重庆市高职高专规划教材

应用高等数学系列

■总主编 曾乐辉

■总主审 龙 辉

应用高等数学（下册）

YINGYONG GAODENG SHUXUE

工科类

主 编■徐江涛 郭 思

副主编■赵战兴 韩乐文 杨 威

重庆大学出版社

http://www.cqup.com.cn

重庆市高职高专规划教材
应用高等数学系列

■总主编 曾乐辉
■总主审 龙 辉

应用高等数学（下册）

GAODENG SHUXUE
YINGYONG

工科类

主 编■徐江涛 郭 思
副主编■赵战兴 韩乐文 杨 威

重庆大学出版社

内容提要

本书根据教育部制定的《高职高专教育专业人才培养目标及规格》和《高职高专教育高等数学课程教学基本要求》的精神，贯彻“以应用为目的，以必需、够用为度”的原则编写而成. 本书分上、下两册，全书共11 章. 上册内容包括函数、极限与连续、导数与微分、导数的应用、不定积分、定积分；下册内容包括常微分方程与拉普拉斯变换、级数、线性代数、概率与数理统计、MATLAB 软件在高等数学中的应用. 每节均有一定量的随堂练习，同时出版有与之配套的习题册（上、下册），以供学习者巩固所学知识.

本书可供三年制高职高专工科类各专业教学使用，也可供高职专科层次的各类成人教育选用，同时也可作为“专升本”教材或参考书.

图书在版编目（CIP）数据

应用高等数学：工科类. 下册/徐江涛，郭思主编. —重庆：重庆大学出版社，2012. 7
重庆市高职高专规划教材. 应用高等数学系列
ISBN 978-7-5624-6659-8

Ⅰ. ①应… Ⅱ. ①郭…②徐… Ⅲ. ①高等数学—高等职业教育—教材 Ⅳ. ①O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2011）第 072869 号

重庆市高职高专规划教材
应用高等数学系列
应用高等数学（工科类）（下册）
主　编　徐江涛　郭　思
副主编　赵战兴　韩乐文　杨　威
责任编辑：范春青　　版式设计：范春青
责任校对：谢　芳　　责任印制：赵　晟
*
重庆大学出版社出版发行
出版人：邓晓益
社址：重庆市沙坪坝区大学城西路 21 号
邮编：401331
电话：（023）88617183　88617185（中小学）
传真：（023）88617186　88617166
网址：http://www. cqup. com. cn
邮箱：fxk@ cqup. com. cn（营销中心）
全国新华书店经销
重庆万州日报印刷厂印刷
*
开本：787×1092　1/16　印张：11. 75　字数：293 千
2012 年 7 月第 1 版　2012 年 7 月第 1 次印刷
印数：1—8 000
ISBN 978-7-5624-6659-8　定价：23. 00 元

前言

当前，我国的高职高专教育正在进入一个长足发展的时期，从规模到质量都在不断迈上新的台阶，教材建设作为高职高专教育的一个重要组成部分也要与时俱进，适应新形势的需要.

本教材根据教育部制定的《高职高专教育专业人才培养目标及规格》和《高职高专教育高等数学课程教学基本要求》精神，由一批富有高职高专教育经验的专家、教授编写而成. 本教材编写组认真总结了国家示范高职院校《高等数学》和《应用高等数学》教材编写和使用的经验，研究了高职高专教育面临的新形势和新问题，统一了编写指导思想：教材应进一步把握"必需，够用"的尺度，在继续加强数学应用性的基础上，使教材能够针对高职高专生源多渠道，学生基础极差大的现状，来尝试因材施教的创新举措.

本教材具有以下特点：

1. 以生为本，结构调整，优差兼顾

为适应高职高专招生对象的多元化，本教材坚持"为了一切学生"的宗旨，对高等数学内容结构进行了合理调整. 把多元函数微积分的内容分别编在一元函数微积分对应内容的末尾作为选学内容. 数学课程一开始即可接触到多元函数微积分，这就使得所有学生都能根据自己的基础和学习能力各取所需，解决了"吃不了"和"吃不饱"的矛盾. 同时，由一元函数的微积分到多元函数的微积分只是顺理成章、举一反三的推广，极易教学.

2. 进一步准确地把握了"必需、够用"的尺度

对于高职高专工科类各专业对数学工具的需求，编写组进行了大量的调研. 横向方面，集中了全市主要高职高专高等数学教师，对所教高等数学内容进行了综合分析；纵向方面，与各专业沟通，进行了广泛的问卷调查和走访，对它们的需求面和需求重点有了进一步把握. 因此，本教材内容的选择较好地做到了"供给对准需求"，充分体现了"以服务为宗旨"的高职教育指导思想.

3. 强化了数学在实际中的应用

(1) 概念的引入均从实际问题入手，遵循从感性到理性的认知规律，同时也是为下一步理论在实际中的应用推出范例，从而增强了学生对数学的应用意识和兴趣.

(2) 选编了有实际应用背景的例题、习题，落实以应用为目的的原

则.并尽可能地向高职高专工科各专业教学内容渗透,增加了数学应用的深度和广度.

(3)贯穿了数学建模教学思想,将数学建模的实例穿插在教材中,用以提高学生应用数学的兴趣和能力.

4.进一步降低了深奥的数学理论和计算难度

与以往的教材相比,删去了只具理论价值,在实际中用处不大的纯理论.不少定理省去了严格的理论证明,只给出几何解释或归纳.由于教材中使用了计算机软件进行数学运算和数值计算,因此删减了一些人工运算技巧和繁杂的计算.

5.数学与计算机软件相结合

教材第 11 章介绍了 MATLAB 软件在高等数学中的应用.软件的应用减少了计算的难度,运用软件演示,使得数学教学手段更加现代化,教学更加直观和动态.

6.注重教学互动,改变学生学习方式

本教材试图体现教学的启发式,改学生的被动接受为主动参与,加强了教与学,学与学的交流互动,使学生通过积极思维,相互启发,发挥主观能动性,提高学习效率.

本教材内容包括常微分方程与拉普拉斯变换、级数、线性代数、概率与数理统计、MATLAB 软件在高等数学中的应用.

本教材由重庆工程职业技术学院徐江涛、郭思任主编,重庆正大软件职业技术学院赵战兴与重庆交通大学应用技术学院韩乐文、重庆建筑工程职业学院杨威任副主编.

第 7 章由重庆工程职业技术学院曾乐辉,重庆工业职业技术学院龙辉、郭洪奇,重庆建筑工程职业学院杨威编写;第 8 章由重庆工程职业技术学院徐敏、燕长轩编写;第 9 章由重庆正大软件职业技术学院赵战兴,重庆工程职业技术学院徐江涛编写;第 10 章由重庆工程职业技术学院罗淑君、郭思编写;第 11 章由重庆工程职业技术学院徐江涛编写.

本教材上册基本学时数为 76 学时,下册基本学时数为 62 学时,标 * 号的为选学内容,需另外安排学时.使用者可根据专业需求适当增删.

本教材在编写过程中得到了重庆市数学学会高职高专专委会的指导,得到了在渝主要高职高专院校以及一些举办了高职、高专教育的各级各类学校领导和教师的大力支持和帮助,在此表示诚挚的感谢.

由于本教材的编写是具有创新模式的尝试,且编者水平有限,因此难免有缺点和错误,恳请读者批评指正.

《应用高等数学系列教材》编审委员会

2012 年 3 月

目录

7 常微分方程与拉普拉斯变换

函数是客观事物的内部联系在数量上的反映. 我们在研究科学技术现象的某一客观规律时,往往需要找出变量之间的函数关系. 因此,如何寻求函数关系,在实践中具有重要意义. 事实上,由于客观世界的复杂性,在很多情况下,直接找到某些函数关系是不太容易的,但有时可以建立函数及其导数之间的数学模型,即关系式,通过这种关系式我们便可以得到所要求的函数. 这就是所谓的微分方程.

微分方程在自然科学、工程技术、生物、经济、物理、地质等领域都有广泛的应用.

7.1 常微分方程的概念

7.1.1 问题的提出

我们通过两个具体例子来说明微分方程的基本概念.

【引例1】 已知曲线过点(0,1),且在该曲线上任一点 $M(x,y)$ 处的切线斜率为 $3x^2$,求这条曲线的方程.

【解】 设所求曲线的方程是 $y=f(x)$. 根据导数的几何意义,可知未知函数 $y=f(x)$ 应满足关系式

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 3x^2 \tag{1}$$

两边积分,得

$$y = \int 3x^2\mathrm{d}x \quad \text{即 } y = x^3 + c \tag{2}$$

其中 c 是任意常数.

此外,未知函数还应该满足条件:

$$\text{当 } x = 0 \text{ 时, } y = 1 \tag{3}$$

把式(3)代入式(2),有

$$1 = 0 + c$$

由此确定出 $c=1$.

把 $c=1$ 代入式(2),即得所求曲线方程

$$y = x^3 + 1 \tag{4}$$

【引例2】 已知自由落体运动的速度方程是$\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}=gt$,求自由落体运动的路程 s 与时间 t 的函数关系.

【解】 已知
$$\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}=gt \tag{1'}$$
两边积分,得
$$s=\int gt\mathrm{d}t$$
即
$$s=\frac{1}{2}gt^2+c \tag{2'}$$
其中 c 是任意常数.

此外,根据自由落体运动规律,此方程还应该满足条件:
$$\text{当 } t=0 \text{ 时}, s=0 \tag{3'}$$
把式(3′)代入式(2′),有
$$0=\frac{1}{2}g\cdot 0^2+c$$
由此确定出 $c=0$.

把 $c=0$ 代入式(2′),即得自由落体运动的位移方程:
$$s=\frac{1}{2}gt^2 \tag{4'}$$

7.1.2 微分方程的概念

上述两个引例中的式(1)和式(1′)都含有未知函数的导数,它们都是微分方程. 一般地,含有自变量,自变量的未知函数以及未知函数的导数或微分的方程称为**微分方程**. 其中,未知函数是一元函数的,称为**常微分方程**;未知函数是多元函数的,称为**偏微分方程**. 本章只讨论常微分方程.

例如:(a)$y'+x=0$,(b)$xy^2\mathrm{d}x+x^3y\mathrm{d}y=0$,(c)$\frac{\mathrm{d}^2s}{\mathrm{d}t^2}=a$,(d)$xy'''-x^2y''=y^3$ 等都是微分方程.

微分方程中所出现的未知函数的最高阶导数或微分的阶数,称为**微分方程的阶**. 如上述(a)和(b)是一阶微分方程,(c)是二阶微分方程,(d)是三阶微分方程.

由前面的例子我们可以看到,在研究某些实际问题时,首先要建立微分方程,然后找出满足微分方程的函数. 如果把某一函数代入一个微分方程后,使得该方程成为恒等式,那么这个函数就称为微分方程的一个**解**. 如两个引例中的式(4)和式(4′)就是微分方程式(1)和式(1′)的解.

如果微分方程的解中含有任意常数,且任意常数相互独立(即它们不能合并而使得任意常数的个数减少)的个数与微分方程的阶数相同,这样的解称为微分方程的**通解**. 例如引例中的式(2)和式(2′)就是微分方程式(1)和式(1′)的通解.

由于通解中含有任意常数,所以它还不能完全确定地反映某一客观事物的规律性. 要

完全确定地反映客观事物的规律性,必须确定这些常数的值. 不含有任意常数的解,即确定了通解中任意常数的值的解称为**特解**. 如引例中的函数(4)和(4′)就是微分方程式(1)和式(1′)的特解.

用来确定微分方程通解中任意常数的值的条件称为**初始条件**. 如引例中的式(3)和式(3′)就是初始条件.

带有初始条件的微分方程的求解问题称为**初值问题**. 如两个引例都是初值问题.

一般地,微分方程的一个解对应于平面上的一条曲线,称为微分方程的**积分曲线**;通解对应于平面上的无穷多条曲线,称为该方程的**积分曲线族**.

【例 7.1】 验证函数 $s=c_1\cos kt+c_2\sin kt$ 是微分方程 (5)

$$\frac{d^2s}{dt^2}+k^2s=0 \tag{6}$$

的解.

【证明】 求所给函数(5)的导数:

$$\frac{ds}{dt}=-kc_1\sin kt+kc_2\cos kt \tag{7}$$

$$\frac{d^2s}{dt^2}=-k^2c_1\cos kt-k^2c_2\sin kt$$

$$=-k^2(c_1\cos kt+c_2\sin kt) \tag{8}$$

将式(5)和式(8)代入微分方程(6)后成为一个恒等式,即函数(5)是微分方程(6)的解.

【例 7.2】 已知函数(5)是微分方程(6)的通解,求满足初始条件 $s\big|_{t=0}=A,\left.\frac{ds}{dt}\right|_{t=0}=0$ 的特解.

【解】 将 $s\big|_{t=0}=A,\left.\frac{ds}{dt}\right|_{t=0}=0$ 代入式(5)和式(7),得

$$c_1=A,c_2=0 \tag{9}$$

将式(9)代入式(5),得所求的特解为

$$s=A\cos kt$$

【例 7.3】 求微分方程 $y'''=e^{2x}$ 的通解.

【解】 将微分方程 $y'''=e^{2x}$ 两边积分得

$$y''=\int e^{2x}dx=\frac{1}{2}e^{2x}+c_1$$

继续积分得 $$y'=\int\left(\frac{1}{2}e^{2x}+c_1\right)dx=\frac{1}{4}e^{2x}+c_1x+c_2$$

两边再次积分得

$$y=\int\left(\frac{1}{4}e^{2x}+c_1x+c_2\right)dx=\frac{1}{8}e^{2x}+\frac{1}{2}c_1x^2+c_2x+c_3$$

即为原方程的通解.

习题 7.1

1. 说出下列微分方程的阶数.

(1)$x(y')^2-2yy'+x=0$　　(2)$x^2y''-xy'+y=0$

(3)$xy'''+2y'+x^2y^5=0$　　(4)$(7x-5y)\mathrm{d}x+(x+y)\mathrm{d}y=0$

2. 判断下列各题中的函数是否为所给微分方程的解.

(1)$xy'=2y$,　$y=5x^2$　　(2)$y''-2y'+y=0$,　$y=x^2\mathrm{e}^x$

3. 求下列微分方程的通解.

(1)$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=5$　　(2)$\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=\cos x$

(3)$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\dfrac{1}{x}$　　(4)$\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=x^2$

4. 求出下列微分方程满足所给初始条件的特解.

(1)$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\sin x$,　$y|_{x=0}=1$

(2)$\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=6x$,　$y|_{x=0}=0$,　$\left.\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{x=0}=2$

7.2　可分离变量的微分方程

有些微分方程形式很简单,如 $\mathrm{d}y=2xy\mathrm{d}x$,将该方程变形成$\dfrac{\mathrm{d}y}{y}=2x\mathrm{d}x$,两边分别积分得

$$\int\frac{\mathrm{d}y}{y}=\int 2x\mathrm{d}x \qquad \ln|y|=x^2+c$$

所以通解为 $y=\pm\mathrm{e}^{x^2+c}=c\mathrm{e}^{x^2}$,其中 $c=\pm\mathrm{e}^c$ 仍是任意常数.

一般地,如果一个一阶微分方程能化成 $g(y)\mathrm{d}y=f(x)\mathrm{d}x$ 的形式,那么原方程称为**可分离变量的微分方程**.

从上例可得解可分离变量微分方程的步骤:

(1)分离变量　$g(y)\mathrm{d}y=f(x)\mathrm{d}x$;

(2)两边积分　$\int g(y)\mathrm{d}y=\int f(x)\mathrm{d}x$;

(3)求积分得通解　$G(y)=F(x)+c$,其中,$G'(y)=g(y)$,$F'(x)=f(x)$;

(4)若给出了初始条件,确定 c 的值,求出特解.

【例 7.4】　求微分方程$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=3x^2y$ 的通解.

【解】　此微分方程是可分离变量的. 分离变量得

$$\frac{1}{y}\mathrm{d}y = 3x^2\mathrm{d}x$$

两边积分,得

$$\int \frac{1}{y}\mathrm{d}y = \int 3x^2\mathrm{d}x$$

$$\ln|y| = x^3 + c$$

$$y = \pm \mathrm{e}^{x^3+c} = \pm \mathrm{e}^c\mathrm{e}^{x^3}$$

因为 $\pm \mathrm{e}^c$ 仍是任意常数,则把它记作 c,得方程的通解为

$$y = c\mathrm{e}^{x^3}$$

以后为了运算方便,可将 $\ln|y|$写成 $\ln y$.

【例 7.5】 求微分方程 $y' = \mathrm{e}^{x-y}$满足初始条件$y|_{x=0} = 0$ 的特解.

【解】 原方程可写成 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \mathrm{e}^{x-y}$. 分离变量得

$$\mathrm{e}^y\mathrm{d}y = \mathrm{e}^x\mathrm{d}x$$

两边积分得

$$\int \mathrm{e}^y\mathrm{d}y = \int \mathrm{e}^x\mathrm{d}x$$

$$\mathrm{e}^y = \mathrm{e}^x + c$$

将$y|_{x=0} = 0$ 代入,得 $c = 0$. 于是所求微分方程的特解是

$$\mathrm{e}^y = \mathrm{e}^x,\ 即\ y = x$$

【例 7.6】 放射性元素铀由于不断地有原子放射出微粒子而变成其他元素,铀的含量就不断减少,这种现象称为衰变. 由原子物理学可知,铀的衰变速度与当时未衰变的原子的含量 M 成正比. 已知 $t = 0$ 时铀的含量为 M_0,求在衰变过程中铀含量 $M(t)$随时间 t 变化的规律.

【解】 铀的衰变速度就是 $M(t)$对时间 t 的导数$\frac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}t}$. 由于铀的衰变速度与其含量成正比,故得微分方程

$$\frac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}t} = -\lambda M \tag{1}$$

其中,$\lambda(\lambda > 0)$是常数,称为衰变系数. λ 前置负号是由于当 t 增加时 M 单调减少,即$\frac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}t} < 0$的缘故.

根据题意,初始条件为:$M|_{t=0} = M_0$.

方程(1)是可分离变量的. 分离变量后得

$$\frac{\mathrm{d}M}{M} = -\lambda\mathrm{d}t$$

两边积分,得

$$\int \frac{\mathrm{d}M}{M} = \int (-\lambda)\mathrm{d}t$$

以 $\ln c$ 表示任意常数,考虑到 $M > 0$,得到方程的通解

$$\ln M = -\lambda t + \ln c$$

即
$$M = c\mathrm{e}^{-\lambda t}$$

将初始条件代入上式,得

$$M_0 = c\mathrm{e}^0 = c$$

则方程的特解是 $M = M_0\mathrm{e}^{-\lambda t}$.

这就是所求铀的衰变规律. 由此可见,铀的含量随时间的增加而按指数规律衰减,如图 7.1 所示.

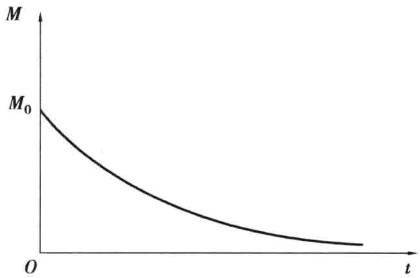

图 7.1

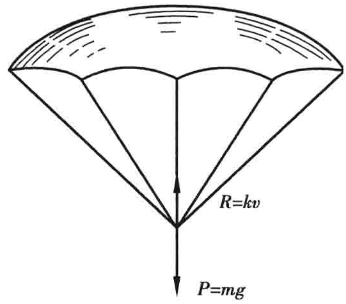

图 7.2

【例 7.7】 设降落伞从跳伞塔下落之后,所受空气阻力与速度成正比,并设降落伞离开跳伞塔时($t=0$)速度为零. 求降落伞下落速度与时间的函数关系.

【解】 设降落伞下落速度为 $v=v(t)$. 降落伞在空中下落时,同时受到重力 P 与阻力 R 的作用,如图 7.2 所示. 重力大小为 mg,方向与 v 一致;阻力大小为 kv(k 为比例系数),方向与 v 相反. 从而降落伞所受到的外力为

$$F = mg - kv$$

又根据牛顿第二运动规律知

$$F = ma$$

其中 a 为加速度,$a=\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}$.

因此函数 $v=v(t)$ 应满足微分方程

$$m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = mg - kv \tag{2}$$

由于方程(2)是可分离变量的,分离变量后得

$$\frac{\mathrm{d}v}{mg - kv} = \frac{\mathrm{d}t}{m}$$

两边积分得

$$\int\frac{\mathrm{d}v}{mg - kv} = \int\frac{\mathrm{d}t}{m}$$

由于 $mg-kv>0$,积分得方程(2)的通解为

$$-\frac{1}{k}\ln(mg - kv) = \frac{t}{m} + c_1$$

即
$$mg-kv=\mathrm{e}^{-\frac{k}{m}t-kc_1}$$

或
$$v=\frac{mg}{k}+c\mathrm{e}^{-\frac{k}{m}t}\quad\left(其中\ c=-\frac{\mathrm{e}^{-kc_1}}{k}\right)$$

根据题意,初始条件为 $v|_{t=0}=0$,代入上式得
$$c=-\frac{mg}{k}$$

于是方程(2)的特解 $v=\frac{mg}{k}(1-\mathrm{e}^{-\frac{k}{m}t})$.

可以看出,随着时间 t 的增大,速度 v 逐渐接近于常数$\frac{mg}{k}$,且不会超过$\frac{mg}{k}$,也就是说,跳伞后开始阶段是加速运动,但以后逐渐接近于匀速运动.

【例 7.8】 某企业的经营成本 C 随产量 x 增加而增加,其变化率为$\frac{\mathrm{d}C}{\mathrm{d}x}=(2+x)C$,且固定成本为 5,求成本函数 $C=C(x)$.

【解】 $\frac{\mathrm{d}C}{\mathrm{d}x}=(2+x)C$ 是可分离变量的微分方程,分离变量得
$$\frac{\mathrm{d}C}{C}=(2+x)\mathrm{d}x$$

两边积分得
$$\int\frac{\mathrm{d}C}{C}=\int(2+x)\mathrm{d}x$$
$$\ln C=2x+\frac{1}{2}x^2+\ln c_0$$
$$=\ln \mathrm{e}^{2x+\frac{1}{2}x^2}+\ln c_0$$
$$=\ln c_0\mathrm{e}^{2x+\frac{1}{2}x^2}$$

因此微分方程的通解是 $C=c_0\mathrm{e}^{2x+\frac{1}{2}x^2}$,代入初始条件得 $c_0=5$,故成本函数 $C(x)=5\mathrm{e}^{2x+\frac{1}{2}x^2}$.

习题 7.2

1. 求下列微分方程的通解.

(1) $3x^2+5x-5y'=0$　　(2) $y'=\frac{\cos x}{3y^2+\mathrm{e}^y}$

(3) $xy'=y\ln y$　　(4) $y'=10^{x+y}$

2. 求微分方程满足已给初始条件的特解.

(1) $\sin y\cos x\mathrm{d}y=\cos y\sin x\mathrm{d}x$,　$y|_{x=0}=\frac{\pi}{4}$

(2) $y'=\mathrm{e}^{2x-y}$,　$y|_{x=0}=0$

3. 一曲线上动点的坐标(x,y)满足方程$\frac{dy}{dx}+\frac{2xy}{h}=0$，其中$h$为已知常量，且曲线经过点$(0,a)$，求此曲线的方程.

4. 快艇以$v_0=5$ m/s 的速度在静水中匀速前进，当停止发动机 5 s 后，速度减少到 3 m/s，已知阻力与速度成正比，试求船速随时间的变化规律.

5. 某企业的边际成本$C'(x)=(x+x^2)C$，且固定成本为 10 元，求成本函数$C(x)$.

7.3 一阶线性微分方程

形如

$$\frac{dy}{dx}+P(x)y=Q(x) \tag{1}$$

的方程称为**一阶线性微分方程**，其中，$P(x)$和$Q(x)$都是x的连续函数.

例如：(a)$3y'+2y=x^2$，(b)$y'+\frac{1}{x}y=\frac{1}{x}\sin x$，(c)$y'+y\sin x=0$，(d)$y'-y^2=0$，(e)$yy'+y=\sin x$，(f)$y'-\sin y=0$中，(a)、(b)、(c)都是一阶线性微分方程，(d)、(e)、(f)都不是一阶线性微分方程.

7.3.1 一阶线性微分方程的分类

当$Q(x)\equiv 0$时，方程(1)变成

$$\frac{dy}{dx}+P(x)y=0 \tag{2}$$

方程(2)称为**一阶齐次线性微分方程**. 上面的方程中(c)就是一阶齐次线性微分方程.

当$Q(x)\neq 0$时，方程(1)称为**一阶非齐次线性微分方程**. 上面的方程中(a)和(b)就是一阶非齐次线性微分方程.

7.3.2 一阶线性微分方程的解法

1)一阶齐次线性微分方程的解法

因为一阶齐次线性微分方程(即方程(2))是可分离变量的微分方程，分离变量后得

$$\frac{dy}{y}=-P(x)dx$$

两边积分得

$$\int\frac{dy}{y}=-\int P(x)dx$$

积分结果为

$$\ln y=-\int P(x)dx+c_1$$

令$c_1=\ln c\,(c\neq 0)$，于是有

$$y = e^{-\int P(x)dx + \ln c}$$

即

$$y = ce^{-\int P(x)dx} \tag{7.1}$$

这就是方程(2)的通解.

注 意

式(7.1)中的不定积分$\int P(x)dx$仅表示$P(x)$的一个原函数. 本章后面的公式也作相同规定.

2)一阶非齐次线性微分方程的解法

由于一阶非齐次线性微分方程(即方程(1))的右端$Q(x)$是x的函数,因此,将所对应的一阶齐次线性微分方程的通解$y = ce^{-\int P(x)dx}$中的常数c看成是x的函数,即设

$$y = c(x)e^{-\int P(x)dx} \tag{3}$$

是一阶非齐次线性微分方程的通解,只需确定出$c(x)$,一阶非齐次线性微分方程的通解即可求得.

将式(3)对x求导,得

$$y' = c'(x) \cdot e^{-\int P(x)dx} + c(x) \cdot \left[e^{-\int P(x)dx}\right]'$$

$$= c'(x) \cdot e^{-\int P(x)dx} - c(x) \cdot P(x) \cdot e^{-\int P(x)dx}$$

将上式代入方程(1),得

$$c'(x) \cdot e^{-\int P(x)dx} - c(x) \cdot P(x) \cdot e^{-\int P(x)dx} + P(x) \cdot c(x) \cdot e^{-\int P(x)dx} = Q(x)$$

$$c'(x) \cdot e^{-\int P(x)dx} = Q(x)$$

即

$$c'(x) = Q(x) \cdot e^{\int P(x)dx}$$

两边积分得

$$c(x) = \int Q(x) \cdot e^{\int P(x)dx}dx + c$$

将上式代入式(3),有

$$y = e^{-\int P(x)dx} \cdot \left[\int Q(x) \cdot e^{\int P(x)dx}dx + c\right] \tag{7.2}$$

式(7.2)就是一阶非齐次线性微分方程的通解. 其中各个不定积分都只表示对应的被积函数的一个原函数.

上述求一阶非齐次线性微分方程的通解的方法,是将对应的一阶齐次线性微分方程的

通解中的常数 c 用一个函数 $c(x)$ 来代替,然后再去求出这个待定的函数 $c(x)$,这种方法称为**常数变易法**.

式(7.2)可变形为

$$y = e^{-\int P(x)\mathrm{d}x}\int Q(x)\cdot e^{\int P(x)\mathrm{d}x}\mathrm{d}x + c\cdot e^{-\int P(x)\mathrm{d}x}$$

上式中右端第二项恰好是一阶非齐次线性微分方程所对应的一阶齐次线性微分方程的通解,而第一项可以看做通解公式(7.2)中取 $c=0$ 得到的一个特解. 由此可知,一阶非齐次线性微分方程的通解等于它的一个特解与对应的一阶齐次线性微分方程的通解之和.

【例 7.9】 用常数变易法和公式法解微分方程 $y'-\frac{2}{x+1}y=(x+1)^3$.

【解】 (1)公式法:原方程为一阶非齐次线性微分方程,其中

$$P(x) = -\frac{2}{x+1},\qquad Q(x) = (x+1)^3$$

代入公式(7.2)得

$$\begin{aligned} y &= e^{\int\frac{2}{x+1}\mathrm{d}x}\left[\int (x+1)^3 e^{-\int\frac{2}{x+1}\mathrm{d}x}\mathrm{d}x + c\right] \\ &= e^{2\ln(x+1)}\left[\int (x+1)^3 e^{-2\ln(x+1)}\mathrm{d}x + c\right] \\ &= (x+1)^2\left[\int (x+1)^3(x+1)^{-2}\mathrm{d}x + c\right] \\ &= (x+1)^2\left[\int (x+1)\mathrm{d}x + c\right] \\ &= (x+1)^2\left[\frac{1}{2}(x+1)^2 + c\right] \end{aligned}$$

(2)常数变易法:与原方程对应的齐次方程为

$$y' - \frac{2}{x+1}y = 0$$

用分离变量法得

$$\frac{\mathrm{d}y}{y} = \frac{2}{x+1}\mathrm{d}x$$

两边积分得

$$\int\frac{\mathrm{d}y}{y} = \int\frac{2}{x+1}\mathrm{d}x$$

$$\ln y = 2\ln(x+1) + \ln c$$

$$y = c(1+x)^2$$

将上式中的 c 换成是 $c(x)$,设原方程的通解是

$$y = c(x)(1+x)^2$$

求导得

$$y' = c'(x)(1+x)^2 + 2c(x)(1+x)$$

将 y 和 y' 代入原方程,得