对应的向量就是以 $\overrightarrow{oz_1}, \overrightarrow{oz_2}$ 为邻边的平行四边形的对角线向量 (起点为坐标原点 O), 即复数的加法运算与平面上向量的加法运算是一致的. $-z_2$ 所对应的向量 $-\overrightarrow{oz_2}$ 是与 $\overrightarrow{oz_2}$ 长度相等、方向相反的向量. $z_1 - z_2 = z_1 + (-z_2)$. 复数的减法运算与向量的减法运算是一致的 (图 1.2).

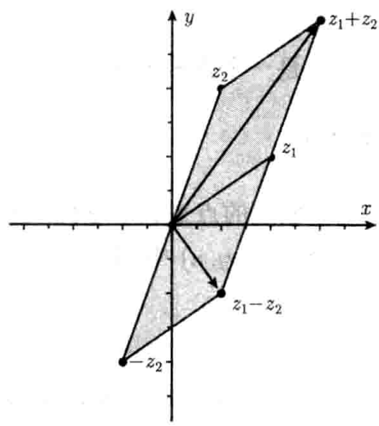

图 1.2

例 1.2.1　写出 $z = 1 + i$ 的三角表达式.

解　$z = \sqrt{2}\left(\cos\dfrac{\pi}{4} + i\sin\dfrac{\pi}{4}\right)$. □

例 1.2.2　设 $z = x + iy, x, y \in \mathbb{R}$, 求 $f(z) = \dfrac{1+z}{1-z}$ 的实部、虚部、模和辐角.

解

$$f(z) = \frac{1+x+iy}{1-x-iy} = \frac{1-x^2-y^2+2yi}{(1-x)^2+y^2},$$

所以

$$\mathrm{Re}f(z) = \frac{1-x^2-y^2}{(1-x)^2+y^2}, \qquad \mathrm{Im}f(z) = \frac{2y}{(1-x)^2+y^2},$$

$$|f(z)| = \sqrt{\frac{(1+x)^2+y^2}{(1-x)^2+y^2}},$$

$$\mathrm{Arg}f(z) = \mathrm{Arctan}\frac{2y}{1-x^2-y^2}.$$ □

例 1.2.3　设 z_1, z_2, z_3 三点满足条件 $z_1 + z_2 + z_3 = 0$ 及 $|z_1| = |z_2| = |z_3| = 1$. 证明 z_1, z_2, z_3 是一个内接于单位圆 $|z| = 1$ 的正三角形的顶点.

证明　因为 $z_1 + z_2 + z_3 = 0$, 所以 $z_1 = -(z_2 + z_3)$, 从而 $|z_2 + z_3| = 1$, $(z_2 + z_3)(\overline{z_2 + z_3}) = 1$. 因此

$$z_2\overline{z}_3 + z_3\overline{z}_2 = -1,$$

类似地, 可得

$$z_1\overline{z}_3 + \overline{z}_1 z_3 = z_1\overline{z}_2 + \overline{z}_1 z_2 = -1,$$

我们有

$$|z_2 - z_3|^2 = (z_2 - z_3)(\overline{z_2 - z_3}) = |z_2|^2 + |z_3|^2 - (z_2\overline{z}_3 + z_3\overline{z}_2) = 3.$$

同样可得

$$|z_1 - z_2|^2 = |z_1 - z_3|^2 = 3.$$

因此

$$|z_1 - z_2| = |z_2 - z_3| = |z_1 - z_3|.$$

亦即 z_1, z_2, z_3 是一个内接于单位圆的正三角形的三个顶点. □

1.2.2 复球面

除了用平面上的点来表示复数, 我们还可以用球面上的点来表示复数.

在三维空间 (x, y, u) 中, 把 xOy 平面看做复平面 $\mathbb{C}$, 考察单位球面 S^2

$$x^2 + y^2 + u^2 = 1.$$

我们称球面上的点 $N(0,0,1)$ 为北极. 对于复平面上的任意一点 $z = x + iy$ 作直线连接北极 N 与点 z. 此直线与去掉 N 的球面 $S^2\backslash\{N\}$ 交于一点 $P(x_1, x_2, x_3)$, 这样, 复平面 $\mathbb{C}$ 与 $S^2\backslash\{N\}$ 之间建立了一个一对一的到上的映射 (图 1.3). 我们称点 $P(x_1, x_2, x_3)$ 为点 z 的球极投影. 当 z 的模 $|z|$ 趋于无穷大时, 它的球极投影 P 趋近于北极 N, 因此我们在复平面 $\mathbb{C}$ 上引入一个理想点: 无穷远点, 记为 ∞, 它的球极投影为 N. 引入无穷远点的复平面称为扩充复平面, 记为 $\widehat{\mathbb{C}}$, 亦即 $\widehat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$. 相应于无穷远点的复数称为无穷大, 也记为 ∞. 这样我们在扩充复平面 $\widehat{\mathbb{C}}$ 与单位球面 S^2 之间建立了一对一的到上的映射. 这样的球面 S^2 称为复球面. 通过复球面 S^2, 我们在 $\widehat{\mathbb{C}}$ 上引进了一种拓扑结构.

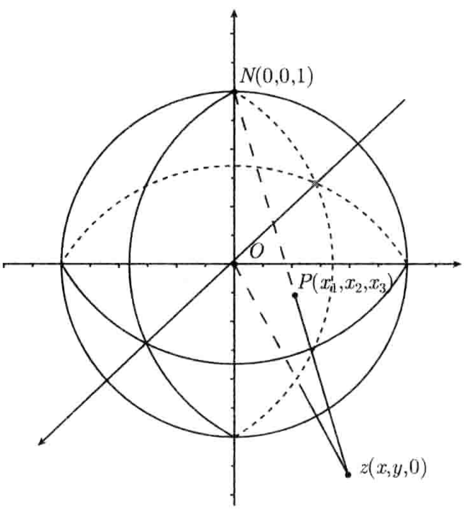

图 1.3

因为 N, P, z 共线, 所以存在 λ 使得 $\overrightarrow{Nz} = \lambda\overrightarrow{NP}$, 即

$$(x, y, -1) = \lambda(x_1, x_2, x_3 - 1),$$

所以

$$x = \frac{x_1}{1 - x_3}, \quad y = \frac{x_2}{1 - x_3}.$$

从而

$$z = \frac{x_1 + ix_2}{1 - x_3}.$$

$$|z|^2 = \frac{x_1^2 + x_2^2}{(1 - x_3)^2} = \frac{1 - x_3^2}{(1 - x_3)^2} = \frac{1 + x_3}{1 - x_3}.$$

$$x_3 = \frac{|z|^2 - 1}{|z|^2 + 1}, \quad x_1 = \frac{z + \overline{z}}{1 + |z|^2}, \quad x_2 = \frac{1}{i} \frac{z - \overline{z}}{1 + |z|^2}.$$

设扩充复平面 $\widehat{\mathbb{C}}$ 上两点 z, z' 所对应的球极投影分别为 $P(x_1, x_2, x_3)$ 与 $P'(x_1', x_2', x_3')$. 我们定义 z, z' 之间的距离 (球面距离)$\rho(z, z')$ 为 P, P' 之间的弦长, 即

$$\rho(z, z') = \sqrt{(x_1 - x_1')^2 + (x_2 - x_2')^2 + (x_3 - x_3')^2}.$$

因为

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1, \qquad x_1'^2 + x_2'^2 + x_3'^2 = 1,$$

所以

$$\begin{aligned}
\rho(z, z')^2 &= 2 - 2(x_1 x_1' + x_2 x_2' + x_3 x_3') \\
&= 2 - 2\frac{(z + \overline{z})(z' + \overline{z}') - (z - \overline{z})(z' - \overline{z}') + (|z|^2 - 1)(|z'|^2 - 1)}{(1 + |z|^2)(1 + |z'|^2)} \\
&= 2 - 2\frac{(1 + |z|^2)(1 + |z'|^2) - 2|z - z'|^2}{(1 + |z|^2)(1 + |z'|^2)} = \frac{4|z - z'|^2}{(1 + |z|^2)(1 + |z'|^2)},
\end{aligned}$$

因此

$$\begin{aligned}
\rho(z, z') &= \frac{2|z - z'|}{\sqrt{(1 + |z|^2)(1 + |z'|^2)}}, \\
\rho(z, \infty) &= \frac{2}{\sqrt{1 + |z|^2}}.
\end{aligned}$$

关于新 "数"∞, 还需作几点规定:

(1) $\infty \pm \infty, 0 \cdot \infty, \dfrac{\infty}{\infty}, \dfrac{0}{0}$ 均无意义;

(2) 当 $a \neq \infty$ 时, $\dfrac{\infty}{a} = \infty, \dfrac{a}{\infty} = 0, \infty \pm a = a \pm \infty = \infty$;

(3) 当 $b \neq 0$ 时, $\infty \cdot b = b \cdot \infty = \infty, \dfrac{b}{0} = \infty$;

(4) ∞ 的实部、虚部及辐角均无意义, $|\infty| = +\infty$;

(5) 扩充复平面 $\widehat{\mathbb{C}}$ 上每条直线均通过无穷远点.

1.2.3 复数的乘幂与方根

定理 1.2.1 设

$$z_1 = r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1), \qquad z_2 = r_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2),$$

则

$$\begin{aligned}
z_1 z_2 &= r_1 r_2[\cos(\theta_1 + \theta_2) + i\sin(\theta_1 + \theta_2)], \\
\frac{z_1}{z_2} &= \frac{r_1}{r_2}[\cos(\theta_1 - \theta_2) + i\sin(\theta_1 - \theta_2)], \qquad z_2 \neq 0.
\end{aligned}$$

定理 1.2.2 设

$$z = r(\cos\theta + i\sin\theta),$$

则

$$z^n = r^n(\cos n\theta + i\sin n\theta), \qquad n \in \mathbb{Z}.$$

由定理 1.2.1 并运用归纳法容易得到上面的公式对自然数 n 成立, 当 $n = 0$ 时上面的公式也成立, 当 n 为负整数时, 令 $m = -n$, 则

$$\begin{aligned} z^n = \frac{1}{z^m} &= \frac{1}{r^m}[\cos(-m\theta) + i\sin(-m\theta)] \\ &= r^{-m}[\cos(-m\theta) + i\sin(-m\theta)] \\ &= r^n(\cos n\theta + i\sin n\theta). \end{aligned}$$

在定理 1.2.2 中, 取 $|z| = 1$, 我们就得到著名的棣莫弗 (De Moivre) 公式:

$$(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos n\theta + i\sin n\theta.$$

设 $z = r(\cos\theta + i\sin\theta) \neq 0$, $w = \rho(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ 为满足方程 $w^n = z$ 的复数, 则有

$$\rho^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi) = r(\cos\theta + i\sin\theta),$$

从而

$$\begin{aligned} &\rho = r^{\frac{1}{n}}, \\ &\varphi = \frac{\theta + 2k\pi}{n}, \qquad k \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

注意到只有当 $k = 0, 1, \cdots, n-1$ 时, 给出不同的值. 因此, 我们有下面的定理.

定理 1.2.3 一个不为 0 的复数 $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ 有 n 个相异的 n 次方根, 它们分别为

$$w_k = r^{\frac{1}{n}}\left(\cos\frac{\theta + 2k\pi}{n} + i\sin\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right), \quad k = 0, 1, \cdots, n-1.$$

例 1.2.4 求 $\sqrt[6]{1}$ 的所有值.

解

$$\sqrt[6]{1} = \cos\frac{2k\pi}{6} + i\sin\frac{2k\pi}{6}, \quad k = 0, 1, 2, 3, 4, 5$$

即 $\sqrt[6]{1}$ 的所有值为

$$\begin{aligned} &1, \quad \cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i, \quad \cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i, \\ &-1, \quad \cos\frac{4\pi}{3} + i\sin\frac{4\pi}{3} = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i, \quad \cos\frac{5\pi}{3} + i\sin\frac{5\pi}{3} = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i. \end{aligned}$$

□

例 1.2.5 如果复数 z_1, z_2, z_3 满足等式

$$\frac{z_2 - z_1}{z_3 - z_1} = \frac{z_1 - z_3}{z_2 - z_3},$$

证明

$$|z_2 - z_1| = |z_3 - z_1| = |z_2 - z_3|.$$

证明　只需要证明

$$\left|\frac{z_2-z_1}{z_3-z_1}\right|=\left|\frac{z_2-z_1}{z_2-z_3}\right|=1.$$

由已知条件有

$$(z_2-z_1)(z_2-z_3)=-(z_3-z_1)^2=-[(z_3-z_2)+(z_2-z_1)]^2,$$

所以

$$(z_3-z_2)^2+(z_3-z_2)(z_2-z_1)+(z_2-z_1)^2=0,$$

从而

$$\left(\frac{z_3-z_2}{z_2-z_1}\right)^2+\frac{z_3-z_2}{z_2-z_1}+1=0,$$

因此

$$\left|\frac{z_3-z_2}{z_2-z_1}\right|=\left|\frac{-1\pm\sqrt{3}i}{2}\right|=1,$$

即

$$|z_3-z_2|=|z_2-z_1|,$$

故

$$|-(z_3-z_1)|^2=|(z_2-z_1)^2|,$$

因此

$$|z_3-z_1|=|z_2-z_1|=|z_3-z_2|.$$

□

1.3　复平面的拓扑

$\mathbb{C}$ 在通常的欧氏距离下为一度量空间, 即 $d(z,w)=|z-w|$. 现在我们回顾一下关于复平面的拓扑知识.

邻域: 设 z_0 是复平面 $\mathbb{C}$ 的任意一点, 集合

$$\Delta(z_0,\delta)=\{z||z-z_0|<\delta\}$$

称为 z_0 的 δ-邻域. 它是以 z_0 为中心、δ 为半径的圆盘.

集合 $\{z||z-z_0|\leqslant\delta\}$ 称为以 z_0 为中心、δ 为半径的闭圆盘. 记为 $\overline{\Delta(z_0,\delta)}$.

设集合 $E\subset\mathbb{C}$. 如果 z_0 的任一邻域内有无穷多个点属于集合 E. 那么就称 z_0 为集合 E 的极限点, 也称聚点. 如果存在 z_0 的一个邻域 $\Delta(z_0,\delta_0)$ 使得 $\overline{\Delta(z_0,\delta_0)}\subset E$, 则称 z_0 为集合 E 的内点. 如果 z_0 的任何邻域都同时包含 E 中的点及不属于 E 的点, 则称 z_0 为 E 的边界点. E 的全体边界点构成的集合称为 E 的边界, 记为 ∂E. 如果 $z_0\in E$ 但不是 z_0 的极限点, 则称 z_0 为 E 中的孤立点. 如果 $z_0\notin E$ 并且不是 z_0 的极限点, 则称 z_0 为 E 的外点.

如果集合 $E\subset\mathbb{C}$ 中的每个点都是 E 的内点, 则称 E 为开集, 如果 E 的每个聚点都属于 E, 则称 E 为闭集. 如果存在 $R>0$ 使得 $E\subset\Delta(0,R)$, 则称 E 为有界集, 否则称 E 为无界集.

区域: 复平面 $\mathbb{C}$ 中的点集 D 称为区域, 如果它满足下面的条件:

(1) D 是开集;

(2) D 中的任何两点都可以用完全属于 D 中的折线连接起来.

性质 (2) 称为连通性. 简单地说, 连通的开集称为区域.

区域 D 与它的边界一起构成闭区域, 记为 $\overline{D} = D \cup \partial D$. 如果区域 D 是有界集, 则称为有界区域, 否则称为无界区域.

我们知道方程组 $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases} (a \leqslant t \leqslant b)$, 其中 $x(t), y(t)$ 都是连续的, 代表平面上一条连续曲线. 如果令 $z(t) = x(t) + iy(t)$, 那么这条曲线就可以用方程 $z = z(t)$ 来表示. 这是平面曲线的复数表达式. 例如

$$z = R(\cos t + i \sin t), \qquad 0 \leqslant t \leqslant 2\pi$$

表示平面上以原点为圆心, 半径为 R 的圆周.

如果在 $a \leqslant t \leqslant b$ 上, $x'(t), y'(t)$ 连续, 并且 $z'(t) = x'(t) + iy'(t) \neq 0$, 那么, 我们称这条曲线是光滑的.

由几段依次相接的光滑曲线所组成的曲线称为逐段光滑曲线. 一条连续曲线 $C : z = z(t)(a \leqslant t \leqslant b)$ 称为简单闭曲线, 如果它满足下列两个条件:

(1) $z(a) = z(b)$ 且当 $t \in (a, b)$ 时, $z(t) \neq z(a)$;

(2) 当 $t_1, t_2 \in (a, b), t_1 \neq t_2$ 时, $z(t_1) \neq z(t_2), t_1 \neq t_2$.

下面是若尔当 (Jordan) 定理, 它看起来很直观, 但严格的证明很复杂.

定理 1.3.1 *一条简单闭曲线 Γ 将复平面 $\mathbb{C}$ 分为 Γ, $\mathrm{int}(\Gamma)$, $\mathrm{ext}(\Gamma)$ 三个点集, 它们具有如下性质:*

(1) $\Gamma, \mathrm{int}(\Gamma), \mathrm{ext}(\Gamma)$ 互不相交;

(2) $\mathrm{int}(\Gamma)$ 为一有界集, 称为 Γ 的内部;

(3) $\mathrm{ext}(\Gamma)$ 为一无界集, 称为 Γ 的外部;

(4) $\mathrm{int}(\Gamma), \mathrm{ext}(\Gamma)$ 均以 Γ 为边界;

(5) 若简单折线 P 的一个端点位于$\mathrm{int}(\Gamma)$, 另一个端点位于$\mathrm{ext}(\Gamma)$, 则 $P \cap \Gamma$ 非空.

设 D 为一区域, 如果 D 中的任一条简单闭曲线 Γ 的内部都包含在 D 内, 那么 D 称为单连通区域. 否则就称 D 为多连通区域.

扩充复平面 $\widehat{\mathbb{C}}$ 上无穷远点的邻域定义为 $\{z||z| > R\} \cup \{\infty\}$, 即复平面圆周 $|z| = R$ 的外部与无穷远点的并集. 扩充复平面 $\widehat{\mathbb{C}}$ 上的点集 D 是一个连通的开集, 则称 D 为 $\widehat{\mathbb{C}}$ 上的区域; 所以如果 D 是 $\widehat{\mathbb{C}}$ 上不含无穷远点的区域, 则 D 也是 $\mathbb{C}$ 上的区域; 如果 D 是 $\widehat{\mathbb{C}}$ 上含无穷远点的区域, 则 D 是 $\mathbb{C}$ 上的区域与无穷远点的并集.

$\widehat{\mathbb{C}}$ 上的单连通区域的定义: 如果 D 是 $\widehat{\mathbb{C}}$ 上不含无穷远点的区域, 则 D 是 $\widehat{\mathbb{C}}$ 上的单连通区域当且仅当它为 $\mathbb{C}$ 上的单连通区域; 如果 D 是 $\widehat{\mathbb{C}}$ 上含无穷远点的区域, 并且 D 内的任一条简单闭曲线的内部或者外部 (包含无穷远点) 中的每一点都属于 D, 则称 D 为单连通区域, 否则称 D 为多连通区域.

例 1.3.1 求满足下列关系式的点的轨迹:

(1) $\mathrm{Re}(z^2)=a$;　(2) $\left|\dfrac{z-1}{z+1}\right|\leqslant 1$;　(3)$|z-2i|=|z+2|$.

解　(1) $z^2=x^2-y^2+2xyi$, 所以满足关系式 $\mathrm{Re}(z^2)=a$ 的点的轨迹是双曲线

$$x^2-y^2=a.$$

当 $a=0$ 时, 退化为两条相交直线.

(2) $\left|\dfrac{z-1}{z+1}\right|\leqslant 1$ 即为 $(x-1)^2+y^2\leqslant(x+1)^2+y^2$, 化简得 $x\geqslant 0$, 这是包含虚轴在内的右半平面.

(3) 直线 $y=-x$.　□

例 1.3.2　在 $\widehat{\mathbb{C}}$ 上, $E_1=\{z|1<|z|\leqslant+\infty\}, E_2=\{z|1<|z|<+\infty\}$ 分别为单连通及多连通的无界区域. $\partial E_1=\{z||z|=1\}, \partial E_2=\{z||z|=1\}\cup\{\infty\}$, ∞ 是 ∂E_2 的孤立点.

习　题　一

1. 计算:

(1) $(1+2i)\pm(1-i)$;　(2) $\dfrac{i}{(i-1)(i-2)(i-3)}$.

2. 证明:

(1) $\overline{z+w}=\overline{z}+\overline{w}$;　(2) $\overline{zw}=\overline{z}\overline{w}$;

(3) $|\overline{z}|=|z|$;　(4) $|z|^2=z\overline{z}$.

3. 设 z_1 及 z_1 是两复数，证明:

(1) $|z_1-z_2|^2=|z_1|^2+|z_2|^2-2\mathrm{Re}(z_1\overline{z_2})$;

(2)$|z_1-z_2|\geqslant||z_1|-|z_2||$;

(3) $|z_1+z_2|^2+|z_1-z_2|^2=2(|z_1|^2+|z_2|^2)$, 并说明其几何意义.

4. 证明:

$$(1+\cos\theta+i\sin\theta)^n=2^n\cos^n\frac{\theta}{2}\left(\cos\frac{n\theta}{2}+i\sin\frac{n\theta}{2}\right).$$

5. 解方程 $z^2-3iz-(3-i)=0$.

6. 求 $1+i\sqrt{3}$ 的三次方根.

7. 设 $a\in\mathbb{C}$ 是一固定复数, 并且 $|z|=1$，$1-\overline{a}z\neq 0$. 证明: $\dfrac{|z-a|}{|1-\overline{a}z|}=1$.

8. 设 n 是正整数. 证明:

(1) $1+z+z^2+\cdots+z^n=\dfrac{1-z^{n+1}}{1-z},\quad z\neq 1$;

(2) $1+\cos\theta+\cos 2\theta+\cdots+\cos n\theta=\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sin(n+1/2)\theta}{2\sin\theta/2}$.

9. 设 $|a|<1, |z|<1$. 证明:

(1) $\left|\dfrac{z-a}{1-\overline{a}z}\right|<1$;

(2) $1-\left|\dfrac{z-a}{1-\overline{a}z}\right|^2=\dfrac{(1-|a|^2)(1-|z|^2)}{|1-\overline{a}z|^2}$;

(3) $\dfrac{||z|-|a||}{1-|az|} \leqslant \left|\dfrac{z-a}{1-\overline{a}z}\right| \leqslant \dfrac{|z|+|a|}{1+|az|}$;

(4) $\left|\dfrac{z-a}{1-\overline{a}z}\right| \leqslant |z|+|a|$.

10. 满足下列条件的点 z 所组成的点集是什么? 画出其图形, 如果是区域, 说明是单连通区域还是多连通区域.

(1) $|z-1-i|=1$;　　(2) $0<\mathrm{Im}z\leq 2$;

(3) $1<|2z-6|<2$;　　(4) $|z-2|+|z+2|=5$;

(5) $|z-1|<|z|$;　　(6) $0<\arg(z-i)<\dfrac{\pi}{4}$;

(7) $|\mathrm{Re}z|<|z|$;　　(8) $\mathrm{Re}(iz+2)>0$;

(9) $0<\arg\dfrac{z-i}{z+i}<\dfrac{\pi}{4}$;　　(10) $0<\arg(z-1)<\dfrac{\pi}{4}, 2<\mathrm{Re}z<3$.

11. 设球面上的点 $P(X,Y,Z)$ 在球极投影下所对应的复数是 z, 证明: P 的球面径像点 $-P$ 在球极投影下所对应的复数是 $\dfrac{1}{\overline{z}}$.

12. 设 $z=x+iy$ 的球极投影是 (X,Y,Z). 证明北极 N 到 (X,Y,Z) 的距离与北极 N 到 $(x,y,0)$ 的距离的乘积等于 2.

13. 证明在球极投影映射下, 单位球面上的圆周对应于平面上的圆周或直线.

14. 利用棣莫弗 (De Moivre) 公式证明:

$$\cos 2\theta=\cos^2\theta-\sin^2\theta,\quad \sin 2\theta=2\sin\theta\cos\theta.$$

写出用 $\sin\theta,\cos\theta$ 表示 $\sin 4\theta$ 与 $\cos 4\theta$ 的公式.

第2章　复变函数

2.1　解析函数

2.1.1　函数与映射

设有一复数集合 G, 如果有一个确定的法则 f, 按照这个法则, 对于集合 G 中的每一个复数 z, 就有一个或几个相应的复数 $w=u+iv$ 随之而定, 那么就称复数 w 是复变数 z 的函数 (简称复变函数), 记作 $w=f(z)$.

如果一个 z 值对应着一个 w 值, 那么我们就称函数 $f(z)$ 是单值的; 如果 z 的一个值对应着两个或者两个以上的 w 值, 那么就称函数 $f(z)$ 是多值的.

G 称为 $f(z)$ 的定义集合. 对应 G 中所有 z 的一切 w 值所成的集合 A 称为函数值集合, 即 $A=f(G)$.

我们将定义集合 G 放在一个复平面上, 称之为 z-平面. 将函数值集合 A 放在另一个平面, 称之为 w-平面. 函数 f 也称为从 G 到 A 的一个映射或映照.

如果 $w_0=f(z_0)$, 那么, w_0 称为 z_0 在映射 f 下的像, 而 z_0 称为 w_0 的原像. 如果单值函数 $w=f(z)$ 把 G 中不同的点映射为 $A=f(G)$ 中不同的点, 那么, 我们就说它确定了一个从 G 到 A 的双方单值映射 (双射). 这样的函数称为单叶函数.

有时, 为了讨论方便, 我们也将 G 与 A 放在同一平面.

例 2.1.1　讨论映射 $w=\bar{z}$.

解　显然, 映射 $w=\bar{z}$ 把 z 平面上的点 $z=a+bi$ 映射成 w 平面上的点 $\bar{w}=a-bi$.

如果把 z 平面和 w 平面重叠在一起, 不难看出, 函数 $w=\bar{z}$ 是关于实轴的一个对称映射. 它把 z 平面的任一图形映射成关于实轴对称的全等图形 (图 2.1, 图 2.2, 图 2.3). □

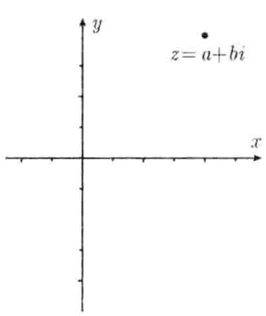

图 2.1

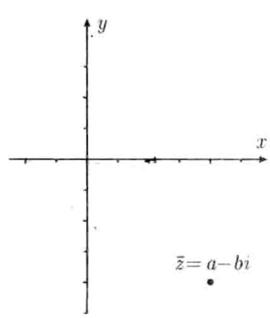

图 2.2

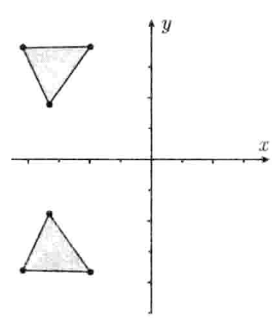

图 2.3

例 2.1.2　研究映射 $w=z^2$.

解　设 $z=r(\cos\theta+i\sin\theta)$, 则 $w=r^2(\cos 2\theta+i\sin 2\theta)$, w 的辐角比 z 的辐角增大了一倍.