



高等学校经济与管理专业系列教材

Operations Research

王甜源 李荣钧 编著

运筹学基础 习题集



高等教育出版社
HIGHER EDUCATION PRESS



高等学校经济与管理专业系列教材

Operations Research

王甜源 李荣钧 编著

运筹学基础 习题集

YUNCHOUXUE JICHU XITIJI



高等教育出版社·北京
HIGHER EDUCATION PRESS BEIJING

内容提要

本书是与教材《运筹学基础》(李荣钧编著)相配套的习题集,内容与教材同步,包含绪言、线性规划、运输模型与分配问题、整数线性规划、图论与网络分析、网络计划技术、存储论、对策论、决策论、多属性决策分析和多目标决策分析共十一章的相关习题,并分别给出了答案、证明或题解,同时各章补充了案例分析。本书是学习和掌握运筹学理论和方法的重要辅助教材,也是教师备课以及本科学子自学运筹学的常备参考材料。

本书对于本科学生具有较好的针对性和实用性,同时也适用于运筹学的初学者,配合《运筹学基础》教材使用本书可以获得很好的学习效果。

图书在版编目(CIP)数据

运筹学基础习题集 / 王甜源, 李荣钧编著. —北京: 高等教育出版社, 2013. 8

ISBN 978-7-04-037759-0

I. ①运… II. ①王… ②李… III. ①运筹学—高等学校—习题集 IV. ①022-44

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2013) 第 204991 号

策划编辑 刘自挥 责任编辑 刘自挥 王驰宇 特约编辑 关小天
封面设计 吴昊 责任印制 蔡敏燕

出版发行	高等教育出版社	咨询电话	400-810-0598
社 址	北京市西城区德外大街 4 号	网 址	http://www.hep.edu.cn
邮政编码	100120		http://www.hep.com.cn
印 刷	上海华教印务有限公司		http://www.hepsh.com
开 本	787mm×1092mm 1/16	网上订购	http://www.landaco.com
印 张	10.5		http://www.landaco.com.cn
字 数	226 千字	版 次	2013 年 8 月第 1 版
购书热线	010-58581118	印 次	2013 年 8 月第 1 次印刷
	021-56717287	定 价	19.50 元

本书如有缺页、倒页、脱页等质量问题, 请到所购图书销售部门联系调换

版权所有 侵权必究

物 料 号 37759-00

郑重声明

高等教育出版社依法对本书享有专有出版权。任何未经许可的复制、销售行为均违反《中华人民共和国著作权法》，其行为人将承担相应的民事责任和行政责任；构成犯罪的，将被依法追究刑事责任。为了维护市场秩序，保护读者的合法权益，避免读者误用盗版书造成不良后果，我社将配合行政执法部门和司法机关对违法犯罪的单位和个人进行严厉打击。社会各界人士如发现上述侵权行为，希望及时举报，本社将奖励举报有功人员。

反盗版举报电话 (010) 58581897 58582371 58581879

反盗版举报传真 (010) 82086060

反盗版举报邮箱 dd@hep.com.cn

通信地址 北京市西城区德外大街4号 高等教育出版社法务部

邮政编码 100120

目 录

第 1 章	绪言	001
第 2 章	线性规划	003
第 3 章	运输模型与分配问题	019
第 4 章	整数线性规划	064
第 5 章	图论与网络分析	074
第 6 章	网络计划技术	086
第 7 章	存储论	098
第 8 章	对策论	106
第 9 章	决策论	120
第 10 章	多属性决策分析	133
第 11 章	多目标决策	143

【第1章】

绪 言

[练习题]

1.1 请简述运筹学的起源和特点。

答：运筹学在商业活动与行政事务中的早期应用可追溯到几个世纪以前，但是系统的运筹学理论起源于二次大战期间。运筹学理论和方法建立在人类认识和人类活动的基础之上，反映了人类分析和处理事物的思辨过程。因此，运筹学既是一门科学，又是一门艺术。

1.2 运筹学的工作步骤包括哪些？

答：(1) 确定问题：目标、约束、变量和参数。
(2) 建立模型：目标、约束、变量和参数之间的关系。
(3) 求解模型：最优解、有效解和满意解。
(4) 解的检验：正确性、有效性和稳定性。
(5) 解的控制：灵敏度分析。
(6) 解的实施：解释、培训和监测。

1.3 运筹学有哪些原则？

答：(1) 合伙原则：运筹学工作者与管理工作者相结合。
(2) 催化原则：多学科协作，打破常规。
(3) 渗透原则：跨部门、跨行业联合。
(4) 独立原则：不受某人或某部门的特殊政策所左右。
(5) 宽容原则：广开思路，兼容并蓄。
(6) 平衡原则：平衡矛盾，平衡关系。

1.4 常见模型有哪些形式？

答：(1) 思维模型：它是研究者对于某种事物的想象或者概念性的描述，譬如公司主管头脑中对于公司未来市场的规划。这虽然不是一种精确、具体、可见的形式，但通常是其他模型的渊源。

(2) 物理模型：它可以是一个与实物同等尺寸、或者被放大、或者被缩小、或者被简化的几何模型，用以形象地表现和演示被研究的对象；它也可以是一些图表，用以说明事物的流程。

(3) 数学模型：它是采用数学符号来精确描述实际事物中的变动因素和因素间的相互关系。

1.5 一般建模的方法和思路是什么？

答：(1) 直接分析法：根据研究者对问题内在机理的认识直接构造模型，并利用已知的算法对问题求解与分析。如线性规划模型，动态规划模型，排队模型，存储模型，决策与对策模型等。

(2) 类比法：模仿类似问题的结构性质建立模型并进行类比分析。如物理系统、化学系统、信息系统和经济系统之间都有某些相通的地方，因而可互相借鉴。

(3) 统计分析法：尽管机理未明，但可根据历史资料或实验结果运用统计分析方法建模。

(4) 逻辑推理法：利用知识和经验对事物的变化过程进行逻辑推理来构造模型。

1.6 数学模型的一般形式是什么？包括哪两种类型的模型？

答：

目标的评价准则	$U = f(x_i, y_j, \xi_k)$
约束条件	$g(x_i, y_j, \xi_k) \geq 0$

式中： x_i 为可控变量； y_j 为已知参数； ξ_k 为不确定性因素。

当模型中没有不确定性因素时，称之为确定性模型。如果不确定性因素是随机因素，则为随机模型；如果是模糊因素，则为模糊模型；如果既有随机因素又有模糊因素，则为模糊随机模型。

线性规划

[练习题]

2.1 某农场有 100 km^2 土地及 15 000 元资金可用于发展生产。农场劳动力情况为秋冬季 3 500 人日,春夏季 4 000 人日,如劳动力本身用不了时可外出务工,春夏季收入为 2.1 百元/人日,秋冬季收入为 1.8 百元/人日。该农场种植三种作物:大豆、玉米和小麦,并饲养奶牛和鸡。种作物时不需要专门投资,而饲养动物时每头奶牛投资 400 百元,每只鸡投资 3 百元。养奶牛时每头需拨出 1.5 公顷土地种饲草,并占用人工秋冬季为 100 人日,春夏季为 50 人日,年净收入 400 百元/每头奶牛。养鸡时不占土地,每只鸡需人工为秋冬季 0.6 人日,春夏季 0.3 人日,年净收入为 2 百元/每只鸡。农场现有鸡舍允许最多养 3 000 只鸡,牛栏允许最多养 32 头奶牛。三种作物每年需要的人工及收入情况如表 2-1 所示。试建立使农场年净收入达到最大的经营方案的线性规划模型。

表 2-1 三种作物每年需要人工及收入情况表

项 目	大 豆	玉 米	麦 子
秋冬季需人日数	20	35	10
春夏季需人日数	50	75	40
年净收入(百元/公顷)	175	300	120

解: 用 x_1, x_2, x_3 分别代表大豆、玉米、麦子的种植数(km^2), x_4, x_5 分别代表奶牛和鸡的饲养数; x_6, x_7 分别代表秋冬季和春夏季多余的劳动力(人/日)。则该问题的线性规划模型为

$$\begin{aligned}
 \max Z &= 175x_1 + 300x_2 + 120x_3 + 400x_4 + 2x_5 + 1.8x_6 + 2.1x_7 \\
 \text{s. t. } &x_1 + x_2 + x_3 + 1.5x_4 \leq 100 \\
 &400x_4 + 3x_5 \leq 15\,000 \\
 &20x_1 + 35x_2 + 10x_3 + 100x_4 + 0.6x_5 + x_6 = 3\,500 \\
 &50x_1 + 175x_2 + 40x_3 + 50x_4 + 0.3x_5 + x_7 = 4\,000 \\
 &x_4 \leq 32
 \end{aligned}$$

$x_5 \leq 3\,000$

$x_6 \leq 3\,500$

$x_7 \leq 4\,000$

$x_j \geq 0, \forall j$

2.2 某饲养场饲养的动物每天至少需蛋白质 700 g,矿物质 30 g 和维生素 100 mg。现有五种饲料可供选择,各种饲料每公斤营养成分含量及单价如表 2-2 所示。

表 2-2 五种饲料每公斤营养成分含量及单价表

饲 料	蛋白质(g)	矿物质(g)	维生素(mg)	价格(元/kg)
1	3	1	0.5	0.2
2	2	0.3	1	0.7
3	1	0.2	0.2	0.4
4	6	2	2	0.3
5	18	0.5	0.8	0.8

现欲确定既满足动物生长所需的营养需要,又使费用最低的饲料选用方案。试建立该问题的线性规划模型。

解: 用 $x_j(j = 1, 2, \cdots, 5)$ 分别代表五种饲料的采购数,其数学模型为

$$\begin{aligned} \min Z &= 0.2x_1 + 0.7x_2 + 0.4x_3 + 0.3x_4 + 0.8x_5 \\ \text{s. t. } &3x_1 + 2x_2 + x_3 + 6x_4 + 18x_5 \geq 700 \\ &x_1 + 0.5x_2 + 0.2x_3 + 2x_4 + 0.5x_5 \geq 30 \\ &0.5x_1 + x_2 + 0.2x_3 + 2x_4 + 0.8x_5 \geq 100 \\ &x_j \geq 0, \quad j = 1, 2, \cdots, 5 \end{aligned}$$

2.3 某糖果厂用原料 A、B、C 加工成三种不同牌号的糖果甲、乙、丙。已知各种牌号糖果中 A、B、C 的含量、原料成本、各种原料每月的限制用量,三种牌号糖果的单位加工费及售价如表 2-3 所示。

表 2-3

项 目	甲	乙	丙	原料成本 (元/kg)	每月限制用量 (kg)
A	$\geq 60\%$	$\geq 15\%$		2.00	2 000
B				1.50	2 500
C	$\leq 20\%$	$\leq 60\%$	$\leq 50\%$	1.00	1 200
加工费(元/kg)	0.50	0.40	0.30		
售价(元/kg)	3.40	2.85	2.25		

试问：该厂应每月生产这3种牌号的糖果各多少公斤，可使得到的利润最大？请建立该问题的线性规划模型。

解：设 x_{ij} 代表生产第 j 种糖果所用的第 i 种原料的公斤数，这里 $i = 1, 2, 3$ 分别代表原料 A, B, C; $j = 1, 2, 3$ 分别代表产品甲、乙、丙。其线性规划的数学模型为

$$\begin{aligned} \max Z = & (3.40 - 0.50)(x_{11} + x_{21} + x_{31}) + (2.85 - 0.40)(x_{12} + x_{22} + x_{32}) \\ & + (2.25 - 0.30)(x_{13} + x_{23} + x_{33}) - 2.0(x_{11} + x_{12} + x_{13}) \\ & - 1.50(x_{21} + x_{22} + x_{23}) - 1.0(x_{31} + x_{32} + x_{33}) \\ \text{s. t. } & x_{11} + x_{12} + x_{13} \leq 2\,000 \\ & x_{21} + x_{22} + x_{23} \leq 2\,500 \\ & x_{31} + x_{32} + x_{33} \leq 1\,200 \\ & x_{11} \geq 0.6(x_{11} + x_{21} + x_{31}) \\ & x_{31} \leq 0.2(x_{11} + x_{21} + x_{31}) \\ & x_{12} \geq 0.15(x_{12} + x_{22} + x_{32}) \\ & x_{32} \leq 0.6(x_{12} + x_{22} + x_{32}) \\ & x_{33} \leq 0.5(x_{13} + x_{23} + x_{33}) \\ & x_{ij} \geq 0, \forall i, j \end{aligned}$$

2.4 用图解法求解以下线性规划问题：

$$\begin{aligned} (1) \quad & \max Z = 10x_1 + 5x_2 \\ \text{s. t. } & 3x_1 + 4x_2 \leq 9 \\ & 5x_1 + 2x_2 \leq 8 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (2) \quad & \max Z = 2x_1 + x_2 \\ \text{s. t. } & 5x_2 \leq 15 \\ & 6x_1 + 2x_2 \leq 24 \\ & x_1 + x_2 \leq 5 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

解：(1) 如图 2-1(a)，点 A 为两条约束直线的交点，解以下二元一次方程组：

$$\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 = 9, \\ 5x_1 + 2x_2 = 8 \end{cases}$$

解方程组，得

$$x = (1, 3/2); \quad Z = 35/2$$

(2) 如图 2-1(b)，点 A 为两条约束直线的交点，解以下二元一次方程组：

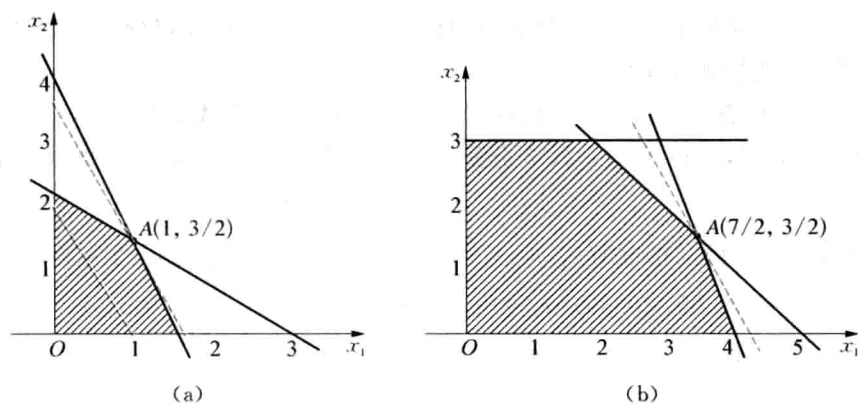


图 2-1 图解法

$$\begin{cases} 6x_1 + 2x_2 = 24 \\ x_1 + x_2 = 5 \end{cases}$$

解方程组,得

$$x = (7/2, 3/2); \quad Z = 17/2$$

2.5 将以下线性规划的数学模型标准化

$$\begin{aligned} (1) \quad & \min Z = -3x_1 + 4x_2 - 2x_3 + 5x_4 \\ & \text{s. t.} \quad 4x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 \geq 5 \\ & \quad \quad x_1 + 2x_2 + 3x_3 - x_4 \leq 15 \\ & \quad \quad -2x_1 + 3x_2 - x_3 + 2x_4 \geq 2 \\ & \quad \quad x_1, x_2, x_3 \geq 0; x_4 \text{ 无约束} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (2) \quad & \min Z = 2x_1 - x_2 + 2x_3 \\ & \text{s. t.} \quad -x_1 + x_2 + x_3 \geq 4 \\ & \quad \quad -x_1 + x_2 - x_3 \leq 6 \\ & \quad \quad x_1 \leq 0, x_2 \geq 0; x_3 \text{ 无约束} \end{aligned}$$

解: (1) 令 $Z' = -Z$, $x_4 = x_4' - x_4''$, 则有

$$\begin{aligned} \max Z' &= 3x_1 - 4x_2 + 2x_3 - 5x_4' + 5x_4'' \\ \text{s. t.} \quad & 4x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4' + x_4'' - x_5 = 5 \\ & x_1 + 2x_2 + 3x_3 - x_4' + x_4'' + x_6 = 15 \\ & -2x_1 + 3x_2 - x_3 + 2x_4' - 2x_4'' - x_7 = 2 \\ & x_1, x_2, x_3, x_4', x_4'', x_5, x_6, x_7 \geq 0 \end{aligned}$$

(2) 令 $Z' = -Z$, $x_1' = -x_1$, $x_3 = x_3' - x_3''$, 则有

$$\begin{aligned} \max Z' &= 2x_1' + x_2 - 2x_3' + 2x_3'' \\ \text{s. t.} \quad & x_1' + x_2 + x_3' - x_3'' - x_4 = 4 \\ & x_1' - x_2 + x_3' - x_3'' + x_5 = 6 \\ & x_1', x_2, x_3', x_3'', x_4, x_5 \geq 0 \end{aligned}$$

2.6 用单纯形的表上作业法求解以下线性规划问题:

- (1)
$$\begin{aligned} \max Z &= 2x_1 + 3x_2 + 5x_3 \\ \text{s. t. } 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 &\leq 12 \\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 &\leq 8 \\ 4x_1 + 6x_3 &\leq 16 \\ 4x_2 + 2x_3 &\leq 12 \\ x_1, x_2, x_3 &\geq 0 \end{aligned}$$
- (2)
$$\begin{aligned} \max Z &= 90x_1 + 160x_2 + 40x_3 + 100x_4 \\ \text{s. t. } 2x_1 + 8x_2 + 4x_3 + 2x_4 &\leq 480 \\ 5x_1 + 4x_2 + 8x_3 + 5x_4 &\leq 800 \\ 7x_1 + 8x_2 + 3x_3 + 5x_4 &\leq 900 \\ x_1, x_2, x_3, x_4 &\geq 0 \end{aligned}$$

解: (1) 其最优单纯形表如表 2-4 所示:

表 2-4 最优单纯形表

基	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	解
x_4	1/3	0	0	1	-1	-1/6	0	4/3
x_2	-1/6	1	0	0	1/2	-1/6	0	4/3
x_3	2/3	0	1	0	0	1/6	0	8/3
x_7	2/3	0	0	0	-2	1/3	1	4/3
$c_j - z_j$	-5/6	0	0	0	-3/2	-1/3	0	33/2

(2) 其最优单纯形表如表 2-5 所示:

表 2-5 最优单纯形表

基	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	解
x_2	0	1	1/8	0	5/32	-1/16	0	25
x_4	1	0	3/2	1	-1/8	1/4	0	140
x_7	2	0	-11/2	0	-5/8	-3/4	1	0
$c_j - z_j$	-10	0	-130	0	-12.5	-15	0	18 000

2.7 已知以下线性规划的一个基本解为:

$$\mathbf{x}_B = (x_4, x_3)^T, \mathbf{B}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1/3 \\ 0 & 1/3 \end{pmatrix}$$

试确定该基本解是否为最优解? 如果是, 给出相应结果; 否则, 确定进、出变量。

$$\begin{aligned}
\max Z &= 5x_1 + 12x_2 + 4x_3 \\
\text{s. t.} \quad &x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 = 10 \\
&2x_1 - x_2 + 3x_3 = 2 \\
&x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0
\end{aligned}$$

解：优化性检验：

$$\begin{aligned}
\lambda_{j=1,2} &= \mathbf{c}_B \mathbf{B}^{-1} \mathbf{p}_{j=1,2} - \mathbf{c}_{j=1,2} \\
&= (0, 4) \begin{pmatrix} 1 & -1/3 \\ 0 & 1/3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} - (5, 12) \\
&= (0, 4) \begin{pmatrix} 1/3 & 7/3 \\ 2/3 & -1/3 \end{pmatrix} - (5, 12) \\
&= (8/3, -4/3) - (5, 12) \\
&= (-7/3, -40/3)
\end{aligned}$$

此解非优，变量 x_2 进入可行性检验：

$$\mathbf{x}_B = (x_4, x_3)^T = \mathbf{B}^{-1} \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 1 & -1/3 \\ 0 & 1/3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 10 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 28/3 \\ 2/3 \end{pmatrix} > \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

此解可行，结论：因为 $\mathbf{p}'_2 = \begin{pmatrix} 7/3 \\ -1/3 \end{pmatrix}$ ， $\mathbf{x}_B = \begin{pmatrix} 28/3 \\ 2/3 \end{pmatrix}$ ，只有对应于 x_4 的比值为正，故 x_4 退出。

2.8 给定线性规划：

$$\begin{aligned}
\max Z &= 2x_1 + 3x_2 \\
\text{s. t.} \quad &x_1 + 2x_2 \leq 8 \\
&4x_1 \leq 16 \\
&4x_2 \leq 12 \\
&x_1, x_2 \geq 0
\end{aligned}$$

已知：

$$\mathbf{x}_B = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_4 \\ x_2 \end{pmatrix}, \mathbf{B}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1/2 \\ -4 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1/4 \end{pmatrix}$$

试确定该基本解是否为最优解？如果是，给出相应结果；否则，确定进、出变量。

解：优化性检验：

$$\begin{aligned}
\lambda_{j=3,5} &= \mathbf{c}_B \mathbf{B}^{-1} \mathbf{p}_{j=3,5} - \mathbf{c}_{j=3,5} \\
&= (2, 0, 3) \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1/2 \\ -4 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1/4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - (0, 0) \\
&= (2, -1/4)
\end{aligned}$$

此解非优,变量 x_5 进入可行性检验:

$$\boldsymbol{x}_B = \boldsymbol{B}^{-1} \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1/2 \\ -4 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1/4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 8 \\ 16 \\ 12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 8 \\ 3 \end{pmatrix} > \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

此解可行,计算比值:

$$\boldsymbol{p}'_5 = \boldsymbol{B}^{-1} \boldsymbol{p}_5 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1/2 \\ -4 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1/4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/2 \\ 2 \\ 1/4 \end{pmatrix}, \boldsymbol{x}_B = \begin{pmatrix} 2 \\ 8 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$\theta = \min \{-, 4, 12\} = 4$, 对应的退出变量为 x_4 。

结论: 原基本解可行, 但非优; 相应的进入变量为 x_5 , 退出变量为 x_4 。

2.9 找出以下线性规划问题的全部基本解, 指出哪些是可行基本解, 并通过目标函数的比较, 找出最优解。

(1)

$$\begin{aligned} \max Z &= 3x_1 + 5x_2 \\ \text{s. t. } x_1 &\leq 4 \\ 2x_2 &\leq 12 \\ 3x_1 + 2x_2 &\leq 18 \\ x_1, x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

(2)

$$\begin{aligned} \min Z &= 5x_1 - 2x_2 \\ \text{s. t. } x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 &= 7 \\ 2x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 &= 3 \\ x_1, x_2, x_3, x_4 &\geq 0 \end{aligned}$$

解: 表中打△的为基本可行解, 有 * 号的为最优解。

(1) 解的情况如表 2-6 所示:

表 2-6

解的情况	x_1	x_2	Z
△	0	0	0
△	4	0	12
	6	0	18
△	4	3	27
△	0	6	30
* △	2	6	36
	4	6	42
	0	9	45

(2) 解的情况如表 2-7 所示:

表 2-7

解的情况	x_1	x_2	x_3	x_4	Z
$\triangle$	0	0	1	1	0
	0	$-1/2$	0	2	1
$\triangle$	0	$1/2$	2	0	-1
	$-1/3$	0	0	$11/6$	$-5/3$
$* \triangle$	$2/5$	0	$11/5$	0	2
	-4	$11/2$	0	0	-31

2.10 分别用大 M 法和两阶段法求解下列线性规划:

(1) $\max Z = 10x_1 - 5x_2 + x_3$

$$\begin{cases} 5x_1 + 3x_2 + x_3 = 10 \\ -5x_1 + x_2 - 10x_3 \leq 15 \\ x_j \geq 0, j = 1, 2, 3 \end{cases}$$

(2) $\min Z = 5x_1 - 6x_2 - 7x_3$

$$\begin{cases} x_1 + 5x_2 - 3x_3 \geq 15 \\ 5x_1 - 6x_2 + 10x_3 \leq 20 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 5 \\ x_j \geq 0, j = 1, 2, 3 \end{cases}$$

解: (1) ① 大 M 法。

数学模型为

$$\begin{aligned} \max Z &= 10x_1 - 5x_2 + x_3 - Mx_5 \\ \text{s. t.} \quad &5x_1 + 3x_2 + x_3 + x_5 = 10 \\ &-5x_1 + x_2 - 10x_3 + x_4 = 15 \\ &x_j \geq 0, j = 1, 2, \dots, 5 \end{aligned}$$

最优解为

$$X = (2, 0, 0); Z = 20$$

② 两阶段法:

第一阶段: 数学模型为

$$\begin{aligned} \min W &= x_5 \\ \text{s. t.} \quad &5x_1 + 3x_2 + x_3 + x_5 = 10 \\ &-5x_1 + x_2 - 10x_3 + x_4 = 15 \\ &x_j \geq 0, j = 1, 2, \dots, 5 \end{aligned}$$

第二阶段：最优解为

$$\mathbf{X} = (2, 0, 0); Z = 20$$

(2) ① 大M法。

数学模型为

$$\min Z = 5x_1 - 6x_2 - 7x_3 + MA_1 + MA_3$$

$$\text{s. t. } x_1 + 5x_2 - 3x_3 - S_1 + A_1 = 15$$

$$5x_1 - 6x_2 + 10x_3 + S_2 = 20$$

$$x_1 + x_2 + x_3 + A_3 = 5$$

所有变量非负

最优解为

$$\mathbf{X} = \left(0, \frac{15}{4}, \frac{5}{4}\right)^T; Z = -\frac{125}{4}$$

② 两阶段法：

第一阶段：数学模型为

$$\min W = A_1 + A_3$$

$$\text{s. t. } x_1 + 5x_2 - 3x_3 - S_1 + A_1 = 15$$

$$5x_1 - 6x_2 + 10x_3 + S_2 = 20$$

$$x_1 + x_2 + x_3 + A_3 = 5$$

所有变量非负

第二阶段：最优解为

$$\mathbf{X} = (0, 3.75, 1.25); Z = -31.25$$

即：

$$\mathbf{X} = \left(0, \frac{15}{4}, \frac{5}{4}\right)^T; Z = -\frac{125}{4}$$

2.11 用改进单纯形方法求解以下线性规划问题：

(1)

$$\max Z = 4x_1 + 3x_2 + 6x_3$$

$$\text{s. t. } 3x_1 + x_2 + 3x_3 \leq 30$$

$$2x_1 + 2x_2 + 3x_3 \leq 40$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

(2)

$$\max Z = 5x_1 + 8x_2 + 7x_3 + 4x_4 + 6x_5$$

$$\text{s. t. } 2x_1 + 3x_2 + 3x_3 + 2x_4 + 2x_5 \leq 20$$

$$3x_1 + 5x_2 + 4x_3 + 2x_4 + 4x_5 \leq 30$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0$$

解: (1) 最优解为

$$\mathbf{X} = (0, 10, 20/3); Z = 70$$

(2) 最优解为

$$\mathbf{X} = (0, 0, 5, 0, 2.5); Z = 50$$

2.12 写出下列线性规划问题的对偶模型

$$\begin{aligned} (1) \quad & \max Z = 10x_1 + x_2 + 2x_3 \\ & \text{s. t.} \quad x_1 + x_2 + 2x_3 \leq 10 \\ & \quad \quad 4x_1 + x_2 + x_3 \leq 20 \\ & \quad \quad x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (2) \quad & \max Z = 2x_1 + x_2 + 3x_3 + x_4 \\ & \text{s. t.} \quad x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \leq 5 \\ & \quad \quad 2x_1 - x_2 + 3x_3 = -4 \\ & \quad \quad x_1 - x_3 + x_4 \geq 1 \\ & \quad \quad x_1, x_3 \geq 0; x_2, x_4 \text{ 无约束} \end{aligned}$$

解: (1)

$$\begin{array}{ll} \max Z = 10x_1 + x_2 + 2x_3 & \max Z = 10x_1 + x_2 + 2x_3 \\ \text{s. t.} \quad x_1 + x_2 + 2x_3 \leq 10 & \text{s. t.} \quad x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 = 10 \\ \quad \quad 4x_1 + x_2 + x_3 \leq 20 & \quad \quad 4x_1 + x_2 + x_3 + x_5 = 20 \\ \quad \quad x_1, x_2, x_3 \geq 0 & \quad \quad x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0 \end{array}$$

其对偶模型为:

$$\begin{aligned} \min W &= 10y_1 + 20y_2 \\ \text{s. t.} \quad & y_1 + 4y_2 \geq 10 \\ & y_1 + y_2 \geq 1 \\ & 2y_1 + y_2 \geq 2 \\ & y_1, y_2 \geq 0 \end{aligned}$$

(2) 令 $x_2 = x_2' - x_2''$, $x_4 = x_4' - x_4''$, 并根据需要引进松弛变量或剩余变量, 将原线性规划的数学模型标准化。其结果为:

$$\begin{aligned} \max Z &= 2x_1 + x_2' - x_2'' + 3x_3 + x_4' - x_4'' \\ \text{s. t.} \quad & x_1 + x_2' - x_2'' + x_3 + x_4' - x_4'' + x_5 = 5 \\ & -2x_1 + x_2' - x_2'' - 3x_3 = 4 \\ & x_1 - x_3 + x_4' - x_4'' - x_6 = 1 \\ & x_1, x_2', x_2'', x_3, x_4', x_4'', x_5, x_6 \geq 0 \end{aligned}$$

据此, 可写出其对偶模型: