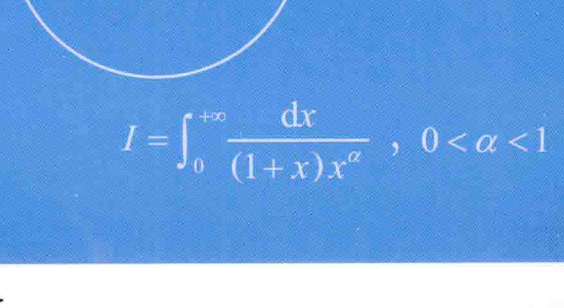
普 通 高 等 教 育 “十 二 五” 规 划 教 材
新世纪新理念高等院校数学教学改革与教材建设精品教材

丛书主编：朱长江 彭双阶
执行主编：何 穗

复变函数初步

FUBIAN HANSHU CHUBU

刘敏思
罗小兵 ◎主编



$$I=\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{(1+x)x^{\alpha}}\text{，}0<\alpha<1$$

華中師範大學出版社

普通高等教育“十二五”规划教材
新世纪新理念高等院校数学教学改革与教材建设精品教材

复变函数初步

主　编：刘敏思　罗小兵
副主编：姜海波　李海雄　吴昭君

华中师范大学出版社

内 容 提 要

本书是为高等院校数学与应用数学等专业编写的复变函数教材。全书共七章，内容包括：复数与复变函数、解析函数与初等解析函数、柯西积分定理与柯西积分公式、解析函数的幂级数展开与唯一性、解析函数的洛朗展开与孤立奇点、留数及其应用、共形映射。

本书选材经典、思路清晰、叙述简练、推导严谨，既兼顾复变函数与数学分析的密切联系，强调分析思想、方法的巩固和训练，又突出复变函数理论本身的特点。为方便读者学习、理解和训练，本书还配有一定数量的图形，并且每章将习题分为 A、B 两组，其中 A 组题为基础题，B 组题为能力提高题，适宜于教学中灵活使用。

本书可作为综合性大学和高等师范院校数学专业及相关专业的教材或教学参考书，也可供有关研究人员、科技工作者使用。

新出图证(鄂)字 10 号

图书在版编目(CIP)数据

复变函数初步/刘敏思 罗小兵主编. —武汉：华中师范大学出版社，2014.5
(普通高等教育"十二五"规划教材/新世纪新理念高等院校数学教学改革与教材建设精品教材)

ISBN 978-7-5622-6520-7

Ⅰ.①复… Ⅱ.①刘… ②罗… Ⅲ.①复变函数—高等学校—教材 Ⅳ.①O174.5

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2014)第 018446 号

复变函数初步

©刘敏思 罗小兵 主编

编辑室：第二编辑室　　**电话**：027－67867362
责任编辑：冯红亮 袁正科　　**责任校对**：易 雯　　**封面设计**：胡 灿
出版发行：华中师范大学出版社
社址：湖北省武汉市洪山区珞喻路 152 号　　**邮编**：430079
销售电话：027－67863426/67863280(发行部) 027－67861321(邮购) 027－67863291(传真)
网址：http://www.ccnupress.com　　**电子信箱**：hscbs@public.wh.hb.cn
印刷：湖北新华印务有限公司　　**督印**：章光琼
开本：787 mm×1092 mm 1/16　　**印张**：12　　**字数**：273 千字
版次：2014 年 5 月第 1 版　　**印次**：2014 年 5 月第 1 次印刷
印数：1—2000　　**定价**：21.60 元

欢迎上网查询、购书

普通高等教育“十二五”规划教材
新世纪新理念高等院校数学教学改革与教材建设精品教材

丛书编写委员会

丛书总序

未来社会是信息化的社会，以多媒体技术和网络技术为核心的信息技术正在飞速发展，信息技术正以惊人的速度渗透到教育领域中，正推动着教育教学的深刻变革。在积极应对信息化社会的过程中，我们的教育思想、教育理念、教学内容、教学方法与手段以及学习方式等方面已不知不觉地发生了深刻的变革。

现代数学不仅是一种精密的思想方法、一种技术手段，更是一个有着丰富内容和不断向前发展的知识体系。《国家中长期教育改革和发展规划纲要(2010—2020年)》指明了未来十年高等教育的发展目标："全面提高高等教育质量"、"提高人才培养质量"、"提升科学研究水平"、"增强社会服务能力"、"优化结构办出特色"。这些目标的实现，有赖于各高校进一步推进数学教学改革的步伐，借鉴先进的经验，构建自己的特色。而数学作为一个基础性的专业，承担着培养高素质人才的重要作用。因此，新形势下高等院校数学教学改革的方向、具体实施方案以及与此相关的教材建设等问题，不仅是值得关注的，更是一个具有现实意义和实践价值的课题。

为推进教学改革的进一步深化，加强各高校教学经验的广泛交流，构建高校数学院系的合作平台，华中师范大学数学与统计学学院和华中师范大学出版社充分发挥各自的优势，由华中师范大学数学与统计学学院发起，诚邀华中和周边地区部分颇具影响力的高等院校，面向全国共同开发这套"新世纪新理念高等院校数学系列精品教材"，并委托华中师范大学出版社组织、协调和出版。我们希望，这套教材能够进一步推动全国教育事业和教学改革的蓬勃兴盛，切实体现出教学改革的需要和新理念的贯彻落实。

总体看来，这套教材充分体现了高等学校数学教学改革提出的新理念、新方法、新形式。如目前各高等学校数学教学中普遍推广的研究型教学，要求教师少讲、精讲，重点讲思路、讲方法，鼓励学生的探究式自主学习，教师的角色也从原来完全主导课堂的讲授者转变为学生自主学习的推动者、辅导者，学生转变为教学活动的真正主体等。而传统的教材完全依赖教师课堂讲授、将主要任务交给任课教师完成、学生依靠大量的被动练习应对考试等特点，已不能满足这种新教学改革的推进。如果再叠加脱离时空限制的网络在线教学等教学方式带来的巨大挑

战，传统教材甚至已成为教学改革的严重制约因素。

基于此，我们这套教材在编写的过程中注重突出以下几个方面的特点：

一是以问题为导向、引导研究性学习。教材致力于学生解决实际的数学问题、运用所学的数学知识解决实际生活问题为导向，设置大量的研讨性、探索性、应用性问题，鼓励学生在教师的辅导、指导下于课内课外自主学习、探究、应用，以加深对所学数学知识的理解、反思，提高其实际应用能力。

二是精选内容、逻辑清晰。整套教材在各位专家充分研讨的基础上，对课堂教学内容进一步精炼浓缩，以应对课堂教学时间、教师讲授时间压缩等方面的变革；与此同时，教材还在各教学内容的结构安排方面下了很大的功夫，使教材的内容逻辑更清晰，便于教师讲授和学生自主学习。

三是通俗易懂、便于自学。为了满足当前大学生自主学习的要求，我们在教材编写的过程中，要求各教材的语言生动化、案例更切合生活实际且趣味化，如通过借助数表、图形等将抽象的概念用具体、直观的形式表达，用实例和示例加深对概念、方法的理解，尽可能让枯燥、繁琐的数学概念、数理演绎过程通俗化，降低学生自主学习的难度。

当然，教学改革的快速推进不断对教材提出新的要求，同时也受限于我们的水平，这套教材可能离我们理想的目标还有一段距离，敬请各位教师，特别是当前教学改革后已转变为教学活动“主体”的广大学子们提出宝贵的意见！

朱长江

于武昌桂子山

2013 年 7 月

前　言

复变函数是分析学的一个重要组成部分，是数学乃至自然科学的重要基础之一，是分析学知识应用于实际问题的一种具体工具和桥梁，它的中心内容是解析函数理论。它创立于十九世纪，并成为十九世纪最独特的数学分支之一，为现代分析奠定了基础。

由于复变函数理论在数学和实际应用中的重要性，人们常把复变函数作为抽象数学与自然界之间最和谐的理论标志。目前，复变函数理论已渗透到现代数学的许多分支中，对于这门课掌握的程度，将直接影响到数学与应用数学专业的许多后续课程(例如，函数的值分布与幅角分布理论、泛函分析、微分流形、动力系统、微分方程、数学控制论、分形几何、小波分析、调和分析、傅立叶变换、拉普拉斯变换、计算方法、概率统计等)的学习和研究。因此，几乎所有大学的数学专业，甚至还有其他专业(如物理的某些专业)都开设了这门课程。

另外，复变函数在数学乃至自然科学中的地位之所以重要，还在于一方面它与古典分析联系非常密切，常常可以为古典分析中某些问题的解决提供有效的方法(例如积分、级数值的计算等)，另一方面它与实际问题的联系非常密切，例如在空气动力学、流体力学、电学、热学、现代物理以及飞机设计与制造中经常用到复变函数的思想和方法。实际上，复变函数理论的建立和发展最初正是伴随着数学应用于解决实际问题的需要。因此，它是一门应用性很强的学科，可为数学实验、数学建模提供较好的平台。

本书是为综合性大学和高等师范院校数学与应用数学，信息与计算数学等专业编写的教材。我们在编写本教材时注意了以下几点：

1. 既注重基本理论的科学性，又充分考虑内容的启发性和训练功能；

2. 既保持理论体系的相对完整性和深度，又力求深入浅出，循序渐进，便于学生自学；

3. 既注意观点与方法的现代性，又尽量与数学分析的有关内容和方法相衔接，以便学生进一步加深对数学分析理论和方法的认识。

全书共七章，内容包括复数与复变函数，解析函数与初等解析函数，柯西积分

定理和柯西积分公式，解析函数的幂级数展开与唯一性，解析函数的洛朗展式与孤立奇点，留数及其应用和共形映射。

本书选材经典，思路清晰，叙述简练，推导严谨，既兼顾复变函数与数学分析的密切联系，强调分析思想、方法的训练和巩固，又突出复变函数理论本身的特点。

为了使读者在学习过程中对课程发展的历史有所了解，在本书的第二至第五章的最后还分别安排了部分重要历史人物的简介。

为了便于分层教学，本书在习题的编排上有别于同类教材，每章都将习题分为A、B两组，其中A组题大部分为基础题，题型丰富，适宜于读者在学完相应内容后独立完成。B组题为能力提高题，其中大部分题目对学有余力的读者只需深入思考后也可独立完成，但有少部分题难度较大，这些题可在教师的指导下完成。

本书第一章由刘敏思编写，第二章和第三章由李海雄编写，第四章和第五章由姜海波编写，第六章和第七章由罗小兵编写，在前期大纲的讨论和后期的统稿过程中，吴昭君老师提出了许多良好的建议，全书由刘敏思统稿。

在本书的编写过程中，我们参考了国内外部分同类教材，其主要书目列在了本书的参考文献中，在此，对文献的作者深表谢意！

尽管在编写过程中做出了较大努力，但限于我们水平，书中肯定存在不少疏漏和不妥之处，敬请广大读者批评指正。

编者

2014 年 2 月

目录

第 1 章

复数与复变函数

复变函数是分析学的一个分支，称为**复分析**。复变函数中所涉及的函数是自变量与因变量均取复数的函数，称为**复变函数**。复变函数主要研究的对象，是在某种意义下可导的复变函数，这种函数通常称为**解析函数**。

为了建立研究解析函数的理论基础，我们必须对复数域有一个清晰的认识。本章首先介绍复数的基础知识，然后介绍平面拓扑的一般概念及其复数表示，最后介绍复变函数的概念，复变函数的极限和连续性。

1.1 复数

1.1.1 复数与共轭复数

1. 复数与共轭复数

形如 $z=x+\mathrm{i}y$ 的数，称为**复数**，其中 $x,y\in\mathbf{R}$，i 满足 $\mathrm{i}^2=-1$，称为**虚数单位**。x 和 y 分别称为复数 z 的**实部**和**虚部**，记为 $x=\mathrm{Re}z$，$y=\mathrm{Im}z$。

规定：复数 $z_1=x_1+\mathrm{i}y_1$ 及 $z_2=x_2+\mathrm{i}y_2$ 相等的充要条件是它们的实部与实部相等，虚部与虚部相等，即

$$x_1+\mathrm{i}y_1=x_2+\mathrm{i}y_2 \text{ 当且仅当 } x_1=x_2,y_1=y_2;$$

虚部为零的复数可看作实数，即 $x+\mathrm{i}\cdot 0=x$，因此全体实数是全体复数的一部分，特别地，$0+\mathrm{i}\cdot 0=0$；虚部不为零的复数称为**虚数**；实部为零且虚部不为零的复数称为**纯虚数**。

复数 $x-\mathrm{i}y$ 称为复数 $z=x+\mathrm{i}y$ 的**共轭复数**，记为 $\overline{z}=\overline{x+\mathrm{i}y}$，即

$$\overline{z}=\overline{x+\mathrm{i}y}=x-\mathrm{i}y。$$

显然复数与其共轭复数是相互的，即 $\overline{z}$ 是 z 的共轭复数，则 z 也是 $\overline{z}$ 的共轭复数，于是 $\overline{(\overline{z})}=z$。

2. 复数的四则运算

(1) 复数的加减法

复数 $z_1=x_1+\mathrm{i}y_1$，$z_2=x_2+\mathrm{i}y_2$ 相加(减)的法则是

$$z_1\pm z_2=(x_1\pm x_2)+\mathrm{i}(y_1\pm y_2),$$

结果仍是复数，我们称复数 z_1+z_2 是复数 z_1 与 z_2 的**和**，而称复数 z_1-z_2 是复数 z_1 与 z_2 的**差**。这表明复数与复数相加(减)所得的复数可按实部与实部相加(减)，虚部与虚部相加(减)得到。容易验证，复数的加法满足交换律和结合律，而且减法是加法的逆运算。

(2) 复数的乘法

两个复数 $z_1 = x_1 + \mathrm{i}y_1, z_2 = x_2 + \mathrm{i}y_2$ 相乘，可按多项式乘法法则进行，只需将结果中的 i^2 换成 -1，即

$$z_1 z_2 = (x_1 x_2 - y_1 y_2) + \mathrm{i}(x_1 y_2 + x_2 y_1),$$

结果仍是复数，并称它为复数 z_1 与 z_2 的积。

容易验证，复数的乘法满足交换律和结合律，且还满足乘法对加法的分配律。

(3) 复数的除法

两个复数 $z_1 = x_1 + \mathrm{i}y_1, z_2 = x_2 + \mathrm{i}y_2$ 相除(除数 $\neq 0$) 时，可先将分子分母同时乘以分母的共轭复数，再根据复数的乘法进行简化，即

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2} + \mathrm{i}\,\frac{x_2 y_1 - x_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2}(z_2 \neq 0),$$

结果仍是复数，称它为复数 z_1 与 z_2 的商。易知，除法是乘法的逆运算。

由复数的四则运算可得，共轭复数具有如下性质：

$$\overline{z_1 \pm z_2} = \overline{z_1} \pm \overline{z_2};\ \overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2};$$

$$\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}};\ z \cdot \overline{z} = (\mathrm{Re}z)^2 + (\mathrm{Im}z)^2;$$

$$z + \overline{z} = 2\mathrm{Re}z;\ z - \overline{z} = 2\mathrm{i}\mathrm{Im}z。$$

引进了复数的四则运算后，全体复数所成的集合也称为**复数域**，记为 **C**。可以验证，关于实数的一切代数恒等式在复数域内仍然成立(如 $a^2 - b^2 = (a+b)(a-b), a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$ 等)，但**在复数域中不能像实数那样规定复数的大小关系**(即复数没有大小比较)。

1.1.2 复平面与复数的表示

1. 复数与平面上的点

一个复数 $z = x + \mathrm{i}y$ 本质上由一有序实数对 (x, y) 唯一确定，而有序实数对 (x, y) 表示平面上的点，因此，我们能建立平面上的全部点与全体复数间的一一对应关系，即可以用平面上横坐标为 x，纵坐标为 y 的点来表示复数 $z = x + \mathrm{i}y$(如图 1-1)。

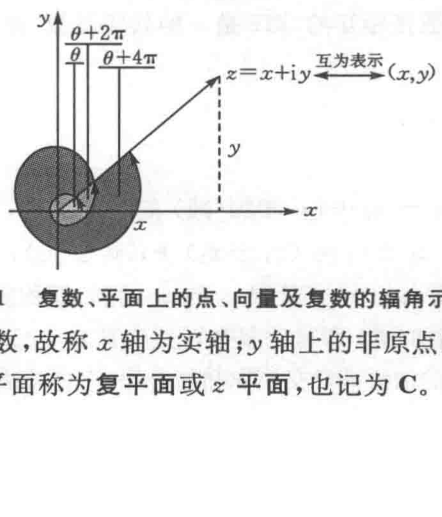


图 1-1 复数、平面上的点、向量及复数的辐角示意图

x 轴上的点对应着实数，故称 x 轴为实轴；y 轴上的非原点的点对应着纯虚数，故称 y 轴为虚轴。表示复数 z 的平面称为**复平面**或 **z 平面**，也记为 **C**。

2. 复数与向量

在复平面上，复数 z 与从原点到点 $z=x+\mathrm{i}y$ 的向量也构成一一对应的关系(复数 0 对应着零向量)，因此我们也能用平面上从原点出发的向量表示复数。

引进了复数的向量表示可使复数的加减运算与向量的加减运算保持一致。

例如，设 $z_1=x_1+\mathrm{i}y_1$，$z_2=x_2+\mathrm{i}y_2$，则由图 1-2 可以看出，$z_1+z_2=(x_1+x_2)+\mathrm{i}(y_1+y_2)$ 表示的向量就是 z_1 表示的向量与 z_2 表示的向量的和向量(如图 1-2)。

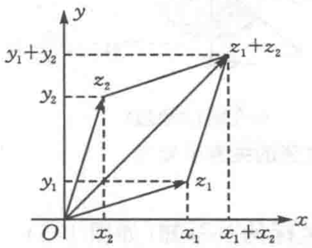


图 1-2　复数的加法示意图

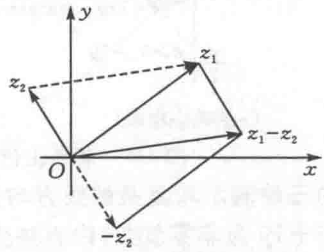


图 1-3　复数的减法示意图

又如，$z_1-z_2=z_1+(-z_2)$ 表示的向量(也即 z_1 与 $-z_2$ 的和向量)就是从 z_2 到 z_1 的向量(如图 1-3)。

3. 复数的模与辐角

(1) 复数的模

用向量 $\overrightarrow{oz}$ 表示复数 $z=x+\mathrm{i}y$，其中 x,y 依次表示 $\overrightarrow{oz}$ 沿 x 轴与 y 轴的分量。向量 $\overrightarrow{oz}$ 的长度称为复数 z 的**模**或**绝对值**，记为 $|z|$ 或 r，即

$$r=|z|=\sqrt{x^2+y^2}\geqslant 0。$$

关于复数的模，有如下关系：

$$|\mathrm{Re}z|=|x|\leqslant|z|,\ |\mathrm{Im}z|=|y|\leqslant|z|,\ |z|\leqslant|x|+|y|=|\mathrm{Re}z|+|\mathrm{Im}z|,\tag{1.1}$$

$$|z_1\pm z_2|\leqslant|z_1|+|z_2|,\ ||z_1|-|z_2||\leqslant|z_1\pm z_2|,\tag{1.2}$$

$$z\cdot\bar{z}=|z|^2=|z^2|。\tag{1.3}$$

其中(1.2)式也称为**三角不等式**，它的几何意义是三角形的两边之和大于第三边，两边之差小于第三边。

思考题：试利用图 1-2，图 1-3 说明(1.2)式在什么条件下取等号。

由复数的模及两点间的距离公式知，$|z_1-z_2|=\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}$ 表示点 z_1 与点 z_2 的**距离**，记为 $d(z_1,z_2)$，即 $d(z_1,z_2)=|z_1-z_2|$。

(2) 复数的辐角

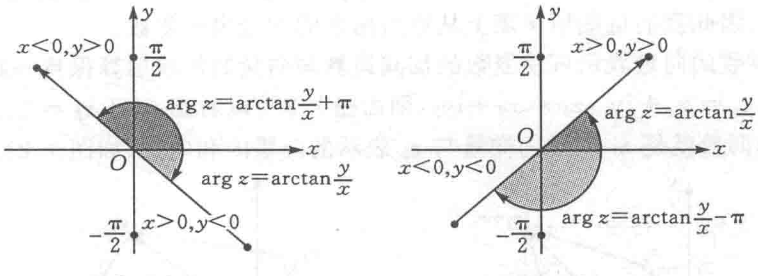
设 $z=x+\mathrm{i}y$ 为非零复数，我们将实轴正向到 z 所表示的向量 $\overrightarrow{oz}$ 间的夹角 θ 称为复数 z 的**辐角**，记为 $\theta=\mathrm{Arg}z$(如图 1-1)。显然，复数 z 的辐角满足 $\tan\theta=\dfrac{y}{x}$，且任一非零复数 z 有无穷多个辐角，以 $\arg z$ 表示其中的一个特定值，并称满足条件

$$-\pi<\arg z\leqslant\pi\tag{1.4}$$

的一个为 $\mathrm{Arg}z$ 的主值(或复数 z 的主辐角)，习惯上仍记为 $\arg z$。于是

$$\theta=\arg z+2k\pi(k\in\mathbf{Z})。\tag{1.5}$$

复数 $z(z\neq 0)$ 的主辐角 $\arg z$ 与反正切 $\mathrm{Arctan}\,\dfrac{y}{x}$ 的主值 $\arctan\dfrac{y}{x}$ 的关系如图 1-4 所示。



（z在第2,4象限）　　　　（z在第1,3象限）

图 1-4　辐角主值与反正切主值的关系示意图

4. 复数的三种表示和复数的乘方与开方

设 $z=x+\mathrm{i}y$ 为非零复数，由直角坐标与极坐标的关系知（如图 1-5）

$$z=r(\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta),$$

称为非零复数 z 的三角形式，而 $z=x+\mathrm{i}y$ 称为复数 z 的代数形式。

特别地，当 $r=|z|=1$ 时，

$$z=\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta,$$

称 z 为单位复数。

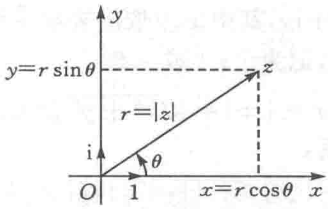


图 1-5　直角坐标与极坐标的关系

由欧拉公式 $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}=\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta$，非零复数 z 也可表示成 $z=r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$，称为非零复数 z 的**指数形式**。

注：复数的这三种表示法可以相互转化，以适应不同问题讨论的需要。

例 1　求复数 $2-2\mathrm{i}$ 的模、辐角、三角形式与指数形式。

解
$$|2-2\mathrm{i}|=\sqrt{2^2+(-2)^2}=2\sqrt{2};$$

$$\mathrm{Arg}(2-2\mathrm{i})=\arctan\frac{-2}{2}+2k\pi=-\frac{\pi}{4}+2k\pi(k\in\mathbf{Z});$$

$$2-2\mathrm{i}=2\sqrt{2}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)+\mathrm{i}\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right)=2\sqrt{2}\mathrm{e}^{-\frac{\pi}{4}\mathrm{i}}。$$

例 2　将复数 $1-\cos\varphi+\mathrm{i}\sin\varphi(0<\varphi\leqslant\pi)$ 化为指数形式。

解
$$1-\cos\varphi+\mathrm{i}\sin\varphi=2\sin^2\frac{\varphi}{2}+2\mathrm{i}\sin\frac{\varphi}{2}\cos\frac{\varphi}{2}=2\sin\frac{\varphi}{2}\left[\sin\frac{\varphi}{2}+\mathrm{i}\cos\frac{\varphi}{2}\right]$$

$$=2\sin\frac{\varphi}{2}\left[\cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\varphi}{2}\right)+\mathrm{i}\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\varphi}{2}\right)\right]=2\sin\frac{\varphi}{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\varphi}{2}\right)}。$$

引进了复数的三角形式或指数形式，可得如下结果：

设 $z_1 = r_1 e^{i\theta_1}$，$z_2 = r_2 e^{i\theta_2}$，则

(1)$z_1 = z_2$ 的充要条件是 $r_1 = r_2$，$\theta_1 = \theta_2 + 2k\pi$（$k$ 为任意整数）；

(2)$z_1 z_2 = r_1 r_2 e^{i(\theta_1+\theta_2)}$；

(3) $\dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{r_1}{r_2} e^{i(\theta_1-\theta_2)}$。

从而

$$|z_1 z_2| = |z_1||z_2|,\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}, \tag{1.6}$$

$$\mathrm{Arg}(z_1 z_2) = \mathrm{Arg}z_1 + \mathrm{Arg}z_2, \mathrm{Arg}\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = \mathrm{Arg}z_1 - \mathrm{Arg}z_2。$$

注：复数的乘、除运算以及幂（乘方）、开方运算用复数的三角形式或指数形式较简单。利用复数的指数形式还可直观得到复数乘除的几何意义（如图 1-6）。

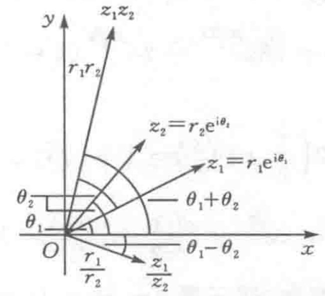


图 1-6　复数乘除的几何意义

复数的运算除前面介绍的四则运算外，还有下面的乘方与开方运算。通常，n 个复数 z 的乘积称为 z 的 **n 次幂**，记为 z^n，即 $z \cdot z \cdot \cdots \cdot z = z^n$。

若 $z \neq 0$，记 $z = re^{i\theta}$，则 $z^n = r^n e^{in\theta} = r^n(\cos n\theta + i\sin n\theta)$。特别地，当 $r = 1$ 时，有

$$e^{in\theta} = \cos n\theta + i\sin n\theta \quad [\textbf{棣莫弗(De'Moivre) 公式}]。$$

设 $z \neq 0$，满足方程 $w^n = z$（$n \geqslant 2$ 为整数）的复数 w 称为复数 z 的 **n 次方根**，记为 $w = \sqrt[n]{z}$。

记 $z = re^{i\theta}$，$w = Re^{i\varphi}$ 将它们代入方程 $w^n = z$ 得，$R^n e^{in\varphi} = re^{i\theta}$，从而 $R^n = r$，$n\varphi = \theta + 2k\pi$，即 $R = \sqrt[n]{r}$（算术根），$\varphi = \dfrac{\theta + 2k\pi}{n}$，$k = 0,1,2,\cdots,n-1$。所以，复数 z 的 n 次方根为

$$w_k = (\sqrt[n]{z})_k = \sqrt[n]{r}\,e^{i\frac{\theta+2k\pi}{n}}, k = 0,1,2,\cdots,n-1。$$

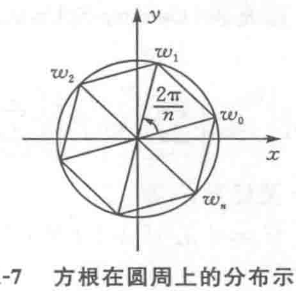


图 1-7　方根在圆周上的分布示意图

可见,非零复数 z 的 n 次方根共有 n 个,它们均匀地分布在以原点为圆心,半径为 $\sqrt[n]{r}$ 的圆周上(如图 1-7)。

例 3 求 $\cos 3\theta$ 及 $\sin 3\theta$(用 $\cos\theta$ 与 $\sin\theta$ 来表示)。

解 由棣莫弗公式得

$$\cos 3\theta + i\sin 3\theta = e^{i3\theta} = (\cos\theta + i\sin\theta)^3$$
$$= \cos^3\theta - 3\cos\theta\sin^2\theta + i(3\cos^2\theta\sin\theta - \sin^3\theta),$$

比较等式两边的实部与虚部得

$$\cos 3\theta = \cos^3\theta - 3\cos\theta\sin^2\theta = 4\cos^3\theta - 3\cos\theta,$$
$$\sin 3\theta = 3\cos^2\theta\sin\theta - \sin^3\theta = 3\sin\theta - 4\sin^3\theta。$$

例 4 求 $\sqrt[3]{-8}$。

解 因为 $-8 = 8e^{i\pi}$,所以

$$\sqrt[3]{-8} = \sqrt[3]{8}e^{i\frac{\pi+2k\pi}{3}} = 2e^{i\frac{\pi+2k\pi}{3}}\ (k = 0,1,2),$$

即

$$\sqrt[3]{-8} = 2e^{i\frac{\pi}{3}} = 2\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 1 + i\sqrt{3},\ \sqrt[3]{-8} = 2e^{i\frac{3\pi}{3}} = -2,$$
$$\sqrt[3]{-8} = 2e^{i\frac{5\pi}{3}} = 2\left(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 1 - i\sqrt{3}。$$

例 5 设 z_1 和 z_2 是两个复数,试证明:$|z_1 \pm z_2|^2 = |z_1|^2 + |z_2|^2 \pm 2\mathrm{Re}(z_1\overline{z_2})$,并由此再证明复数的三角不等式。

证明

$$|z_1 \pm z_2|^2 = (z_1 \pm z_2)(\overline{z_1} \pm \overline{z_2}) = |z_1|^2 + |z_2|^2 \pm (z_1\overline{z_2} + \overline{z_1}z_2)$$
$$= |z_1|^2 + |z_2|^2 \pm 2\mathrm{Re}(z_1\overline{z_2})。$$

注意到 $-|z_1||z_2| \leqslant \mathrm{Re}(z_1\overline{z_2}) \leqslant |z_1||z_2|$,可得

$$(|z_1| - |z_2|)^2 = |z_1|^2 + |z_2|^2 - 2|z_1||z_2|$$
$$\leqslant |z_1 \pm z_2|^2 \leqslant |z_1|^2 + |z_2|^2 + 2|z_1||z_2|$$
$$= (|z_1| + |z_2|)^2,$$

即

$$||z_1| - |z_2|| \leqslant |z_1 \pm z_2| \leqslant |z_1| + |z_2|。$$

例 6 [复数形式的柯西 - 施瓦茨(Cauchy-Schwarz)不等式] 设 $a_k, b_k \in \mathbf{C}(k = 1, 2,\cdots,n)$,则

$$\left|\sum_{k=1}^{n} a_k b_k\right|^2 \leqslant \left(\sum_{k=1}^{n} |a_k|^2\right)\left(\sum_{k=1}^{n} |b_k|^2\right)。$$

证明 由例 5,任取复数 t 及任意 k,有

$$0 \leqslant |a_k - t\cdot\overline{b_k}|^2 = |a_k|^2 + |t|^2\cdot|b_k|^2 - 2\mathrm{Re}\,\bar{t}\,a_k b_k。$$

上式对 $k = 1,2,\cdots,n$ 求和,得