京津特级教师升学指导精华

初中数学

天津科技翻译出版公司

初中数学

陈俊辉　主编

京津[illegible]指导精华

天津科技翻译出版公司

该丛书编委会由以下特级教师组成：

及树楠　　王树凯　　宁潜济
陈俊辉　　袁克群　　顾德希
邢永庆

津新登字:(90)010号

京津特级教师升学指导精华　　初中数学
主编:陈俊辉　　责编:张毓旨

天津科技翻译出版公司出版　　邮编 100192
新华书店北京发行所发行
河北省霸州市印刷厂印刷

787×1092　1/32　13.75 印张　300 千字
1993 年 9 月第一版　1994 年 7 月第二次印刷
印数:7001－25000 册
ISBN7－5433－0479－1/G・65　定价:8.30 元

前　言

《京津特级教师升学指导精华》丛书共分10册，有：初中数学、初中物理、初中化学、初中语文、初中英语、高中数学、高中物理、高中化学、高中语文、高中英语。各册均由北京和天津的特级教师主编，是一套高层次的中学生学习指导书籍。

该丛书各册不仅适于初中或高中毕业班使用，也适合各年级学生随课程参考使用。

该丛书的特点是：突出知识要点，使课本中的难点和疑点简明化、通俗化。该丛书的练习题全部选自1986—1993年各地中考和全国高考试题，所以能有效地帮助教师和学生把握住中考或高考的要求。

我们组织编写这套丛书的目的是：让全国的中学生都拥有特级教师，通过特级教师的点拨，从繁重的学习中解脱出来，以高分顺利地升入高中或大学。

北京朝阳教科所副研究员李宝忱先生为该丛书的出版做了大量的工作，在此表示感谢。

编者的话

为了帮助应届初中毕业生全面系统地学习和掌握中学数学课程，参加高中考试，我们根据国家教委颁布的现行教学大纲和人民教育出版社新修订的现行教材编写了这本指导书.

本书的编写尽量联系考生实际，突出重点，力求做到主次分明，详略得当，便于使用.

为了便于学生使用，全书分为代数、几何两部分，每部分又根据知识单元分为若干章. 每章都按学法指点、例题精析、中考试题选三个部分编写. 学法指点力图写出知识要点，对重点、难点予以说明和分析，并做学习方法的指导；例题精析力图写出重点基础知识如何掌握和应用，指出常见的错误和必须注意的事项，阐明常用的数学思想和方法，使学生在复习知识的过程中提高能力；最后选编了历年来各省市采用的有代表性的中考试题，供同学们练习使用.

为了把书写得更好，特地邀请了具有 30 多年丰富教学经验的冯士腾、苍敬华、许俊歧老师一起参加了编写工作.

限于我们的水平，如有不妥之处，欢迎各位指正.

陈俊辉

1993. 3. 20

目　　录

代　　数

几　　何

代数

第一章

有理数和整式运算

一、学法指点

1. 知识要点

(1)学好有理数的重要工具

①用字母表示数

②数轴

(2)有理数的有关概念

①相反数

②绝对值

③倒数

(3)有理数运算

(4)整式运算

①同底数幂的运算法则

②乘法公式

③整式加、减、乘、除、乘方运算法则

2. 学法指导

有理数一章中，概念多，法则多，数学符号也多.

为了更好地认识、理解有理数的有关概念和运算法则，首先要理解、掌握学好本章内容的两个工具：用字母表示数、数轴.

(1)用字母表示数、数轴

用字母表示数是中学代数区别算术的重要特点. 一方面是用字母表示运算律，如加法的交换律，$a+b=b+a$；结合律$(a+b)+c=a+(b+c)$等，另一方面是用字母表示数量，从而把量与量之间的数量关系表示出来，如距离＝速度×时间，可以表示为$s=v\cdot t$，这里的字母s、v、t分别表示距离、速度和时间三个量的数量. 对用字母表示数的理解，在本章中，每一个字母都表示任意有理数. 如字母a，由有理数的分类可知：有理数的三分法，即有理数包括正有理数、零和负有理数，所以，字母a可以表示正有理数、表示零，也可以表示负有理数，即$a>0$，$a=0$，$a<0$. 这是字母表示数的任意性. 这一点认识是十分重要的. 在某一个具体问题中，字母又可以表示某一具体的数或者某一范围内的数. 这是字母表示数的确定性. 随着数的范围的扩大，字母所表示的数也在扩大，将来字母a表示任意实数. 用字母表示数，可以把数或数量之间的关系简明地表示出来，便于记忆，便于研究，更重要的是把描述数量关系的个别情况，上升为揭示数量关系的一般规律.

数轴：规定了原点、正方向和单位长度的一条直线. 原点、正方向和单位长度是数轴的三要素，缺一不可.

数轴的作用是什么？解决这个问题，就必须搞清楚有理数与数轴之间的关系. 我们知道，每一个有理数都可以用数轴上

的一个点表示，反过来，数轴上每一个有理点也都可以用一个有理数来表示. 这里所说的有理点，不是数轴上的任意一点，因为数轴上的点除了有理点外，还有表示无理数的点. 数轴是数与形相结合的基础，它使直线上的点和有理数之间建立起对应关系，从而可以利用数轴上表示有理数的点的位置关系，研究有理数的有关概念和运算法则等. 借助于图形，可以把许多抽象的概念和数量关系直观地、形象地表示出来. 如：相反数、绝对值和倒数等概念都是从代数、几何两方面去定义的，更突出了数与形的关系. 在此基础上，进一步发展、研究了实数与数轴上的点的一一对应关系. 又建立了直角坐标系，把平面上的点与有序实数对之间确立了一一对应关系.

（2）重要概念的学习

下面就以相反数为例，从不同角度去分析概念，从而达到对概念的深刻理解.

从代数角度理解：数 a 与 $-a$ 叫做互为相反数. 也可以说，只有符号不同的两个数叫做互为相反数. 零的相反数是零.

从几何角度理解：在数轴上原点的两旁，离开原点的距离相等的两个点所表示的两个数称为互为相反数. 零的相反数是零. 如图 1-1 所示.

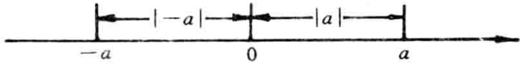

图 1-1

从绝对值角度理解：绝对值相等，而符号相反的两个数叫做互为相反数. 零的相反数是零.

从运算角度理解：有理数的加法法则中指出：互为相反数

的两个数的和等于零；反之，如果两个数的和等于零，那么这两个数是互为相反数. 有理数的减法法则是减去一个数等于加上这个数的相反数. 就是说，以相反数为转化条件，把减法转化为加法，实现了加减法的统一.

当数发展到字母表示的时候，“$-a$”中的“$-$”号就不再是数的性质符号了，它表示数 a 的相反数. 就是说，符号“$-$”的作用是表示一个数的相反数. 因为数的性质符号是表示数的属性的. 但是“$-a$”属于什么数的集合？显然是不能确定的. 要注意，字母 a 本身已经包含着性质符号了. 所以，把“$-a$”中的“$-$”号当成性质符号是错误的. 严格说，“$-a$”应该读作 a 的相反数. 当然，读作负 a 也不是不可以，但不管怎么读，“$-a$”都应理解为 a 的相反数.

定义中“互为”一词的含义是 a 是 $-a$ 的相反数，$-a$ 也是 a 的相反数，a 与 $-a$ 两者称为互为相反数. a 与 $-a$ 互为存在的条件，没有 a 也就无所谓 $-a$；没有 $-a$，也无所谓 a.

(3)有理数运算

有理数运算始终贯穿着“转化”思想. 减法通过相反数转化为加法；除法通过倒数转化为乘法；有理数运算通过绝对值转化为算术数的运算.

(4)整式运算

整式包括单项式和多项式. 整式运算有加法、减法、乘法、除法、乘方以及它们的混合运算. 整式运算就是要解决单项式、多项式在什么条件下可以运算，如果可以运算，如何确定运算结果.

整式运算的基础是单项式与单项式的运算. 整式的加减法运算中，以去括号法则为转化条件，最终转化为单项式与单

项式的加减法，又以同类项为转化条件，把关于式（单项式）的运算，转化为数（系数）的运算．因为合并同类项时，系数相加减，而字母和字母的指数都不变．整式乘法包括单项式乘单项式、单项式乘多项式、多项式乘多项式（包括乘法公式）．它们之间的内在联系，可用下图表示：

$$\boxed{\text{单项式}\times\text{单项式}} \xleftarrow[\text{（乘法分配律）}]{\text{转化}} \boxed{\text{单项式}\times\text{多项式}} \xleftarrow[\text{（乘法分配律）}]{\text{转化}} \boxed{\text{多项式}\times\text{多项式}}$$

从图中可以看到：多项式乘多项式以乘法分配律为转化条件转化为单项式乘多项式，再以乘法分配律为转化条件，把单项式乘多项式转化为单项式乘单项式．

除法是乘法的逆运算，除法也可以转化为乘法．整式乘法，其运算结果仍是整式，但整式除法，在整式范围内，除法不是总能实施的．

多项式除以单项式：$(am+bm+cm)\div m=am\div m+bm\div m+cm\div m$ （a、b、c、m 都表示单项式）．

两个多项式相除，尽管做法上仿照两个多位数除法的演算方法，用竖式进行演算，但确定商式的过程仍旧是转化为单项式除以单项式．

（5）乘法公式

乘法公式有：$(a+b)(a-b)=a^2-b^2$；

$$(a\pm b)^2=a^2\pm 2ab+b^2；$$

$$(a\pm b)^3=a^3\pm 3a^2b+3ab^2\pm b^3；$$

$$(a\pm b)(a^2\mp ab+b^2)=a^3\pm b^3.$$

公式中的字母，可以表示一个数或一个单项式或一个多项式．

乘法公式是应用十分广泛的一组公式.要求理解公式的推导过程,掌握公式结构的特点、公式的变形.要强化使用公式的意识.

①逆向变形

乘法公式⇆因式分解公式

即:$a^2-b^2=(a+b)(a-b)$

$a^2\pm 2ab+b^2=(a\pm b)^2$

$a^3\pm b^3=(a\pm b)(a^2\mp ab+b^2)$

$a^3\pm 3a^2b+3ab^2\pm b^3=(a\pm b)^3$

②互换变形

就是把公式经过字母或者字母的组合互换得到新的形式,即为互换变形.

对于一个公式,我们可以用方程的观点来观察问题、处理问题.实际上就是用变化的观点来处理固定的公式,从而由一个公式转化为几个公式.

如:公式$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$.

如果把$a+b$,ab看做为已知数,而a^2+b^2看作为未知数,那么公式变形为:

$$a^2+b^2=(a+b)^2-2ab.$$

如果把$a+b$,a^2+b^2看作为已知数,ab看作为未知数,那么公式变形为:

$$ab=\frac{1}{2}[(a+b)^2-(a^2+b^2)].$$

又如:公式$(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$,可以变形为:

$$a^3+b^3=(a+b)^3-3ab(a+b).$$

③引伸变形

笛卡尔曾说：我们解决的每一个问题都成为以后解决其他问题的规律. 意思是说，每学完一个公式，都要想一想，这公式还能不能推广呢？

如公式 $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$.

如果按指数进行推广，则有：

$$(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^3+b^3;$$

$$(a+b)^4=a^4+4a^3b+6a^2b^2+4ab^3+b^4;$$

$$\cdots\quad\cdots$$

如果按底数中所含字母进行推广，则有：

$$(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2ab+2ac+2bc;$$

$$(a+b+c+d)^2=a^2+b^2+c^2+d^2+2ab+2ac+2ad+2bc+2bd+2cd.$$

二、例题精析

例 1 化简下列各式：

(1) $|a-2|\,(a<2)$； (2) $|a-2|$；

(3) $|a+1|+|a-3|$.

分析 本题是化简绝对值问题. 由绝对值定义可知，化去绝对值的符号，要先确定绝对值符号内的代数式的值的符号，然后，按照代数式的值的符号化去绝对值符号. 如果题中给出代数式中所含字母的取值范围，则在给定的取值范围内，确定代数式的值的符号，化去绝对值符号；如果题中没有给出代数式中所含字母的取值范围，则化简的顺序为：

定分点 → 划分区间 → 边讨论边化去绝对值符号 → 合并同类项

解 (1) $\because\ a<2,\quad \therefore\ a-2<0,$

$\therefore \quad |a-2|=-(a-2)=-a+2.$

(2)令 $\quad a-2=0$，由此得 $\quad a=2.$

当 $a>2$ 时，原式 $=|a-2|=a-2$；

当 $a=2$ 时，原式 $=|a-2|=0$；

当 $a<2$ 时，原式 $=|a-2|=-(a-2)=-a+2.$

(3)令 $\quad a+1=0$，由此得 $\quad a=-1$；

$\quad a-3=0$，由此得 $\quad a=3.$

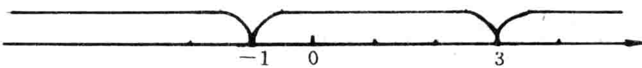

图 1-2

当 $a\geqslant 3$ 时，原式 $=a+1+a-3=2a-2$；

当 $-1<a<3$ 时，原式 $=a+1-(a-3)=4$；

当 $a\leqslant -1$ 时，原式 $=-(a+1)-(a-3)=-2a+2.$

说明 怎样定分点？令绝对值符号内的代数式的值等于零，求所含字母的值(就是方程的根)，所含字母的值就是分点. 划分区间时，各区间的元素要做到既不重复，也不遗漏.

例 2 k 是有理数，$|k|+k$ 能不能是负数，为什么？$|k|-k$ 呢？

分析 有理数的分类方法有两种.

$$\text{有理数}\begin{cases}\text{整数}\begin{cases}\text{正整数}\\\text{零}\\\text{负整数}\end{cases}\\\text{分数}\begin{cases}\text{正分数}\\\text{负分数}\end{cases}\end{cases}\;;\quad \text{有理数}\begin{cases}\text{正有理数}\\\text{零}\\\text{负有理数}\end{cases}$$

有理数的第二种分类方法，是按“正、负、零”来分类的，即

三分法.这种分类方法在讨论与研究问题时,是十分重要的.

解 $|k|+k$ 不能是负数,因为

当 $k>0$ 时,$|k|+k=k+k=2k>0$;

当 $k=0$ 时,$|k|+k=0$,不是负数;

当 $k<0$ 时,$|k|+k=-k+k=0$,也不是负数.

综上所述,无论 k 取任何有理数,$|k|+k$ 的值不会是负数.

同理:$|k|-k$ 也不是负数(请同学们自己完成).

例 3 已知 $a>0$, $ab<0$, $abc<0$,

化简:$|a-2b|-[-|-a|+(|2a+c|+|-3b|)-|c-b|]$

分析 由已知条件,可以得知什么?由 $a>0$, $ab<0$,可以推出 $b<0$;再由 $a>0$, $b<0$, $abc<0$,可以推出 $c>0$.所以,已知条件中,间接地给出了 $a>0$, $b<0$, $c>0$.以下就是根据绝对值定义化简绝对值.

解 $\because$ $a>0$, $ab<0$, $abc<0$,

$\therefore$ $a>0$, $b<0$, $c>0$.

又当 $a>0$, $b<0$ 时, $a-2b>0$,

$\therefore$ $|a-2b|=a-2b$;

当 $a>0$ 时,$|-a|=a$;

当 $a>0$, $c>0$ 时,$|2a+c|=2a+c$;

当 $b<0$ 时,$|-3b|=-3b$;

当 $c>0$, $b<0$ 时,$|c-b|=c-b$.

$\therefore$ 原式$=a-2b-[-a+(2a+c-3b)-(c-b)]$

$=a-2b-[-a+2a+c-3b-c+b]$

$=a-2b-a+2b$

$=0$

例 4　有理数 a、b 在数轴上的对应点的位置如图 1-3 所示：

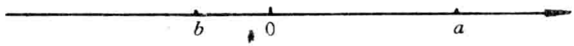

图 1-3

(1)在数轴上标出 $-a$，$-b$；

(2)决定下列各式的值的符号；

$2a$，$a+b$，$b-a$，$-a-b$；

(3)化简：$|-b|+|a|+|a+b|+|a-b|$.

分析　由有理数 a 与 b 在数轴上的点的位置，可以得到哪些条件. 通过此题，学会看图. 由图 1-3 可知：$a>0$，$b<0$；且 $|a|>|b|$；$a>b$. 以上三条是解题关键 .

解　(1)∵　$a>0$，$b<0$，

∴　$-a<0$，$-b>0$. 且 $|a|=|-a|$，$|-b|=|b|$.

因此，在数轴上表示 a 与 $-a$ 的两个点分别在原点的两侧，并且是关于原点对称的 .

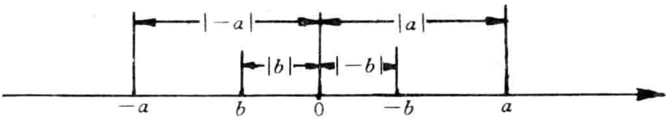

图 1-4

同理，在数轴上表示 b 与 $-b$ 的两个点分别在原点的两侧，并且是关于原点对称的 .

(2)∵　$a>0$，$2>0$，

∴　$2a>0$　　(同号二数相乘积为正)；

又∵ $a>0$, $b<0$, 且 $|a|>|b|$,

∴ $a+b>0$ （异号二数相加，取绝对值较大的加数的符号）；

∵ $b-a=b+(-a)$，由(1)得 $-a<0$,

∴ $b-a<0$ （两个负数相加和为负）

∵ $-a<0$, $-b>0$, 且 $|-a|>|-b|$,

∴ $-a-b=-a+(-b)=-(a+b)$.

而 $a+b>0$,

∴ $-(a+b)<0$, 即 $-a-b<0$.

(3)∵ $-b>0$, $a+b>0$, $a-b>0$,

∴原式 $=-b+a+a+b+a-b=3a-b$.

说明 由于有理数都可以理解为由性质符号和绝对值两部分构成的，所以，确定一个有理数就是确定一个数的性质符号和绝对值．已知点在数轴上的位置，如果已知点位于原点的左侧，则已知点所表示的数为负数；如果已知点位于原点的右侧，则已知点所表示的数为正数．再看已知点到原点的距离是单位长度的多少倍或几分之几．已知点到原点的距离就是绝对值．

例 5 （1）$a+b$ 一定大于 a 吗？为什么？

（2）$a-b$ 一定小于 a 吗？为什么？

分析 这道题实质上是有理数的大小比较问题．但是，比较的对象不是具体的有理数，而是代数式．如 $a+b$ 与 a；$a-b$ 与 a 等．这里介绍一种比较两个数的大小的一般方法，即求差比较法：要比较 a 与 b 的大小，可以通过求 a 与 b 的差的符号，确定 a 与 b 的大小．

即当 $a-b>0$ 时，则 $a>b$；