



21 世纪高等教育规划教材——学习指导与考研系列

材料力学 学习指导

刘淑珍 陈曹维 主编



机械工业出版社
CHINA MACHINE PRESS

21 世纪高等教育规划教材——学习指导与考研系列

材料力学学习指导

主 编 刘淑珍 陈曹维
参 编 孙慧平 程仙国
主 审 胡如夫



机械工业出版社

本书概括地介绍了材料力学的基本概念、基本理论及各章节的难点与重点,由课程内容和附录 A、附录 B 组成。课程内容包括绪论,拉伸、压缩与剪切,扭转,弯曲内力,弯曲应力,弯曲变形,应力及应变分析,组合变形,压杆稳定,动载荷,交变应力,能量法等,共 12 章。在介绍课程基本内容的基础上,附录 A 对杆件内力图绘制作了小结,介绍了控制截面的概念,并通过例题讲解了应用控制截面法快速绘制杆件内力图的基本步骤。附录 B 给出了三套模拟试题,并附有参考答案。

本书可作为高等院校本科、高职高专、成人教育、函授等工科类学生学习材料力学的辅导用书,也可作为考研应试者考前复习和强化训练用书。

图书在版编目(CIP)数据

材料力学学习指导/刘淑珍、陈曹维主编. —北京:机械工业出版社, 2013. 7

21 世纪高等教育规划教材·学习指导与考研系列

ISBN 978-7-111-43425-2

I. ①材… II. ①刘…②陈… III. ①材料力学—高等学校—教学参考资料 IV. ①TB301

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2013)第 167010 号

机械工业出版社(北京市百万庄大街 22 号 邮政编码 100037)

策划编辑:姜 凤 责任编辑:姜 凤 李 乐

版式设计:霍永明 责任校对:张 媛

责任印制:乔 宇

北京机工印刷厂印刷(三河市南杨庄国丰装订厂装订)

2014 年 3 月第 1 版第 1 次印刷

169mm×239mm·10.5 印张·211 千字

标准书号:ISBN 978-7-111-43425-2

定价:19.90 元



凡购本书,如有缺页、倒页、脱页,由本社发行部调换

电话服务

网络服务

社服务中心:(010)88361066 教材网:<http://www.cmpedu.com>

销售一部:(010)68326294 机工官网:<http://www.cmpbook.com>

销售二部:(010)88379649 机工官博:<http://weibo.com/cmp1952>

读者购书热线:(010)88379203 封面无防伪标均为盗版

前 言

材料力学主要研究材料在各种外力作用下产生的应变、应力、强度、刚度、稳定性和导致各种材料破坏的极限。材料力学是所有工科学生必修的学科，是设计工业设施必须掌握的知识，也是工科院校硕士研究生入学考试的一门专业基础课。

在材料力学课程学习过程中，为了透彻理解材料力学的基本理论，掌握学习材料力学的基本方法，练习和巩固是不可或缺的。本书通过对大量有代表性的典型例题进行分析和求解，揭示了材料力学的解题方法和技巧，使学生可以举一反三、触类旁通，并通过练习提高基本作图、运算及应试能力。

本书每章都由内容提要、难点与重点、例题解析和习题四部分组成。内容提要及难点与重点对每章的基本内容作了概括，并对学生感觉难度较大的知识点进行了详细的解析；本书用例题的形式来体现每章的学习目的和要求，通过例题解析，帮助学生理解和掌握基本概念，基本上每道例题都给出了详细的解题过程；习题是例题解析的有益补充，编选与工程实际联系紧密的习题或考研真题，以提高学生解决实际问题 and 应试的能力。由于在后续课程学习和工程应用中，都会应用材料力学的知识进行静力分析和内力分析，所以分析杆件内力和掌握内力图画法是非常重要的，本书附录 A 总结概括了应用控制截面法快速绘制轴力图、扭矩图、剪力图和弯矩图的方法。附录 B 提供了三套模拟试题，供学生练习检查对知识点的掌握程度。

本书由宁波工程学院刘淑珍、陈曹维主编，宁波工程学院孙慧平、程仙国参加编写，宁波工程学院胡如夫担任主审。本书在编写过程中，得到了宁波工程学院材料力学课程组同仁的大力支持，主审胡如夫提出了许多宝贵意见，在此一并致以衷心的感谢。

由于编者水平有限，书中难免有疏误和不妥之处，恳请读者批评指正。

编者

2013 年 12 月

目 录

前言

第1章 绪论	1
1.1 内容提要	1
1.2 难点与重点	2
1.3 例题解析	3
1.4 习题	4
第2章 拉伸、压缩与剪切	5
2.1 内容提要	5
2.2 难点与重点	9
2.3 例题解析	10
2.4 习题	19
第3章 扭转	25
3.1 内容提要	25
3.2 难点与重点	27
3.3 例题解析	28
3.4 习题	35
第4章 弯曲内力	40
4.1 内容提要	40
4.2 难点与重点	43
4.3 例题解析	43
4.4 习题	48
第5章 弯曲应力	53
5.1 内容提要	53
5.2 难点与重点	56
5.3 例题解析	56
5.4 习题	61
第6章 弯曲变形	63
6.1 内容提要	63
6.2 难点与重点	65
6.3 例题解析	65
6.4 习题	69
第7章 应力及应变分析	71
7.1 内容提要	71

7.2 难点与重点	77
7.3 例题解析	78
7.4 习题	83
第8章 组合变形	85
8.1 内容提要	85
8.2 难点与重点	87
8.3 例题解析	87
8.4 习题	95
第9章 压杆稳定	99
9.1 内容提要	99
9.2 难点与重点	101
9.3 例题解析	101
9.4 习题	107
第10章 动载荷	110
10.1 内容提要	110
10.2 难点与重点	111
10.3 例题解析	111
10.4 习题	116
第11章 交变应力	118
11.1 内容提要	118
11.2 难点与重点	121
11.3 例题解析	121
11.4 习题	123
第12章 能量法	125
12.1 内容提要	125
12.2 难点与重点	127
12.3 例题解析	127
12.4 习题	140
附录	143
附录A 应用控制截面法画杆件内力图	
小结	143
附录B 模拟试题	152
参考文献	161

第1章 绪论

1.1 内容提要

1.1.1 材料力学的任务

(1) 组成机械和结构物的零部件称为构件。为保证结构或机械正常工作, 构件应有足够的承受载荷能力 (简称承载能力)。材料力学就是研究构件承载能力的一门科学。

(2) 构件承载能力包括三方面: ①**强度** 构件抵抗破坏的能力; ②**刚度** 构件抵抗变形的能力; ③**稳定性** 构件保持原有平衡形式的能力。

(3) 材料力学的主要任务是: 在满足强度、刚度和稳定性要求的前提下, 为设计既经济又安全的构件, 提供必要的理论基础和计算方法。

1.1.2 变形固体及其基本假设

(1) 材料力学研究的构件都是变形固体。

(2) 对变形固体作下列三个基本假设: ①**连续性假设** 认为组成固体的物质不留空隙地充满了固体的体积; ②**均匀性假设** 认为在固体内的力学性能处处相同; ③**各向同性假设** 认为沿任何方向, 固体的力学性能都是相同的。

1.1.3 外力及其分类

(1) 来自构件外部的力, 称为外力。

(2) 按作用方式, 外力可分为表面力和体积力: ①**表面力**是作用于物体表面的力, 又可分为分布力和集中力; ②**体积力**是连续分布于物体内部各点的力。

(3) 按载荷随时间变化的特点, 外力可分成静载荷和动载荷, 其中动载荷又分为交变载荷和冲击载荷。

1.1.4 内力、截面法及应力

(1) 材料力学研究的内力是因外力引起构件各部分之间相互作用力的变化量。

(2) 截面法: 用截面假想地把构件分成两部分, 以显示内力与确定内力的方法。

(3) 单位面积上内力的平均集度, 称为平均应力, 公式表示: $p_m = \Delta F / \Delta A$ 。

(4) 点的应力: 分布内力系在该点的集度。公式表示: $p = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \Delta F / \Delta A$ 。应力 p 可以分解成垂直于截面的正应力 σ 和相切于截面的切应力 τ 。

1.1.5 变形与应变

(1) 表示线段每单位长度的平均伸长或缩短, 称为平均应变, 公式表示: $\epsilon_m = \Delta s / \Delta x$ 。

(2) 点沿 x 方向的线应变 (简称应变), 公式表示: $\varepsilon = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta s / \Delta x$ 。

(3) 点在 xy 平面内的切应变或角应变: 正交线段变形前后的角度变化, 用 γ 表示。

(4) 材料力学主要研究弹性范围内的小变形。

(5) 原始尺寸原理: 认为无论是变形或因变形引起的位移, 其大小都远小于构件的最小尺寸, 在列力平衡方程时, 仍用构件变形前的形状和尺寸。

1.1.6 杆件变形的的基本形式

(1) 材料力学主要研究长度远大于横截面尺寸的构件, 称为杆件, 简称为杆。杆是工程中最基本的构件。

(2) 杆件的轴线是杆件各横截面形心的连线。轴线为直线的杆称为直杆; 横截面大小和形状不变的直杆称为等直杆; 横截面沿轴线变化的杆称为变截面杆; 轴线为曲线的杆称为曲杆。

(3) 杆件变形的的基本形式有以下四种:

1) 拉伸或压缩 由大小相等、方向相反、作用线与杆件轴线重合的一对外力引起, 表现为杆件长度的改变 (伸长或缩短)。

2) 剪切 由一对相距很近的大小相同、指向相反、作用线相互平行的横向外力引起, 表现为受剪杆件的两部分沿外力作用方向发生相对错动。

3) 扭转 由一对大小相同、转向相反、作用面垂直于杆轴线的两个力偶引起, 表现为杆件的任意两个横截面发生绕轴线的相对转动。

4) 弯曲 由在包含杆件轴线的纵向平面内, 作用垂直于杆件轴线的横向力, 或一对转向相反、大小相等的力偶引起, 表现为杆件轴线由直线变为曲线。

(4) 组合变形: 杆件同时发生两种或两种以上的的基本变形。

1.2 难点与重点

(1) 利用截面法计算内力

其具体步骤如下:

1) 截开 在所求内力的截面处, 假想地用截面将杆件一分为二;

2) 弃代 任取一部分, 其弃去部分对留下部分的作用, 用作用在截面上相应的内力 (力或力偶) 代替;

3) 平衡 对留下的部分建立平衡方程, 根据其上的已知外力来计算杆在截面上的未知内力, 该内力一般为向截面上一点简化后得到的主矢和主矩。

(2) 应变计算

根据杆件或结构变形, 计算线应变或角应变。

(3) 杆件变形形式判断

根据杆件或结构受力情况, 判断杆件变形属于哪些基本变形。

1.3 例题解析

例 1-1 试求如图 1-1 所示结构中 1—1 和 2—2 两截面上的内力。

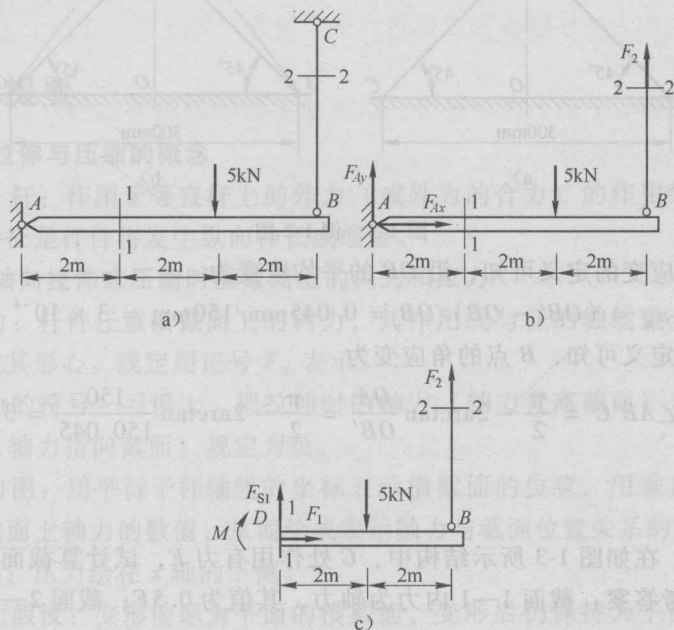


图 1-1 例 1-1 图

解：(1) 计算 2—2 截面内力。应用截面法，对图 1-1a 取截面 2—2 以下部分为研究对象，受力图如图 1-1b 所示，由平衡条件

$$\sum M_A = 0, F_2 \times 6\text{m} - 5\text{kN} \times 4\text{m} = 0$$

解得

$$F_2 = \frac{10}{3}\text{kN}$$

(2) 计算 1—1 截面内力。应用截面法，对图 1-1a 取截面 2—2 以下及 1—1 以右部分为研究对象，受力图如图 1-1c 所示，由平衡条件得

$$\sum M_D = 0, F_2 \times 4\text{m} - 5\text{kN} \times 2\text{m} - M = 0 \quad (1)$$

$$\sum F_x = 0, F_1 = 0 \quad (2)$$

$$\sum F_y = 0, F_{s1} + F_2 - 5\text{kN} = 0 \quad (3)$$

将 $F_2 = \frac{10}{3}\text{kN}$ 代入式 (1)、式 (3) 两式，解得

$$M = \frac{10}{3}\text{kN} \cdot \text{m}, F_{s1} = \frac{5}{3}\text{kN}, F_1 = 0$$

例 1-2 如图 1-2 所示的三角形薄板因受外力作用而变形，角点 B 垂直向上的位移为 0.045mm ，但 AB 和 BC 仍保持为直线。试求沿 OB 的平均应变，并求 AB 与 BC 两边在 B 点的角度改变。

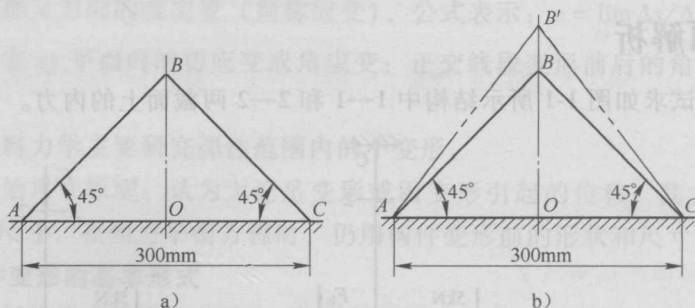


图 1-2 例 1-2 图

解：由线应变的定义可知，沿 OB 的平均应变为

$$\varepsilon_m = (OB' - OB) / OB = 0.045\text{mm} / 150\text{mm} = 3 \times 10^{-4}$$

由角应变定义可知， B 点的角应变为

$$\gamma = \frac{\pi}{2} - \angle AB'C = \frac{\pi}{2} - 2\arctan \frac{OA}{OB'} = \frac{\pi}{2} - 2\arctan \frac{150}{150.045} = 3 \times 10^{-4} \text{ rad}$$

1.4 习题

习题 1-1 在如图 1-3 所示结构中， C 处作用有力 F ，试计算截面 1—1 和 2—2 的内力。（参考答案：截面 1—1 内力为轴力，其值为 $0.5F$ ；截面 2—2 内力：轴力为 $-\sqrt{3}F/4$ ，剪力为 $-F/4$ ，弯矩为 $Fl/8$ ）

习题 1-2 如图 1-4 所示，圆形薄板的半径为 R ，变形后 R 的增量为 ΔR 。若 $R = 100\text{mm}$ ， $\Delta R = 0.003\text{mm}$ ，试求沿半径方向和外圆圆周方向的平均应变。（参考答案：沿半径方向的平均应变为 3×10^{-5} ；沿外圆圆周方向的平均应变为 3×10^{-5} ）

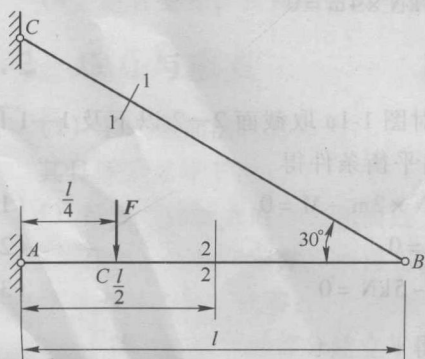


图 1-3 习题 1-1 图

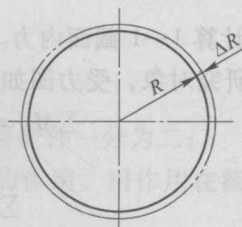


图 1-4 习题 1-2 图

第2章 拉伸、压缩与剪切

2.1 内容提要

2.1.1 轴向拉伸与压缩的概念

拉(压)杆: 作用于等直杆上的外力(或外力的合力)的作用线与杆件轴线重合; 变形特征是杆件将发生纵向伸长或缩短。

2.1.2 直杆轴向拉伸或压缩时横截面上的内力和应力

(1) 轴力: 杆件任意横截面上的内力, 其作用线与杆的轴线重合, 即垂直于横截面并通过其形心。规定用记号 F_N 表示。

(2) 轴力的符号: 习惯上, 把拉伸时的轴力(轴力背离截面)规定为正, 压缩时的轴力(轴力指向截面)规定为负。

(3) 轴力图: 用平行于杆轴线的坐标表示横截面的位置, 用垂直于杆轴线的坐标表示横截面上轴力的数值, 从而绘成表示轴力与截面位置关系的图线。拉力绘在 x 轴的上侧; 压力绘在 x 轴的下侧。

(4) 平面假设: 变形前原为平面的横截面, 变形后仍保持为平面且仍垂直于轴线。

(5) 直杆轴向拉伸或压缩时横截面上的正应力 σ 均匀分布, 计算公式: $\sigma = F_N/A$ 。

(6) 变截面杆的横截面上的正应力计算公式: $\sigma(x) = F_N(x)/A(x)$ 。

(7) 应力的符号: 一般规定拉应力为正, 压应力为负。

(8) 圣维南原理: 如果用与外力系静力等效的合力来代替原力系, 则除在原力系作用区域内有明显差别外, 在离外力作用区域略远处, 上述代替的影响就非常微小, 可以不计。

2.1.3 直杆轴向拉伸或压缩时斜截面上的应力

(1) 与横截面成 α 角的任意斜截面上的应力 p_α : $p_\alpha = F_\alpha/A_\alpha = \sigma \cos\alpha$ 。

(2) p_α 可分解成两个分量: 垂直于斜截面的正应力 σ_α 和相切于斜截面的切应力 τ_α 。其中, $\sigma_\alpha = p_\alpha \cos\alpha = \sigma \cos^2\alpha$, $\tau_\alpha = p_\alpha \sin\alpha = \sigma/2 \sin 2\alpha$ 。

(3) 角度 α 符号规定: 从横截面外向法线转至斜截面外向法线, 逆时针转向时, α 为正; 反之 α 为负。

(4) 正应力 σ_α 和切应力 τ_α 最大(小)值

1) 当 $\alpha=0$ 时, $\sigma_\alpha=\sigma$ 是 σ_α 中的最大值, 即通过拉杆内某点的横截面上的正应力, 是通过该点的所有不同方位截面上正应力中的最大值。

2) 当 $\alpha=45^\circ$ 时, $\tau_\alpha=\sigma/2$ 是 τ_α 中的最大值, 即与横截面成 45° 的斜截面上的

切应力, 是拉杆所有不同方位截面上切应力中的最大值。

3) 当 $\alpha = 90^\circ$ 时, $\sigma_\alpha = \tau_\alpha = 0$, 即在平行于杆件轴线的纵向截面上无任何应力。

2.1.4 材料拉伸时的力学性能

(1) 材料的力学性能也称为机械性质, 是指材料在外力作用下表现出的变形、破坏等方面的特性。

(2) 常温静载试验: 在室温下, 以缓慢平稳的加载方式进行试验, 是测定材料力学性能的基本试验。

(3) 拉伸图或 $F-\Delta l$ 曲线: 表示拉力 F 和试样标距伸长量 Δl 的关系的曲线。

(4) 应力-应变图或 $\sigma-\varepsilon$ 曲线: 以 σ 为纵坐标, ε 为横坐标, 所作的表示 σ 和 ε 的关系的图。该图可以消除试样尺寸的影响。

(5) 低碳钢拉伸试验的四个阶段

1) 弹性阶段: 试样变形是完全弹性的, 全部卸除载荷后, 试样将恢复原长。低碳钢在此阶段内, 其伸长量与载荷之间成正比, 即服从胡克定律。胡克定律表达式为 $\sigma = E\varepsilon$, 其中 E 为与材料有关的比例常数, 称为弹性模量。

2) 屈服阶段: 试样的伸长量急剧地增加, 而载荷读数在很小范围内波动。

屈服: 试样的载荷在很小的范围内波动, 而其变形量却不断增大的现象。

屈服阶段出现的变形, 是不可恢复的塑性变形。

滑移线: 试样经过抛光, 则在试样表面将可看到大约与轴线成 45° 方向的条纹, 是由材料沿试样的最大切应力面发生滑移而引起的。

3) 强化阶段: 试样经过屈服阶段后, 若要使其继续伸长, 由于材料在塑性变形过程中不断发生强化, 因而试样中的抗力不断增长。在强化阶段试样的变形主要是塑性变形, 其变形量要远大于弹性变形。此阶段可以较明显地观察到整个试样横向尺寸的缩小。

若在强化阶段内停止加载, 并逐渐卸除载荷, 则载荷与试样的伸长量之间遵循直线关系。

卸载规律: 卸载时载荷与伸长量之间遵循直线关系的规律。

在强化阶段中, 试样变形包括弹性变形和塑性变形两部分, 在卸载过程中, 弹性变形逐渐消失, 只留下塑性变形。

冷作硬化: 对试样预先施加轴向拉力, 使之达到强化阶段, 然后卸载, 则当再加载荷时, 试样在线弹性范围内所能承受的最大载荷将增大, 而试样所能经受的塑性变形量降低。

4) 局部变形阶段: 试样伸长到一定程度后, 载荷读数反而逐渐降低。此时可以看到试样某一段内的横截面积显著地收缩, 出现“缩颈”现象。在试样继续伸长的过程中, 由于“缩颈”相应横截面积急剧缩小, 因此载荷读数反而降低, 一直到试样被拉断。

(6) 几个重要极限

- 1) 比例极限：应力与应变成正比即符合胡克定律的最高限，以 σ_p 表示。
- 2) 弹性极限：卸载后不发生塑性变形的极限，以 σ_e 表示。
- 3) 屈服极限（屈服强度，下屈服强度）：在屈服阶段内，不计初始瞬时效应时的最低应力，以 σ_s 表示。

4) 强度极限（抗拉强度）：强化阶段最高点，即试样中的名义应力最大值，以 σ_b 表示。

(7) 几个概念

断后伸长率：代表试样拉断后的塑性变形程度，其值等于试样在工作段在拉断后标距的残余伸长 $(l_1 - l)$ 与原始标距 l 之比的百分率，即 $\delta = (l_1 - l) / l \times 100\%$ 。

断面收缩率：断裂后试样横截面面积的最大缩减量 $(A - A_1)$ 与原始横截面面积 A 之比的百分率，即 $\psi = (A - A_1) / A \times 100\%$ 。

δ 和 ψ 数值较高的材料，通常称为塑性材料； δ 值很小的材料，通常称为脆性材料。

(8) 其他金属材料在拉伸时的力学性能

对于其他金属材料 σ - ε 曲线并不都类似低碳钢具备四个阶段。

名义屈服极限或条件屈服极限：对于没有屈服阶段的塑性材料，对应塑性应变 0.2% 时的应力，并以 $\sigma_{0.2}$ 表示。

割线弹性模量：材料直到拉断时的变形都非常小，且没有屈服阶段、强化阶段和局部变形阶段，在工程计算中，通常取总应变为 0.1% 时 σ - ε 曲线的割线斜率来确定其弹性模量。

2.1.5 材料压缩时的力学性能

(1) 低碳钢在拉伸和压缩时的 σ - ε 曲线，在屈服阶段以前两曲线基本重合，两者的屈服极限和弹性模量基本相同。对于低碳钢，从拉伸试验的结果就可以了解其在压缩时的主要力学性能。

(2) 脆性材料的试样在压缩和拉伸时的力学性能有较大区别。

1) 铸铁材料在压缩时的强度极限和伸长率都较拉伸时大得多，因而宜用于受压构件；

2) 铸铁无论在拉伸或压缩时，其 σ - ε 曲线中直线部分均很短，只能认为近似地符合胡克定律。

(3) 两类材料在力学性能上的主要特征如下：

1) 塑性材料在断裂前变形较大，塑性指标（断后伸长率和断面收缩率）较高，抗拉能力较好，其常用的性能指标是屈服极限。

2) 脆性材料在断裂前的变形量较小，塑性指标较低，其强度指标是强度极限，而且其抗拉强度 σ_b 远低于抗压强度 σ_{bc} 。

(4) 材料不管是脆性的还是塑性的，其力学性能将随材料所处的温度、应变

速率和应力状态等条件的变化而不同。

2.1.6 失效、安全因数和强度计算

(1) 极限应力: 材料的两个强度指标 σ_s 和 σ_b 的统称, 用 σ_u 表示。

(2) 许用应力: 以大于 1 的因数除极限应力所得到的结果, 用 $[\sigma]$ 表示, 即

$$[\sigma] = \frac{\sigma_u}{n}$$

式中, n 是一个大于 1 的因数, 称为安全因数; 对于塑性材料, σ_u 采用 σ_s , n 采用 n_s ; 对于脆性材料, σ_u 采用 σ_b , n 采用 n_b 。

(3) 构件轴向拉伸或压缩时的强度条件: $\sigma = F_N/A \leq [\sigma]$ 。

(4) 强度条件应用: 强度校核、截面设计和确定许用载荷。

(5) 在工程问题中, 如果工作应力 σ 略高于 $[\sigma]$, 但超出的部分不足 $[\sigma]$ 的 5%, 一般还是允许的。

(6) 安全因数的选取: 目前在一般机械制造中, 在静载荷情况下, 对塑性材料, 可取 $n_s = 1.2 \sim 2.5$; 脆性材料, 取 $n_b = 2 \sim 3.5$ 。

2.1.7 杆件轴向拉伸或压缩时的变形

(1) 计算公式: $\Delta l = F_N l / EA$, 其中 EA 称为杆件的抗拉 (或抗压) 刚度。该公式适用于材料在线弹性范围内, 即满足胡克定律。

(2) 泊松比 μ : 当应力不超过比例极限时, 横向应变与轴向应变之比的绝对值称为横向变形因数或泊松比, 通常用 μ 表示, 即 $\mu = |\varepsilon' / \varepsilon|$ 。

2.1.8 轴向拉伸或压缩的应变能

(1) 应变能: 弹性固体在外力作用下, 因变形而储存的能量。

(2) 轴向拉伸或压缩的应变能计算: $V_\varepsilon = W = F \Delta l / 2 = F_N \Delta l / 2 = F^2 l / (2EA) = F_N^2 l / (2EA)$ 。

(3) 应变能密度: 单位体积内的应变能, 用 v_ε 表示, $v_\varepsilon = \sigma \varepsilon / 2 = \sigma^2 / (2E) = E \varepsilon^2 / 2$, 单位为 J/m^3 。

(4) 回弹模量: $v_{ep} = \sigma_p^2 / (2E)$, 可以度量线弹性范围内材料吸收能量的能力。

(5) 以上计算公式只适用于应力与应变呈线性关系的线弹性范围内。

2.1.9 拉伸、压缩的超静定问题

(1) 静定问题: 杆件的轴力可以用静力平衡条件求出, 这种情况称为静定问题。

(2) 超静定问题: 只凭静力平衡方程已不能解出全部未知力, 这种情况称为超静定问题。

(3) 超静定的次数: 未知力数超过独立平衡方程数的数目。

(4) 求解超静定问题的步骤: ①确定超静定次数, 列静力平衡方程; ②根据变形协调条件列变形几何方程; ③将变形与力之间的关系 (胡克定律) 代入变形

几何方程得补充方程；④联立补充方程与静力平衡方程求解。

2.1.10 温度应力和装配应力

(1) 温度应力：由于温度变化会对超静定结构中的杆件引起内力，与之相对应的应力称为热应力或温度应力。

(2) 杆件温度变形计算： $\Delta l_T = \alpha_l \Delta T \cdot l$ ，其中 α_l 为材料的线胀系数，代表温度每变化 1K 材料长度的变化率。

(3) 装配应力：由于存在加工误差，在装配后对超静定结构中的杆件引起的应力，称为装配应力。

2.1.11 应力集中的概念

(1) 应力集中：由于杆件截面骤然变化（或几何外形局部不规则）而引起的局部应力骤增现象。

(2) 理论应力集中因数：反映应力集中的程度，以杆件外形局部不规则处的最大局部应力 $\sigma_{\max}$ 与该截面上的平均应力 σ 的比值来表示，即 $K = \sigma_{\max} / \sigma$ ，称为理论应力集中因数。

(3) 实验结果表明：截面尺寸改变得越急剧、角越尖、孔越小，应力集中的程度就越严重。

2.1.12 剪切和挤压的实用计算

(1) 切应力计算： $\tau = F_s / A$ 。

(2) 剪切强度条件： $\tau = F_s / A \leq [\tau]$ 。

(3) 挤压应力计算： $\sigma_{bs} = F / A_{bs}$ 。

(4) 挤压强度条件： $\sigma_{bs} = F / A_{bs} \leq [\sigma_{bs}]$ 。

(5) 挤压面积 A_{bs} 计算：当接触面为圆柱面时， A_{bs} 为实际接触面在直径平面上的投影面积；当接触面为平面时， A_{bs} 为实际接触面面积。

2.2 难点与重点

(1) 轴力图绘制

前面已经提到，轴力图是指用平行于杆轴线的坐标表示横截面的位置，用垂直于杆轴线的坐标表示横截面上轴力的数值，从而绘成表示轴力与截面位置关系的图线。拉力绘在 x 轴的上侧；压力绘在 x 轴的下侧。

绘制轴力图的步骤：①用截面法求各段的轴力；②按段绘制图线。

绘制轴力图的注意事项：①求轴力时一定要先假设轴力为正；②一般先求支座反力，具体可以根据实际情况进行。

(2) 强度条件的应用

构件轴向拉伸或压缩时的强度条件为 $\sigma = F_N / A \leq [\sigma]$ ，该强度条件有以下三方面的应用：

1) 强度校核 在已知拉（压）杆的材料、尺寸及所受载荷的情况下，检验构

件能否满足上述强度条件,即根据强度条件判断构件是否满足强度要求。

2) 截面设计 已知拉(压)杆所受载荷及所用材料,按强度条件选择或设计杆件的截面面积或尺寸。可以把强度条件 $\sigma = F_N/A \leq [\sigma]$ 转换形式为 $A \geq F_N/[\sigma]$, 依此进行截面设计。

3) 确定许用载荷 已知拉(压)杆的材料和尺寸,按强度条件来确定杆所能允许的最大轴力,从而算出其允许承受的载荷。可以把强度条件 $\sigma = F_N/A \leq [\sigma]$ 转换形式为 $F_N \leq [\sigma]A$, 依此确定最大许用载荷为 $[F_N] = [\sigma]A$ 。

(3) 杆件轴向拉伸或压缩时的变形计算

1) 等直杆轴向拉伸或压缩变形计算: 根据公式 $\Delta l = F_N l / (EA)$ 计算;

2) 阶梯轴轴向拉伸或压缩变形计算: 根据公式 $\Delta l = \sum_{i=1}^n F_{Ni} l_i / (EA_i)$ 计算;

3) 变截面轴轴向拉伸或压缩变形计算: 根据公式 $\Delta l = \int_l F_N(x) / [EA(x)] dx$ 计算。

(4) 小变形放大图绘制及点位移计算

小变形放大图绘制包括两个方面: ①由于变形小, 因此用垂直直线段来代替弧线段; ②按比例将图形放大绘制。

点位移的计算可以采用图解法和解析法。

(5) 拉伸、压缩的超静定问题计算

求解超静定问题的一般步骤如下: ①确定超静定次数, 列出静力平衡方程; ②根据变形协调条件列出变形几何方程; ③将变形与力之间的关系(胡克定律)代入变形几何方程得到补充方程; ④联立补充方程与静力平衡方程进行求解。

求解超静定问题的关键是“根据变形协调条件列变形几何方程”。

(6) 剪切的实用计算

首先是利用公式 $\tau = F_s / A$ 计算切应力, 然后根据剪切强度条件 $\tau = F_s / A \leq [\tau]$ 对构件进行剪切强度校核。剪切的实用计算的关键是剪力 F_s 和剪切面积 A 的计算, 特别是要会确定剪切面。

(7) 挤压的实用计算

首先是利用公式 $\sigma_{bs} = F / A_{bs}$ 计算挤压应力, 然后根据挤压强度条件 $\sigma_{bs} = F / A_{bs} \leq [\sigma_{bs}]$ 对构件进行挤压强度校核。挤压的实用计算的关键是挤压面面积 A_{bs} 的计算, 特别是确定挤压接触面的形状, 然后再按照如下规则计算挤压面面积 A_{bs} : 当接触面为圆柱面时, A_{bs} 为实际接触面在直径平面上的投影面积; 当接触面为平面时, A_{bs} 为实际接触面面积。

2.3 例题解析

例 2-1 一木柱受力如图 2-1a 所示, 柱的横截面是直径为 30cm 的圆, 材料服

从胡克定律, 其弹性模量 $E = 20\text{GPa}$, 如果不计柱的自重, 试求: (1) 作轴力图; (2) 各段柱横截面上的应力; (3) 各段柱的纵向线应变; (4) 柱的总变形。

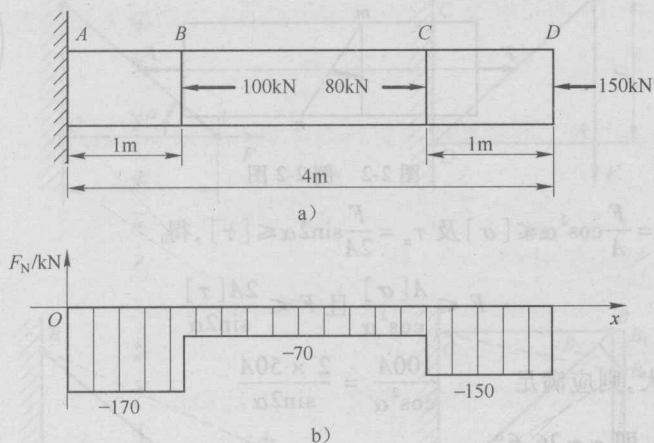


图 2-1 例 2-1 图

解: (1) 轴力图如图 2-1b 所示。

$$(2) \text{ AB 段应力: } \sigma_{AB} = \frac{F_{NAB}}{A_{AB}} = \frac{-170 \times 10^3 \text{ N}}{\frac{\pi \times (0.3 \text{ m})^2}{4}} = -2.40 \times 10^6 \text{ Pa} = -2.40 \text{ MPa}$$

$$\text{BC 段应力: } \sigma_{BC} = \frac{F_{NBC}}{A_{BC}} = \frac{-70 \times 10^3 \text{ N}}{\frac{\pi \times (0.3 \text{ m})^2}{4}} = -0.99 \times 10^6 \text{ Pa} = -0.99 \text{ MPa}$$

$$\text{CD 段应力: } \sigma_{CD} = \frac{F_{NCD}}{A_{CD}} = \frac{-150 \times 10^3 \text{ N}}{\frac{\pi \times (0.3 \text{ m})^2}{4}} = -2.12 \times 10^6 \text{ Pa} = -2.12 \text{ MPa}$$

$$(3) \text{ AB 段线应变: } \varepsilon_{AB} = \frac{\sigma_{AB}}{E} = \frac{-2.40 \text{ MPa}}{20 \times 10^3 \text{ MPa}} = -1.2 \times 10^{-4}$$

$$\text{BC 段线应变: } \varepsilon_{BC} = \frac{\sigma_{BC}}{E} = \frac{-0.99 \text{ MPa}}{20 \times 10^3 \text{ MPa}} = -4.95 \times 10^{-5}$$

$$\text{CD 段线应变: } \varepsilon_{CD} = \frac{\sigma_{CD}}{E} = \frac{-2.12 \text{ MPa}}{20 \times 10^3 \text{ MPa}} = -1.06 \times 10^{-4}$$

(4) 柱的总变形为

$$\begin{aligned} \Delta_{AD} &= \Delta_{AB} + \Delta_{BC} + \Delta_{CD} = \varepsilon_{AB} l_{AB} + \varepsilon_{BC} l_{BC} + \varepsilon_{CD} l_{CD} \\ &= -1.2 \times 10^{-4} \times 1 \text{ m} - 4.95 \times 10^{-5} \times 2 \text{ m} - 1.06 \times 10^{-4} \times 1 \text{ m} \\ &= -3.25 \times 10^{-4} \text{ m} \end{aligned}$$

例 2-2 图 2-2 所示拉杆沿斜截面 $m-n$ 由两部分胶合而成, 设在胶合面上许用拉应力 $[\sigma] = 100\text{MPa}$, 许用切应力 $[\tau] = 50\text{MPa}$ 。并设胶合面的强度控制杆件的拉

力, 试问: 为使杆件承受最大拉力 F , α 角的值应为多少? 若横截面面积为 4cm^2 , 并规定 $\alpha \leq 60^\circ$, 试确定许用载荷 $[F]$ 。

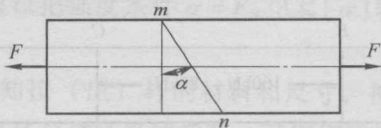


图 2-2 例 2-2 图

解: 由 $\sigma_\alpha = \frac{F}{A} \cos^2 \alpha \leq [\sigma]$ 及 $\tau_\alpha = \frac{F}{2A} \sin 2\alpha \leq [\tau]$, 得

$$F \leq \frac{A[\sigma]}{\cos^2 \alpha} \text{ 且 } F \leq \frac{2A[\tau]}{\sin 2\alpha}$$

所以为使 F 最大, 则应满足 $\frac{100A}{\cos^2 \alpha} = \frac{2 \times 50A}{\sin 2\alpha}$

解得 $\tan \alpha = 1/2$, 即 $\alpha = 26.6^\circ$ 。

当 $\alpha = 60^\circ$ 且 $A = 4\text{cm}^2$ 时, 有

$$F \leq \frac{4 \times 10^{-4} \times 100 \times 10^6}{\cos^2 60^\circ} \text{N} = 160 \times 10^3 \text{N} = 160 \text{kN}$$

$$F \leq \frac{2 \times 4 \times 10^{-4} \times 50 \times 10^6}{\sin 120^\circ} \text{N} = 46.2 \times 10^3 \text{N} = 46.2 \text{kN}$$

所以 $[F] = 46.2 \text{kN}$ 。

例 2-3 求图 2-3 所示各简单结构中节点 A 的位移, 设各杆的抗拉(压)刚度均为 EA 。

解: (1) AB 杆内力为零, AC 杆内力为 F , 则

AB 杆变形: $\Delta l_{AB} = 0$

AC 杆变形: $\Delta l_{AC} = \frac{FL}{EA}$

A 点位移如图 2-3c 所示, A_1 点为 A 点的最终位置。

其中 $|AA_2| = \Delta l_{AC}$, A 点的位移为

$$\Delta A = |AA_1| = \frac{\Delta l_{AC}}{\sin \alpha} = \frac{FL}{EA \sin \alpha}$$

(2) AD 杆内力为零, 所以

$$F_{NAB} = F_{NBC} = F, F_{NBD} = -\sqrt{2}F$$

$$\Delta l_{AB} = \Delta l_{BC} = \frac{FL}{EA}, \Delta l_{BD} = \frac{-\sqrt{2}F \times \sqrt{2}L}{EA} = \frac{-2FL}{EA}$$

B 点和 A 点的位移如图 2-3d 所示, 点 B_3 和点 A_3 分别为 B 点和 A 点的最终位置, 则由图可知, A 点的位移 $\Delta A = |AA_3| = |B_1B_3| + |A_1A_2|$, 其中

$$|A_1A_2| = \Delta l_{AB} = \frac{FL}{EA}$$