金榜图书
JINBANG BOOKS · SINCE 1997

全国十二大考研辅导机构指定用书

2015 李永乐·王式安考研数学系列

考研数学复习全书

数学二

基础篇

专为大三提前复习、在职考研和基础薄弱者编著

主编 李永乐 王式安
编委 王式安 刘喜波 李永乐 武忠祥 胡金德 蔡燧林
（按姓氏笔划排序）

金榜图书官方微博：http://weibo.com/51906740

国家行政学院出版社

金榜图书
JINBANG BOOKS · SINCE 1997

全国十二大考研辅导机构指定用书

2015 李永乐·王式安考研数学系列

考研数学复习全书

数学二

基础篇

主编 李永乐 王式安

编委 王式安 刘喜波 李永乐 武忠祥 胡金德 蔡燧林

（按姓氏笔划排序）

国家行政学院出版社

图书在版编目(CIP)数据

考研数学复习全书. 基础篇. 数学二/李永乐，王式安主编. —北京：国家行政学院出版社，2013. 9

ISBN 978-7-5150-0830-1

Ⅰ. ①考… Ⅱ. ①李… ②王… Ⅲ. ①高等数学—研究生—入学考试—自学参考资料 Ⅳ. ①O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2013)第 134601 号

敬告读者

本书封面粘有专用防伪标识，凡有防伪标识的为正版图书，敬请读者识别。

考研数学复习全书. 基础篇. 数学二

主　　编：李永乐　王式安
责任编辑：姚敏华
装帧设计：金榜图文设计室
出版发行：国家行政学院出版社
　　　　　(北京市海淀区长春桥路 6 号 100089)
电　　话：(010)68920640　68929037
编 辑 部：(010)68928761　68929009
印　　刷：保定市中画美凯印刷有限公司
开　　本：787mm×1092mm　1/16
印　　张：9.75
字　　数：231 千字
版　　次：2013 年 10 月第 1 版
印　　次：2013 年 10 月第 1 次印刷
书　　号：ISBN 978-7-5150-0830-1
定　　价：29.80 元

图书如有印装质量问题，请与印刷厂联系调换　　电话：(010)51906740

前言

《考研数学复习全书·基础篇(数学二)》是专门针对硕士研究生入学考试的大三提前复习、在职考研及基础薄弱考生而编写。整本书包含考研数学要求的基本知识架构，内容的阐述以初等数学水平为起点。希望通过对本书的学习，在较短时间内，厘清考研数学(包括高等数学、线性代数)的基本知识点，掌握入学考试所必需的基本概念、基本理论和基本计算方法，让数学基础薄弱甚至零基础的同学能有一个较大的提升和质的突破，实现"基础过关"。

本书为"李永乐·王式安考研数学系列"之一，由李永乐、王式安老师为主编的团队编写。基础篇旨在帮助基础薄弱的考生完成过渡阶段学习，编写方式上有以下特点：

一、突出实用知识

从作者团队多年的考研辅导经验来看，许多学生在开始复习时往往出现对基本知识点不明确的情况，所以，本书特意在开篇增加部分初等数学的介绍，而且在每章的开头就列出了考试大纲上的内容要点，这些都是考点，是必须掌握的。

二、结构层次分明

本书借鉴了多套经典教材编写的优点，整合考试内容，呈现给读者简明扼要的知识，独到的要点、方法归纳，以便于读者高效复习，形成完整的知识体系，从而为以后提高解题能力和数学思维水平奠定基础。

三、概念深入理解

整本书的核心目的是提升数学考试能力，任务就是解题。只有对基本概念深入理解，对基本定理和公式牢牢记住，才能找到解题的突破口和切入点。对所有重点、难点、考点，书中都相应的提供例题，这些例题有些就是过去的考题，有些是精心编制的。例题讲解做到基础解法给出详细步骤和计算过程，在学习过程中真正理解所学内容。

另外，为了更好地帮助同学们进行复习，"李永乐考研数学辅导团队"特在新浪微博上开设答疑专区，同学们在考研数学复习中，如若遇到任何问题，即可在线留言，团队老师将尽心为你解答。请访问 weibo. com@金榜图书官方微博。

由于编写时间的限制，书中难免存在些不足或纰漏，敬请读者批评指正。最后，祝同学们复习顺利，考研成功！

编者

目录

第一篇　高等数学

第二篇　线性代数

数学中转折点是笛卡儿的变数，有了变数，运动进入了数学，有了变数，辩证法进入了数学. 有了变数，微分和积分也就立刻成为必要的了.

恩格斯

第一篇　高等数学

第 0 章　预备知识

高等数学研究的基本对象就是定义在实数集上的函数. 函数就是变量与变量之间的联系关系. 函数的一些概念和基本常见函数在初等数学中就详细的学习过. 本章是复习一下初等数学中一些必要知识，主要是回顾一下集合、常见不等式，基本初等函数及其它重要函数的概念与性质，最后简单介绍极坐标系的有关内容.

第一节　集合、不等式

一、集合

1. 集合概念

集合是指具有某种特定性质的事物的总体，组成集合的事物称为集合的**元素**，通常用大写字母 A，B，C，… 表示集合. 用小写字母 a，b，c，d，… 表示集合的元素.

如果 a 是集合 A 的元素，记为 $a \in A$，读作 a 属于 A；如果 a 不是集合 A 的元素，记作 $a \notin A$，读作 a 不属于 A.

集合的表示可采用列举法或描述法. 列举法是把集合的全体元素一一列举出来，$A = \{a_1, a_2, \cdots, a_n\}$. 描述法是指若集合 M 是由具有某种性质 P 的元素 x 的全体所组成，则 M 可表示为 $M = \{x \mid x$ 具有性质 $P\}$. 例如圆心在原点的单位圆圆周上的点构成的集合表示为：$\{(x, y) \mid x, y$ 为实数, $x^2 + y^2 = 1\}$.

下面是高等数学中常用的几个数集和集合：

N 表示自然数构成的集合，称为**自然数集**. $N = \{0, 1, 2, \cdots, n, \cdots\}$.

在表示数集的字母的右上角标上“+”来表示该数集内排除 0 与负数的集.

N^+ 表示全体正整数构成的集合，$N^+ = \{1, 2, \cdots, n, \cdots\}$.

R 表示全体实数构成的集合，称为**实数集**.

Z 表示全体整数构成的集合，称为**整数集**.

$$Z=\{\cdots,-n,\cdots,-2,-1,0,1,2,\cdots,n,\cdots\}.$$

Q 表示全体有理数构成的集合，称为**有理数集**.

$$Q=\left\{\frac{p}{q}\middle| p\in Z,q\in N^+ \text{ 且 } p \text{ 与 } q \text{ 互质}\right\}.$$

邻域 $U(x_0,\delta)=\{x\mid |x-x_0|<\delta,\delta>0\}$.

去心邻域 $\mathring{U}(x_0,\delta)=\{x\mid 0<|x-x_0|<\delta,\delta>0\}$.

开区间(a,b),$(a,b)=\{x\mid a<x<b\}$.

闭区间$[a,b]$,$[a,b]=\{x\mid a\leqslant x\leqslant b\}$,

半开区间,$[a,b)=\{x\mid a\leqslant x<b\}$,$(a,b]=\{x\mid a<x\leqslant b\}$.

2. 集合的关系与运算

设 A,B 是两个集合,如果集合 A 的元素都是集合 B 的元素,则称 A 是 B 的**子集**,记作 $A\subset B$,读作 A 包含于 B.

若 A,B 互为子集,即 $A\subset B$ 且 $B\subset A$,则称集合 A 与集合 B **相等**,记作 $A=B$.

若 $A\subset B$ 且 $A\neq B$,则称 A 是 B 的**真子集**,记作 $A\subseteq B$.

不含任何元素的集合称为**空集**,记作 $\varnothing$,且规定空集是任何集合的子集.

A 与 B 的并集(简称**并**),记作 $A\cup B$,

$$A\cup B=\{x\mid x\in A \text{ 或 } x\in B\};$$

A 与 B 的交集(简称**交**),记作 $A\cap B$,

$$A\cap B=\{x\mid x\in A \text{ 且 } x\in B\};$$

A 与 B 的差集(简称**差**).记作 $A-B$,

$$A-B=\{x\mid x\in A \text{ 且 } x\notin B\},$$

A 的补集,记作 $\overline{A}$,

集合 A 是集合 I 的子集,则称 $I-A$ 为 A 的补集(或余集).

设 A、B、C 为三个任意的集合,则有

(1) 交换律 $A\cup B=B\cup A$,$A\cap B=B\cap A$;

(2) 结合律$(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C)$,

$(A\cap B)\cap C=A\cap(B\cap C)$;

(3) 分配律$(A\cup B)\cap C=(A\cap C)\cup(B\cap C)$,

$(A\cap B)\cup C=(A\cup C)\cap(B\cup C)$;

(4) 对偶律$\overline{A\cup B}=\overline{A}\cap\overline{B}$,$\overline{A\cap B}=\overline{A}\cup\overline{B}$.

二、常见不等式

(1) 绝对值不等式 $-|x|\leqslant x\leqslant|x|\Rightarrow 0\leqslant x+|x|\leqslant 2|x|$,$\forall x\in R$.

(2) 三角不等式 $|x+y|\leqslant|x|+|y|$,$||x|-|y||\leqslant|x-y|$,$\forall x,y\in R$.

(3) 平均值不等式$(x-y)^2\geqslant 0\Rightarrow x^2+y^2\geqslant 2xy$,$\forall x,y\in R$.

特别 $x,y\geqslant 0$,$\dfrac{x+y}{2}\geqslant\sqrt{xy}$.

$\dfrac{x+y}{2}$ 称为算术平均值,$\sqrt{xy}$ 称为几何平均值.可推广到 n 个实数.

(4)$\sin x\leqslant x\leqslant\tan x$,$x\in\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right)$等号仅在 $x=0$ 时成立.

(5)$m,n>0$,$k>0$.$m>n$,$\dfrac{n}{m}<\dfrac{n+k}{m+k}$.

不等式不能只记作公式,而要记作公式的变形,在适当时应用,如下三角不等式的应用:

$$|\sin(\alpha+\beta)+\cos(\alpha+\beta)| \leqslant |\sin(\alpha+\beta)|+|\cos(\alpha+\beta)|.$$

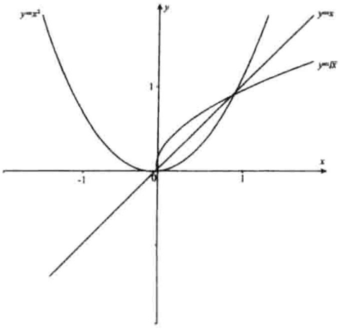
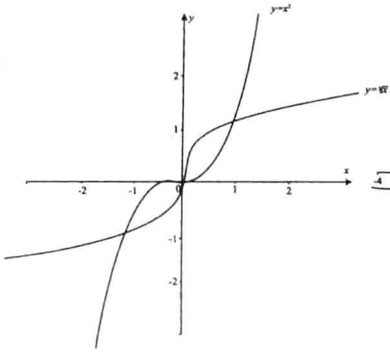
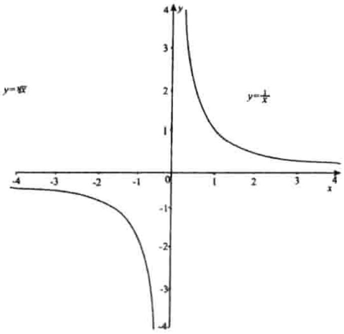
第二节　基本初等函数

一、常数函数

1. $y = C$,C 为常数.
2. 定义域$(-\infty, +\infty)$,值域$\{C\}$.
3. 性质:偶函数,有界,周期函数,不存在最小正周期.
4. 图像:直角坐标系上,平行于 x 坐标轴的一条直线.

二、幂函数

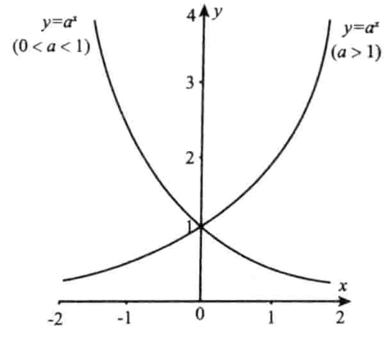
$y = x^\alpha$,$\alpha \in R$.

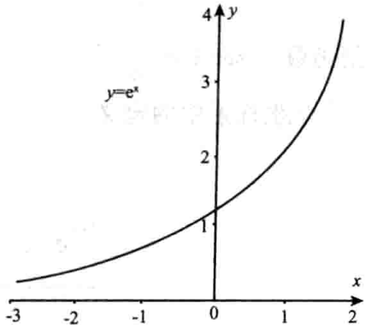




参数 α 的不同,函数的性质各不相同.$x > 0$ 时,不论 α 为何值都有定义.
图像经过(1,1) 点.

三、指数函数

$y = a^x(a > 0, a \neq 1)$.



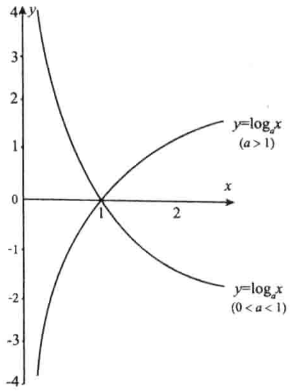


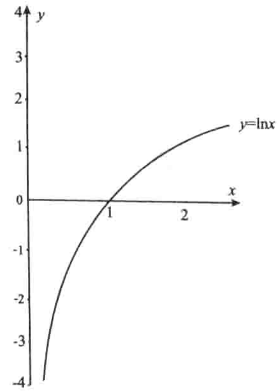
定义域为 R,值域为 $y > 0$.
图像经过(0,1) 点

自然指数函数 $y = e^x$
$\lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0$,$\lim\limits_{x\to+\infty} e^x = +\infty$.

四、对数函数

$y = \log_a x (a > 0, a \neq 1)$.





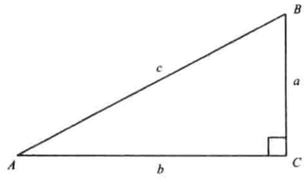
定义域为$(0, +\infty)$,值域为 R
图像经过$(1,0)$

自然对数函数 $y = \ln x$
$\lim\limits_{x\to 0^+}\ln x = -\infty$, $\lim\limits_{x\to +\infty}\ln x = +\infty$.

五、三角函数

1. 三角函数的定义

(1) 在直角三角形 ABC



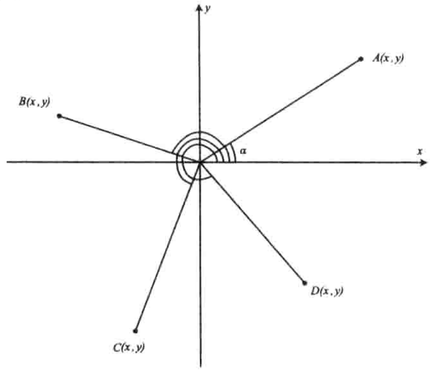
如下定义六个三角函数:

正弦函数 $\sin A = \dfrac{a}{c}$　　余弦函数 $\cos A = \dfrac{b}{c}$

正切函数 $\tan A = \dfrac{a}{b}$　　余切函数 $\cot A = \dfrac{b}{a}$

正割函数 $\sec A = \dfrac{c}{b}$　　余割函数 $\csc A = \dfrac{c}{a}$

(2) 直角坐标系中的定义



如下定义六个三角函数($r = \sqrt{x^2 + y^2}$)：

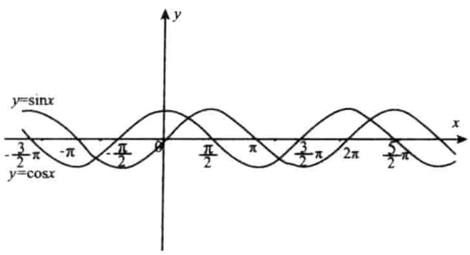
正弦函数　$\sin\alpha = \dfrac{y}{r}$　　余弦函数　$\cos\alpha = \dfrac{x}{r}$

正切函数　$\tan\alpha = \dfrac{y}{x}$　　余切函数　$\cot\alpha = \dfrac{x}{y}$

正割函数　$\sec\alpha = \dfrac{r}{x}$　　余割函数　$\csc\alpha = \dfrac{r}{y}$

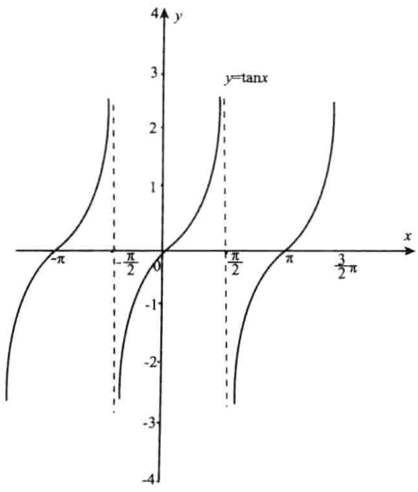
(3) 三角函数图像与性质

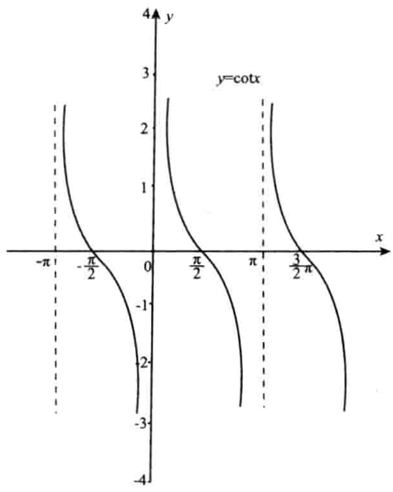
正、余弦函数



定义域为 R,值域为$[-1,1]$,周期为 2π. 正弦为奇函数,余弦为偶函数.

正、余切函数





定义域$\{x \mid x \in R$ 且 $x \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi, k \in Z\}$.

值域为 R.

周期为 π,奇函数,

关于点$\left(\dfrac{k}{2}\pi, 0\right)$对称,$k \in Z$.

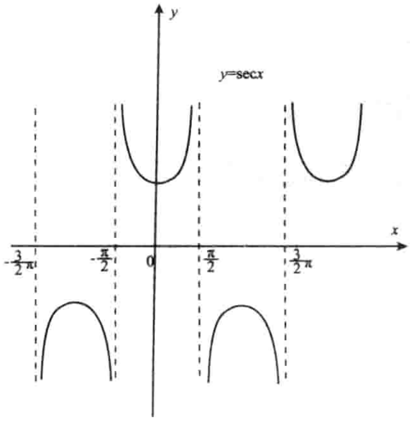
定义域$\{x \mid x \in R$ 且 $x \neq k\pi, k \in Z\}$.

值域为 R.

周期为 π,奇函数,

关于点$\left(\dfrac{k}{2}\pi, 0\right)$对称,$k \in Z$.

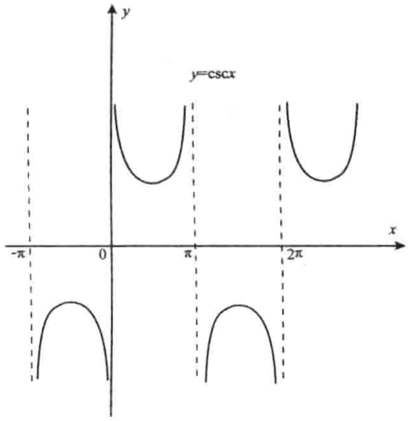
正、余割函数



定义域$\{x \mid x \neq \frac{\pi}{2}+k\pi, k \in Z\}$.

值域$\{y \mid y \leqslant -1$ 或 $y \geqslant 1\}$.

周期为2π,偶函数,渐近线$x=\frac{\pi}{2}+k\pi, k \in Z$.



定义域$\{x \mid x \neq k\pi, k \in Z\}$.

值域$\{y \mid y \leqslant -1$ 或 $y \geqslant 1\}$.

周期为2π,奇函数,渐近线$x=k\pi, k \in Z$.

2 转化关系

(1) 诱导公式

$\sin(-\alpha)=-\sin\alpha$

$\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\cos\alpha$

$\sin\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)=\cos\alpha$

$\sin(\pi-\alpha)=\sin\alpha$

$\sin(\pi+\alpha)=-\sin\alpha$

$\cos(-\alpha)=\cos\alpha$

$\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\sin\alpha$

$\cos\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)=-\sin\alpha$

$\cos(\pi-\alpha)=-\cos\alpha$

$\cos(\pi+\alpha)=-\cos\alpha$

(2) 倒数关系

$\sin\alpha \cdot \csc\alpha=1$

$\cos\alpha \cdot \sec\alpha=1$

$\tan\alpha \cdot \cot\alpha=1$

(3) 平方关系

$1+\tan^2\alpha=\sec^2\alpha$

$1+\cot^2\alpha=\csc^2\alpha$

$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$

(4) 两角和与差的三角函数

$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$

$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$

$\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta$

$\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta$

$$\tan(\alpha+\beta)=\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}$$

$$\tan(\alpha-\beta)=\frac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}$$

(5) 积化和差公式

$$\cos\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}[\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)]$$

$$\cos\alpha\sin\beta=\frac{1}{2}[\sin(\alpha+\beta)-\sin(\alpha-\beta)]$$

$$\sin\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}[\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)]$$

$$\sin\alpha\sin\beta=-\frac{1}{2}[\cos(\alpha+\beta)-\cos(\alpha-\beta)]$$

(6) 和差化积公式

$$\sin\alpha+\sin\beta=2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$$

$$\sin\alpha-\sin\beta=2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$$

$$\cos\alpha+\cos\beta=2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$$

$$\cos\alpha-\cos\beta=-2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$$

(7) 倍角公式

$$\cos2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha=2\cos^2\alpha-1=1-2\sin^2\alpha$$

$$\cos3\alpha=4\cos^3\alpha-3\cos\alpha$$

$$\sin2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha$$

$$\sin3\alpha=3\sin\alpha-4\sin^3\alpha$$

$$\tan2\alpha=\frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}$$

(8) 半角公式

$$\sin\frac{\alpha}{2}=\pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}}$$

$$\cos\frac{\alpha}{2}=\pm\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}}$$

$$\tan\frac{\alpha}{2}=\frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}=\frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha}$$

(9) 万能公式

$$\sin\alpha=\frac{2\tan\frac{\alpha}{2}}{1+\tan^2\frac{\alpha}{2}}$$

$$\cos\alpha=\frac{1-\tan^2\frac{\alpha}{2}}{1+\tan^2\frac{\alpha}{2}}$$

$$\tan\alpha=\frac{2\tan\frac{\alpha}{2}}{1-\tan^2\frac{\alpha}{2}}$$

(10) 其它公式

$a\sin\alpha + b\cos\alpha = \sqrt{a^2+b^2}\sin(\alpha+\theta)$,其中 $\theta = \arctan\dfrac{b}{a}$

$a\sin\alpha - b\cos\alpha = \sqrt{a^2+b^2}\cos(\alpha-\theta)$,其中 $\theta = \arctan\dfrac{b}{a}$

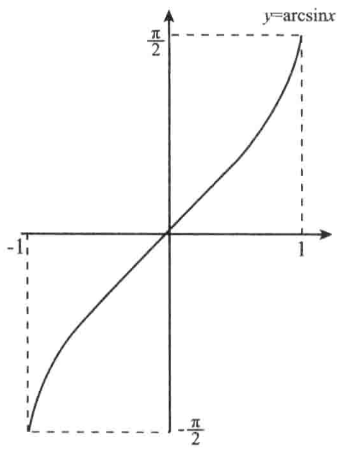
$1+\sin\alpha = \left(\sin\dfrac{\alpha}{2}+\cos\dfrac{\alpha}{2}\right)^2$

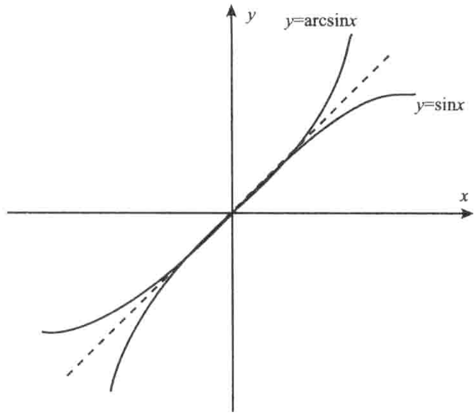
$1-\sin\alpha = \left(\sin\dfrac{\alpha}{2}-\cos\dfrac{\alpha}{2}\right)^2$

说明:三角函数公式多,记住几个常用的在今后的一些计算时会比较方便.

六、反三角函数

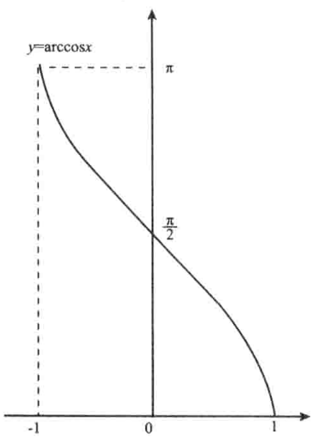
反正弦函数 $y = \arcsin x$

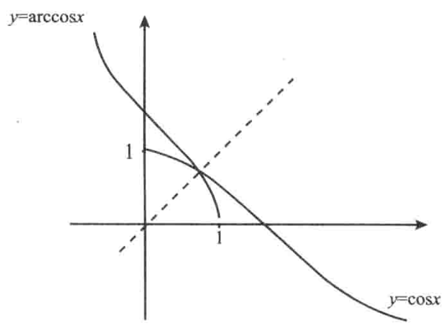




定义域$[-1,1]$,值域$[-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}]$,奇函数,在定义域上为增函数.

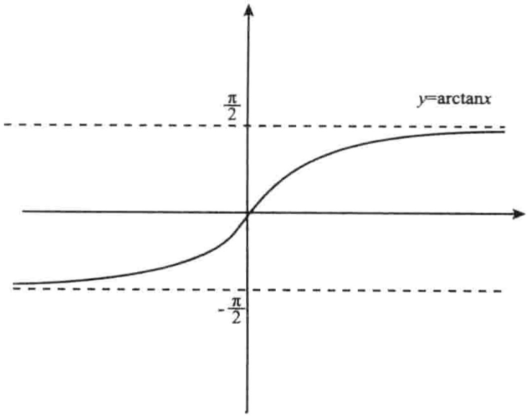
反余弦函数 $y = \arccos x$

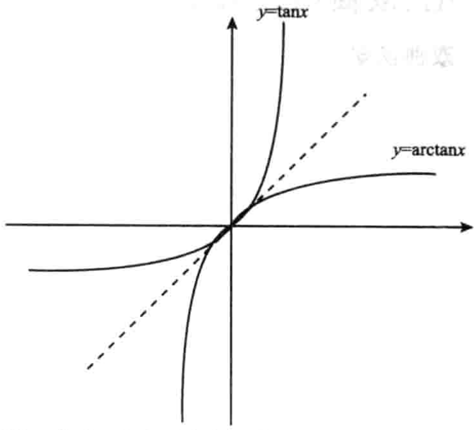




定义域$[-1,1]$,值域$[0,\pi]$,非奇非偶函数,在定义域上为减函数.

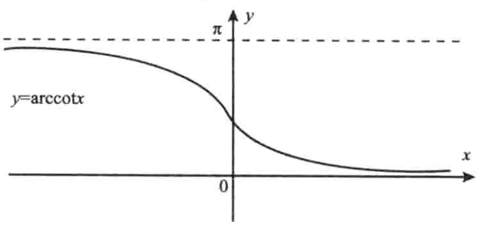
反正切函数　$y = \arctan x$

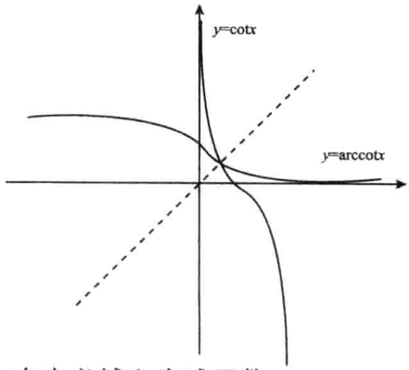




定义域$(-\infty, +\infty)$,值域$\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$,奇函偶数,定义域上为增函数.

反余切函数　$y = \operatorname{arccot} x$





定义域$(-\infty, +\infty)$,值域$(0,\pi)$,非奇非偶函数,在定义域上为减函数.

反三角函数表示三角函数主值区间上的角(含锐角的一个单调区间).
反三角函数的恒等式:

$\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}$

$\arctan x + \operatorname{arccot} x = \frac{\pi}{2}$

$\sin(\arcsin x) = x, x \in [-1,1]$

$\sin(\arccos x) = \sqrt{1-x^2}, x \in [-1,1]$

$\cos(\arccos x) = x, x \in [-1,1]$

$\cos(\arcsin x) = \sqrt{1-x^2}, x \in [-1,1]$

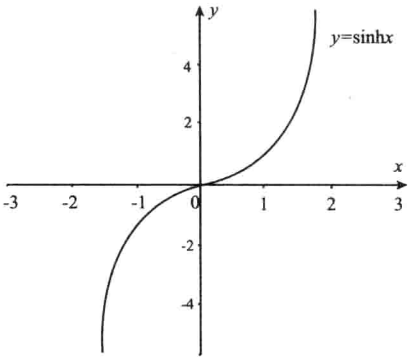
$\arcsin(\sin x) = x, x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$

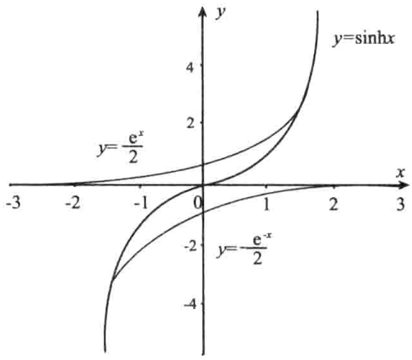
$\arccos(\cos x) = x, x \in [0,\pi]$

$\arccos(-x) = \pi - \arccos x$

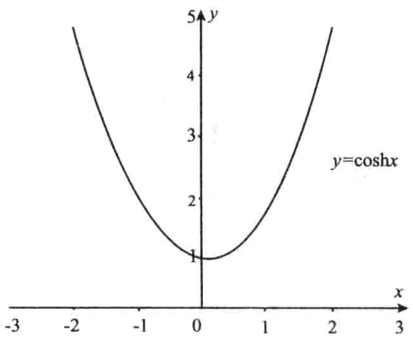
七、双曲函数与反双曲函数

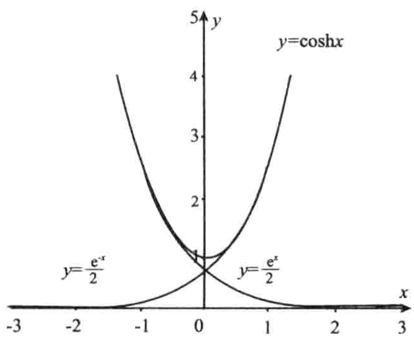
双曲函数





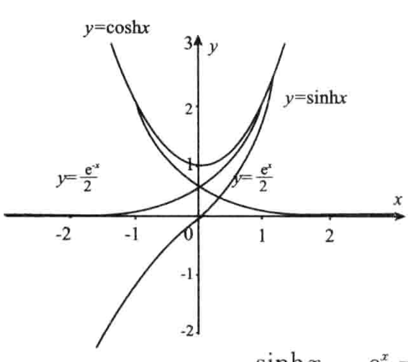
双曲正弦　$\sinh x=\dfrac{e^x-e^{-x}}{2}$,也记作 $\mathrm{sh}x$. 定义域为 R,值域为 R,严格单调增,奇函数.

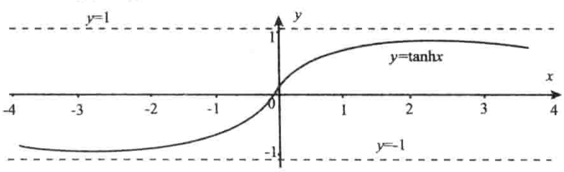




双曲余弦　$\cosh x=\dfrac{e^x+e^{-x}}{2}$,也记作 $\mathrm{ch}x$.

定义域为 R,值域为$[1,+\infty)$,最低点为$(0,1)$,偶函数.





双曲正切　$\tanh x=\dfrac{\sinh x}{\cosh x}=\dfrac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}$,也记作 $\mathrm{th}x$.

定义域为 R,值域为$(-1,1)$,严格单调增,奇函数.