

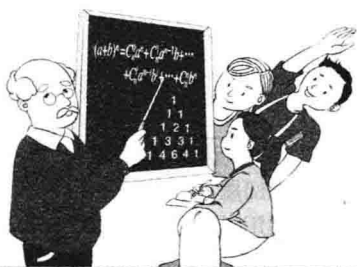
数林外传 系列
跟大学名师学中学数学

帮你学几何

第2版

◎ 臧龙光 编著

中国科学技术大学出版社



数林外传 系列
跟大学名师学中学数学

帮你学几何

第2版

◎ 臧龙光 编著

中国科学技术大学出版社

内 容 简 介

几何变化多,很有趣,也难学一些.这本书,选用概念、定义、公理、定理、证明、添线和推理方面的疑难问题,既重视讲清道理和思路,也重视指点方法和技巧,内容实用.特别是对添辅助线证题感到困难的同学,能从中得到许多帮助.

图书在版编目(CIP)数据

帮你学几何/臧龙光编著.—2版.—合肥:中国科学技术大学出版社,2014.1

ISBN 978-7-312-03342-1

I. 帮… II. 臧… III. 几何课—中学—教学参考资料
IV. G634.633

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2013)第 269736 号

中国科学技术大学出版社出版发行

安徽省合肥市金寨路 96 号,230026

<http://press.ustc.edu.cn>

合肥学苑印务有限公司印刷

全国新华书店经销

*

开本:880 mm×1230 mm 1/32 印张:4.375 字数:84 千
1985 年 6 月第 1 版 2014 年 1 月第 2 版 2014 年 1 月第 2 次印刷
定价:13.00 元

前 言

本书自 1985 年出版以来,受到中学生朋友的欢迎,被收入《少年百科丛书》. 1991 年台湾一家出版社以繁体字版本在台湾地区出版发行,被收入《青少年百科丛书》. 1993 年荣获第四届中国图书奖一等奖,并被中国发行业协会评为全国优秀畅销书. 1994 年荣获首届国家图书奖提名奖. 1995 年被收入由著名作家冰心任编委会主任的中国青少年发展基金会推出的大型丛书《希望书库》,用以捐赠我国边远地区的中小学校.

本书在成长过程中得到了中国科学院院士张景中教授的宝贵帮助,借这次再版的机会,我向他表示衷心的感谢.

臧龙光

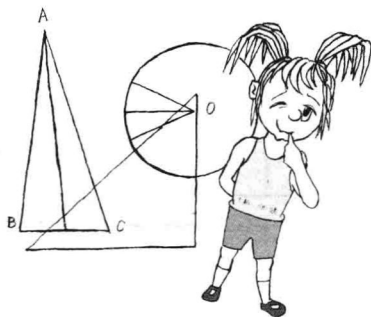
2013 年 3 月

目 次

前言	(i)
1 定理和公理	(1)
2 条件和结论	(8)
3 已知和求证	(11)
4 画图和证明	(14)
5 看图和想图	(17)
6 写法和根据	(24)
7 全等和相似	(27)
8 全等和判断	(32)
9 相似和条件	(36)
10 思路和方法	(40)
11 迁线和迁角	(44)
12 分析和添线	(51)
13 合理和合法	(57)
14 添线和添角	(61)
15 翻转和平移	(65)
16 横找和竖找	(71)

17	等量和代替	(75)
18	分开和并拢	(79)
19	面积和证题	(86)
20	三角和证题	(93)
21	共圆和证题	(96)
22	特殊和一般	(99)
23	特殊和定值	(103)
24	最大和最小	(106)
25	顺证和反证	(112)
26	归谬和穷举	(115)
27	唯一和同一	(119)
28	纯粹和完备	(123)
29	充分和必要	(126)
30	论证和依据	(129)

1 定理和公理



几何学研究物体的形状,是一门很古老的科学.

在漫长的年代里,人们对各种各样的物体形状积累了越来越多的经验,掌握了越来越多的计算公式和画图方法.

这些经验是不是万试万灵,永远可靠呢? 这些公式和方法是不是普遍准确,到处可用呢?

人们渐渐体会到:要进一步弄清楚其中的道理,才能说服自己,也才能说服别人.一旦把一个公式、一个方法的来龙去脉弄清楚了,用起来就放心了.

有些事实比较简单,大家容易观察和体验到,都深信不疑.有些事实就不那么明白,要说清楚其中的道理,才能使人信服.

矩形的面积等于长乘宽,大家容易相信.可是,三角形的面积等于底乘高的一半,没有几何知识的人就很难相信,如图 1.1 所示.

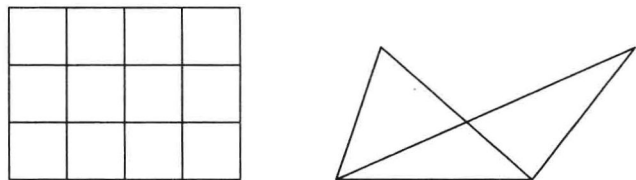


图 1.1

要是把一个三角形分成两个直角三角形,再用两个同它们一样大的直角三角形拼成一个矩形,这样大家就会相信三角形的面积,是底乘高的一半了,如图 1.2 所示.

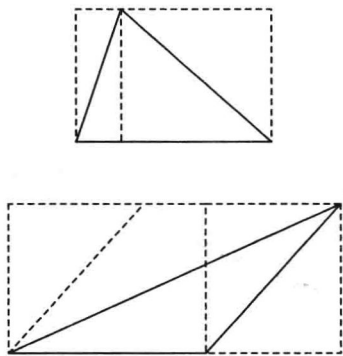


图 1.2

从一些基本的概念和规律出发,用推理的方法,来获得一些令人毫不怀疑的论断,这就是证明.经过证明了的论断,叫做定理.

如图 1.3 所示,初学几何的同学,一看图,往往觉得那

些是明摆着的事,像两条直线相交,所成的对顶角相等,不用证明也可以叫做定理.

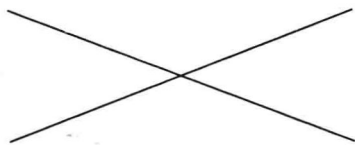


图 1.3

这样是不行的.一个很重要的原因,是看的不可靠,眼睛会上当受骗.

如图 1.4 所示,这两条线段,看起来一长一短,其实它们是一样长的.

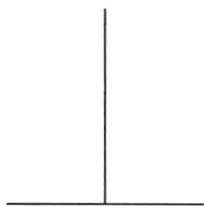


图 1.4

如图 1.5 所示,这两条直线都和一条直线垂直,直线无头,平行不平行,是没有法子看到的.

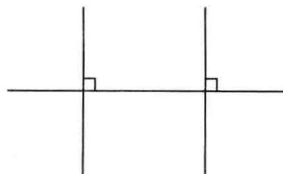


图 1.5

如图 1.6 所示,这个三角形,眼力再好的人,也看不出它的内角和是 180° ,一点不多,一点不少.

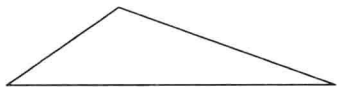


图 1.6

可见,单凭看,可能看错,可能看不到,也可能看不出.和看一样,量一量,试一试,也不能用来代替证明.

不信,你不妨随手画几个三角形,然后用量角器,把它们的内角和分别量出来.那结果,不会都正好是 180° .因为画图 and 量角都不可能做到绝对精确.

同样的道理,你把一个三角形的三个内角剪开,也很难恰好拼成一个 180° 的平角,如图 1.7 所示.

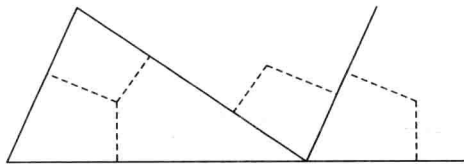


图 1.7

退一步说,就算你每次量出来的是 180° ,或者每次拼出来的是平角,也不能说这个论断被证明了.因为你量的和试的是有限个,而各种各样的三角形有无限个,是量不完,也拼不完的.你量过和试过的是这样,并不能保证没有量过和试过的也是这样!

老师讲三角形内角和定理的时候,不是也只画了一个三角形吗?

对. 三角形虽然只画了一个, 因为是证明, 就跟量和试不同了. 证明是利用一个图, 来说清楚一个道理. 这个道理, 不只对这个三角形对, 而且对所有的三角形都对. 从这个意义来说, 证明并不需要图, 或者说, 真正严格的证明, 是可以不画图的!

那公理为什么不用证明呢?

道理是这样: 后面的定理要用前面的定理证, 前面的定理又要用更前面的定理证, 这样一步一步往前追, 最前面的定理又是根据什么来证明呢? 总得有个开头吧. 作为推理开始的几条基本规律, 叫做公理.

公理不是不用证明, 而是无法证明!

自古以来, 很多人都认为: 公理就是大家公认为正确的道理, 是人们经过相当长时间反复实践所确认的事实, 是不需要证明的自明之理.

仔细一想, 这种看法也不是完全没有漏洞.

比如说, 有多少人承认才算“公认”? 多少年实践才算“相当长”? 再说, 实践不外乎眼看、测量……刚刚不是说过, 眼看的不一定对, 测量的不一定精确吗? 而且, 实践多少次都是有限次, 刚刚不是说过, 从有限的经验, 是没法断定适用于无限的规律吗?

那到底什么才叫公理呢?

经过两千多年的讨论, 19、20 世纪的德国数学家希尔伯特, 提出了对公理的新看法. 他认为: 所谓公理, 就是一门数学, 是对自己所要研究的对象的最基本假定.

平面几何要研究平面上的点和直线,以及由它们构成的各式各样的图形.要问什么是点?什么是直线?用举例、描绘、形容,是怎样也没法严格说清楚的!怎么办?只有列出一串公理,符合这些公理的东西,就是我们要研究的点和直线;不符合的,对不起,就不是我们所说的点和直线.

要是有人把轮船在海洋上的航线说成直线,这样的两条直线就会交于两点,不合我们的公理,在我们的平面几何里,就不承认它是直线.

公理是不是正确,这不是数学要管的事,而且也管不了!数学的研究只告诉我们:要是这些公理适用于一些对象,那后面的定理也一定适用于这些对象;只要公理是经得起检验的,定理也一定经得起检验!

这个道理,有点像象棋里马走“日”字、象走“田”字,究竟对不对,研究象棋的人是无法回答的.他只能告诉你,在这些规定之下,怎样走才能取胜,怎样走就会吃亏.

既然无所谓正确不正确,是不是就可以随便拿来几条当作公理呢?

不是的.希尔伯特提出了对几何公理的三点要求:

(1) 相容性——公理不能自相矛盾.而且从公理出发进行推理,也不允许推出矛盾.

(2) 独立性——每一条公理,都不能从另外的几条推出来.要不是这样,这条公理就不必要了.

(3) 完备性——不能再增添新的公理.要是添加,必

然会破坏前面两条中的一条.

希尔伯特的看法,得到了大家的赞同.后来,人们又认为,对于许多门数学,完备性并不必要.至于独立性和相容性,证明很难.现在已经知道:我们学习的欧几里得几何的公理系统,是满足以上三条的;不过,先要假定我们的算术公理系统是协调的.这里面的道理,说来话长,就不多说了.

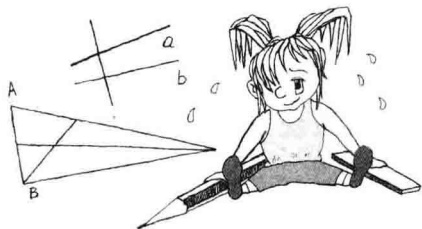
既然数学上只要求公理系统是相容的、独立的,有时还要求是完备的,是不是公理系统就有了很大的随意性呢?是的.同是欧几里得几何公理系统,也可以有所不同.两点之间,线段最短,在一些系统中可以是定理,而在另一些系统中又可以是公理.

要是有人说,我也可以编一套自己的几何公理,只要满足相容性、独立性和完备性,不是也算一门几何吗?单从数学上看,也可以承认.不过,要是你的公理不反映客观世界的规律,不符合人们的社会实践,你建立的几何中的定理,就没有任何用处,大家就不理你的几何,你的几何也就自生自灭了.这个道理,好像你可以发明各种下棋的规则,可是这种棋会不会为大家喜爱,却不是你能管得了的.社会实践,才是检验真理的唯一标准!

我们刚刚开始学习几何,只要弄明白公理是几何推理的基础,不必证明,而定理是要严格证明的,就可以了.

证明定理用什么为根据呢?那就是公理、定义和证明过的定理.

2 条件和结论



学几何,要懂点语文里的句法分析. 因为一个几何定理,也就是一句话. 不过,它不是随便的一句话,它有自己的特点.

比方说,这是三角形吗? 这也是一句话,叫疑问句. 定理不能是疑问句.

再比方说, $\triangle ABC$ 是直角三角形. 这不是疑问句了,这是简单陈述句,这也不能是定理. 定理往往不是简单的陈述句.

很多定理,是把两个、三个或者更多的简单陈述句,用“如果”、“那么”连起来,组成一个复合句子.

如果两条直线都和第三条直线垂直,那么这两条直线平行. 你一看就知道,这个定理说的是一桩事:“如果”后面

说的是条件；“那么”后面的话是结论。

这样的定理好懂。

有些定理可不是这样。它们虽然也用“如果”、“那么”这些词，可是条件并不全在“如果”的后面。

在等腰三角形中，如果一个角等于 60° ，那么这个等腰三角形是正三角形。这个定理有两个条件：一个是“如果”前面的“等腰三角形”；一个是“如果”后面的“一个角等于 60° ”。

这种情形是常见的。那些写在“如果”前面的基本假定，当然应该都是条件。

这样的定理也好理解。因为“那么”的后面，毕竟只有一个简单的句子，结论很清楚。

可是，也有这样的定理，“那么”后面不是简单的句子。

如果一个三角形的两边不等，那么大边所对的角也大。在“那么”后面的话，意思是甲边比乙边大，甲边对的角也较大，实质上又是一个复合句。

在理解这个定理时，可以把“大边”当成条件。也就是说，把“那么”后面的“大边”移到前面去，把它理解成：

如果在一个三角形中，甲边比乙边大，那么甲边对的角也较大。

这样一转换，结论就是一个简单的句子了。

这是一个窍门：把“那么”后面的句子，搞得尽可能简单，结论就显得单纯、明白了！

几何定理的叙述讲究简略，有的根本不用“如果”、“那

么”.对这样的定理,理解时,就要在脑子里给它添上“如果”、“那么”.

等腰三角形顶角的平分线也是底边的中垂线,可以改成:如果一条直线平分等腰三角形的顶角,那么这条直线垂直平分这个三角形的底边.

这样说,清楚是清楚了,总觉得语言不够简练.

又想简练,又想清楚,有什么办法呢?

办法是有的.那就是结合图形,用字母和符号代替语言,条件和结论就清楚了!

3 已知和求证



证明等腰三角形两腰上的高相等. 要是有同学这样画图, 如图 3.1 所示.

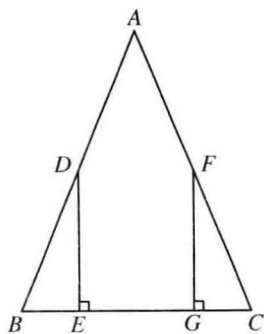


图 3.1

然后写:

已知: $\triangle ABC$ 中, $AB = AC$.

求证: 两腰上的高 DE 和 FG 相等.