金榜图书
JINBANG BOOKS · SINCE 1997

2015

李永乐·王式安唯一考研数学系列

全国十二大考研辅导机构指定用书

考研数学复习全书

数学三

主编◎李永乐 王式安 季文铎

编委◎王式安 刘喜波 李永乐 季文铎 武忠祥 胡金德 蔡燧林

国家行政学院出版社

2015

李永乐·王式安唯一考研数学系列

全国十二大考研辅导机构指定用书

考研数学复习全书

数学三

主编◎李永乐　王式安　季文铎

编委◎王式安 刘喜波 李永乐 季文铎 武忠祥 胡金德 蔡燧林

国家行政学院出版社

图书在版编目(CIP)数据

考研数学复习全书. 数学三/李永乐,王式安,季文铎编著. —2版—北京:国家行政学院出版社,2013.12

ISBN 978-7-5150-1054-0

Ⅰ.①考… Ⅱ.①李… ②王… Ⅲ.①高等数学—研究生—入学考试—自学参考资料 Ⅳ.①013

中国版本图书馆CIP数据核字(2013)第290025号

敬告读者

本书封面粘有专用防伪标识,凡有防伪标识的为正版图书,敬请读者识别。

考研数学复习全书. 数学三

主　　编:李永乐　王式安　季文铎
责任编辑:姚敏华
装帧设计:金榜图文设计室
出版发行:国家行政学院出版社
　　　　(北京市海淀区长春桥路6号 100089)
电　　话:(010)68920640　68929037
编 辑 部:(010)68928761　68929009
印　　刷:大厂回族自治县彩虹印刷有限公司
开　　本:787mm×1092mm　1/16
印　　张:25.5
字　　数:501千字
版　　次:2014年2月第2版
印　　次:2014年2月第1次印刷
书　　号:ISBN 978-7-5150-1054-0
定　　价:58.00元

前言

为了帮助广大考生能够在较短的时间内，准确理解和熟练掌握考试大纲知识点的内容，全面提高解题能力和应试水平，本书编写团队依据15年的命题与阅卷经验，并结合10多年的考研辅导和研究精华，精心编写了本书，真正起到帮助同学们提高综合分析和综合解题的能力。

一、本书的编排结构

全书分三篇，分别是微积分、线性代数、概率论与数理统计，各篇按大纲设置章节，每章的编排如下：

1. **考点与要求**　设置本部分的目的是使考生明白考试内容和考试要求，从而在复习时有明确的目标和重点。

2. **内容精讲**　本部分对考试大纲所要求的知识点进行全面阐述，并对考试重点、难点以及常考知识点进行深度剖析。

3. **例题分析**　本部分对历年考题所涉及的题型进行归纳分类，总结各种题型的解题方法，注重对所学知识的应用，以便能够开阔考生的解题思路，使所学知识融会贯通，并能灵活地解决问题。针对以往考生在解题过程中普遍存在的问题及常犯的错误，给出相应的注意事项，对有难度的例题给出解题思路的分析，以便加强考生对基本概念、公式和定理等内容的理解和正确运用。

4. **习题分阶**　只有适量的练习才能巩固所学的知识，数学复习离不开做题。为了使考生更好地巩固所学知识，提高实际解题能力，本书作者精心优化设计了一定数量的练习题，供考生练习，以便使考生在熟练掌握基本知识的基础上，达到轻松解答真题的水平。同时，本书对精选的练习题，进行了难度分阶，从基础概念，到综合应用，层层递进，实现练习、巩固、提高三维一体。

二、本书的主要特色

1. **权威打造**　命题专家和阅卷专家联袂打造，站在命题专家的角度命题，站在阅卷专家的角度解题，为考生提供最权威的复习指导。

2. **综合提升**　与其他同类图书相比，本书加强了考查知识点交叉出题的综合性，真正起到帮助考生提高综合分析和综合解题的能力。

3. **分析透彻**　本书既从宏观上把握考研对知识的要求，又从微观层面对重要知识点进行深入细致的剖析，让考生思路清晰、顺畅。

4. **一题多解** 对于常考热点题型，均给出巧妙、新颖、简便的几种解法，拓展考生思维，锻炼考生知识应用的灵活性。这些解法均来自各位专家多年教学实践总结和长期命题阅卷经验。

5. **贴心服务** 本书赠送《分阶习题同步训练》，以便于考生迅速检验学习效果，巩固所学内容。

建议考生在使用本书时不要就题论题，而是要多动脑，通过对题目的练习、比较、思考，总结并发现题目设置和解答的规律性，真正掌握应试解题的金钥匙，从而迅速提高知识水平和应试能力，取得理想分数。

另外，为了更好地帮助同学们进行复习，"李永乐考研数学辅导团队"特在新浪微博上开设答疑专区，同学们在考研数学复习中，如若遇到任何问题，即可在线留言，团队老师将尽心为你解答。请访问 weibo.com@金榜图书官方微博。

最后，本书的成稿还要感谢考研数学原命题组组长单立波老师和中国人民大学师潭老师在编校过程中所付出的努力。

希望本书能对同学们的复习备考带来更大的帮助。对书中的不足和疏漏之处，恳请读者批评指正。

祝同学们复习顺利，心想事成，考研成功！

编 者

2014 年 2 月

目录

第一篇　微积分

第五章 无穷级数 ………………… (144)

第六章 常微分方程与差分方程 …… …………………………………… (170)

第二篇 线性代数

第一章 行列式 ………………… (186)

第六章 二次型 ………………… (283)

第三篇 概率论与数理统计

第一章 随机事件与概率 ……… (303)

第二章 随机变量及其概率分布 …… ……………………………………………… (317)

第一章 函数 极限 连续

考点与要求

理解 函数的概念,复合函数及分段函数的概念,无穷小量的概念,函数连续性的概念(含左连续与右连续),闭区间上连续函数的性质(有界性、最大值和最小值定理、介值定理).

了解 函数的有界性、单调性、周期性和奇偶性,反函数及隐函数的概念,初等函数的概念,极限的概念,函数左、右极限的概念以及函数极限存在与左、右极限之间的关系,极限的性质,极限存在的两个准则,无穷大量的概念,连续函数的性质和初等函数的连续性.

会 建立应用问题的函数关系,判别函数间断点的类型,应用闭区间上连续函数的性质.

掌握 函数的表示方法,基本初等函数的性质及其图形,无穷小量的比较方法,极限的四则运算法则,利用两个重要极限求极限的方法.

☞1 函 数

内容精讲

一、函数的概念及表示方法

1. 函数 设 x 和 y 是两个实变量,D 是一个给定的非空实数集,如果对于任意 $x \in D$,按照一定的法则,变量 y 总有唯一确定的值与之对应,则称变量 y 是变量 x 的函数,记作 $y = f(x)$,其中 x 称作自变量,y 称作因变量,D 称作函数 $y = f(x)$ 的定义域,函数值 $f(x)$ 的全体所构成的集合称作函数 f 的值域. 函数有公式法、表格法、图象法等表示方法.

要注意的是对于两个给定的函数,当且仅当它们的定义域和对应法则都相同时,才能说它们是相同的函数,否则它们就是不同的函数.

2. 邻域 设 $\delta > 0$,实数集合 $U(x_0, \delta) = \{x \mid x_0 - \delta < x < x_0 + \delta\}$ 称为点 x_0 的半径为

δ 的邻域. 实数集合 $\mathring{U}(x_0,\delta)=\{x \mid 0<|x-x_0|<\delta\}$ 称为点 x_0 的半径为 δ 的去心邻域. 相应地 $\{x \mid 0<x-x_0<\delta\}$ 称为 x_0 的去心右邻域, $\{x \mid -\delta<x-x_0<0\}$ 称为 x_0 的去心左邻域.

二、函数的性态

1. 有界性 设函数 $y=f(x)$ 在区间 I 上有定义,如果存在正数 M,对于任意 $x\in I$,恒有 $|f(x)|\leqslant M$,则称函数 $y=f(x)$ 在区间 I 上有界;否则称函数 $y=f(x)$ 在 I 上无界. 如果存在数 M_1,对于任意 $x\in I$,恒有 $f(x)\leqslant M_1$,则称函数 $y=f(x)$ 在区间 I 上有上界;如果存在数 M_2,对于任意 $x\in I$,恒有 $f(x)\geqslant M_2$,则称函数 $y=f(x)$ 在区间 I 上有下界. 显然,函数 $f(x)$ 在区间 I 上有界的充分必要条件是它在 I 上既有上界又有下界.

常见的在 $(-\infty,+\infty)$ 上有界函数有 $\sin x,\cos x,\arctan x,\operatorname{arccot} x,\arcsin x,\arccos x$.

【注】(1) 函数 $y=f(x)$ 有界或无界是相对于某个区间而言的,例如 $y=\dfrac{1}{x^2}$ 在区间 $(0,1)$ 内无界,但在区间 $\left[\dfrac{1}{4},1\right]$ 上是有界的. 如不指明区间,那么是指 $f(x)$ 的定义域上.

(2) 无界函数和无穷大的区别:在某一变化过程中,若 $f(x)$ 为无穷大,则存在对应的区间使 $f(x)$ 无界;但是若 $f(x)$ 在某个区间上无界,则 $f(x)$ 不一定为无穷大. 例如 $y=\dfrac{1}{x^2}\cos\dfrac{1}{x}$ 在区间 $(0,1]$ 上无界,但函数不是 $x\to 0^+$ 时的无穷大.

(3) 若函数 $y=f(x)$ 在区间 I 上有界,则 $f(x)$ 的导函数和原函数在区间 I 上不一定有界. 例如 $y=\sqrt{x}$ 在 $(0,1]$ 上有界,但其导函数 $y=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$ 在 $(0,1]$ 上是无界的;$y=1-\sin x$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上有界,$F(x)=x+\cos x$ 是其原函数,但它在 $(-\infty,+\infty)$ 上是无界的.

2. 单调性 设函数 $f(x)$ 在区间 I 上有定义,如果对于任意 $x_1,x_2\in I$,当 $x_1<x_2$ 时,恒有 $f(x_1)<f(x_2)$(或 $f(x_1)>f(x_2)$),则称函数 $y=f(x)$ 在区间 I 上是单调增加(或减少)的.

【注】若对任意 $x_1,x_2\in I$,当 $x_1<x_2$ 时,恒有 $f(x_1)\leqslant f(x_2)$(或 $f(x_1)\geqslant f(x_2)$),则称函数 $y=f(x)$ 在区间 I 上是单调不减(或不增)的.

3. 周期性 设函数 $f(x)$ 的定义域为 D,如果存在一个常数 $T>0$,使得对于任一 $x\in D$,有 $x\pm T\in D$ 且 $f(x+T)=f(x)$ 恒成立,则称 $f(x)$ 为周期函数,T 称为 $f(x)$ 的周期. 通常(如果存在)把满足上式的最小正数 T 称为函数 $f(x)$ 的最小正周期.

4. 奇偶性 设函数 $f(x)$ 的定义域 D 关于原点对称,如果对任意 $x\in D$,恒有 $f(-x)=f(x)$(或 $f(-x)=-f(x)$),则称函数 $f(x)$ 为偶函数(或奇函数). 偶函数的图形关于 y 轴对称,奇函数的图形关于坐标原点对称.

【注】若函数的定义域关于原点不对称,则此函数必定既不是奇函数,也不是偶函数.

三、几个与函数相关的概念

1. 复合函数 给定两个函数 $y=f(u),u=\varphi(x)$,如果 $u=\varphi(x)$ 的值域与 $y=f(u)$ 的定义域有非空交集,则称函数 $y=f[\varphi(x)]$ 为由 $y=f(u)$ 及 $u=\varphi(x)$ 而成的复合函数,u 称为中间变量.

【注】复合函数可多重复合,如 $y=f[\varphi(\psi(x))]$ 可看做是由 $y=f(u),u=\varphi(v)$ 和 $v=\psi(x)$ 复合而成。

2. 反函数 设函数 $y=f(x)$ 的定义域为 D,值域为 W. 若对 $\forall y\in W$,存在唯一确定的 $x\in D$,使得 $y=f(x)$,则得到 x 是 y 的函数,记作 $x=f^{-1}(y)$,称为 $y=f(x)$ 的反函数,而

$y = f(x)$ 称为直接函数，习惯上将 $y = f(x)$ 的反函数记为 $y = f^{-1}(x)$.

【注】(1) 单调函数一定存在反函数.

(2) 反函数 $y = f^{-1}(x)$ 与直接函数 $y = f(x)$ 有相同的单调性.

(3) 函数 $y = f(x)$ 的图象与函数 $x = f^{-1}(y)$ 的图象重合，但与函数 $y = f^{-1}(x)$ 的图象关于直线 $y = x$ 对称.

3. 隐函数　设有方程 $F(x,y) = 0$，若对 $\forall x \in D$，存在唯一确定的 y 满足 $F(x,y) = 0$，由此确定的 y 与 x 的函数关系 $y = y(x)$ 称为由方程 $F(x,y) = 0$ 所确定的隐函数.

4. 分段函数　在自变量的不同变化范围中，对应法则用不同式子来表示的函数，称为分段函数.

分段函数一般不是初等函数. 这里用了"一般"两字，例如 $|x| = \sqrt{x^2} = \begin{cases} x, x \geq 0, \\ -x, x < 0 \end{cases}$ 可以写成分段，却是初等函数.

5. 基本初等函数与初等函数　常函数、幂函数、指数函数、对数函数、三角函数和反三角函数统称基本初等函数.

由基本初等函数经过有限次四则运算及复合运算而成并可用一个式子表示的函数，称为初等函数.

【注】幂指函数 $y = u(x)^{v(x)}(u(x) > 0)$ 定义为 $u(x)^{v(x)} = e^{v(x)\ln u(x)}$.

四、重要公式与结论

1. 关于奇偶性

(1) 有限个奇函数的代数和仍是奇函数；有限个偶函数的代数和仍是偶函数.

(2) 奇数个奇函数的积是奇函数，偶数个奇函数的积是偶函数；有限个偶函数的积是偶函数；奇函数与偶函数的积是奇函数.

(3) 两个奇函数的复合是奇函数；两个偶函数的复合是偶函数；一个奇函数与一个偶函数的复合是偶函数.

(4) 若 $f(x)$ 是可导的偶函数，则 $f'(x)$ 为奇函数，且 $f'(0) = 0$；若 $f(x)$ 是可导的奇函数，则 $f'(x)$ 为偶函数.

【注】若 $f(x)$ 是偶函数且 $f'(0)$ 存在，则 $f'(0) = 0$.

(5) 设 $f(x)$ 是连续函数，若 $f(x)$ 为偶函数，则 $\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$ 为奇函数；若 $f(x)$ 为奇函数，则对任意的 a，$\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$ 为偶函数.

(6) 若 $F(x)$ 为 $f(x)$ 的任意原函数，则

$f(x)$ 为奇函数 $\Leftrightarrow F(x)$ 为偶函数，　$f(x)$ 为偶函数 $\not\rightleftarrows F(x)$ 为奇函数.

(7) 设函数 $f(x)$ 的定义域 D 关于原点对称，则 $f(x)$ 一定可以表示成奇函数与偶函数的和. 事实上，

$f(x) = \frac{1}{2}[f(x) - f(-x)] + \frac{1}{2}[f(x) + f(-x)]$，式中前者为奇函数，后者为偶函数.

(8) 奇函数在其对称区间的两边单调性相同，凹凸性相反，拐点关于原点对称；偶函数在其对称区间的两边单调性相反，凹凸性相同，拐点关于 y 轴对称.

2. 关于周期性

(1) 若 $f(x)$ 是以 T 为周期的可导函数，则 $f'(x)$ 仍是以 T 为周期的函数.

【注】若 $f(x)$ 是以 T 为周期的函数，且 $f'(x_0)$ 存在，则 $f'(x_0 + T) = f'(x_0)$.

(2) 设 $f(x)$ 是以 T 为周期的连续函数,则

$$\int_a^{a+T} f(x)\mathrm{d}x = \int_0^T f(x)\mathrm{d}x = \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(x)\mathrm{d}x, \qquad \int_0^{nT} f(x)\mathrm{d}x = n\int_0^T f(x)\mathrm{d}x.$$

3. 关于单调性

(1) 单调函数一定存在反函数,且它们的单调性相同.

(2) 单调函数的复合函数仍然是单调函数.

【注】单调函数的导函数和原函数都不一定仍为单调函数. 例如 $y = x^3$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内单调增加,而其导函数 $y' = 3x^2$ 与原函数 $F(x) = \frac{1}{4}x^4$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内都不单调.

4. 关于有界性

(1) 若 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续,则 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上有界.

(2) 若 $f(x)$ 在 (a,b) 内连续,且 $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)$ 存在,$\lim\limits_{x\to b^-} f(x)$ 存在,则 $f(x)$ 在 (a,b) 内有界.

【注】将有限区间 (a,b) 改为无穷区间,结论仍成立.

(3) 若 $f(x)$ 在集合 I 上有最大值(或最小值),则 $f(x)$ 在集合 I 上有上(或下)界.

(4) 若 $f'(x)$ 在有限区间 I 上有界,则 $f(x)$ 在 I 上有界.

例题分析

一、求函数的定义域及表达式

【例 1】设 $f(x) = \begin{cases} x^2, & |x| \leqslant 1, \\ 1, & 1 < |x| \leqslant 2, \end{cases}$ 且 $g(x) = f(x^2) + f(x-1)$,求 $g(x)$ 的定义域.

【解】$f(x)$ 的定义域为 $[-2,2]$,由 $f(x^2)$ 知 $0 \leqslant x^2 \leqslant 2$,即 $-\sqrt{2} \leqslant x \leqslant \sqrt{2}$,

由 $f(x-1)$ 知 $-2 \leqslant x-1 \leqslant 2$,即 $-1 \leqslant x \leqslant 3$,

求其交集,得 $g(x)$ 的定义域为 $[-1,\sqrt{2}]$.

【例 2】已知 $f(x) = \sin x$,$f[\varphi(x)] = 1 - x^2$,试求函数 $\varphi(x)$ 的定义域.

【解】由于 $1 - x^2 = f[\varphi(x)] = \sin\varphi(x)$,故 $\varphi(x) = \arcsin(1-x^2)$.

于是 $\quad -1 \leqslant 1 - x^2 \leqslant 1$,即 $0 \leqslant x^2 \leqslant 2$. 所以函数 $\varphi(x)$ 的定义域为 $-\sqrt{2} \leqslant x \leqslant \sqrt{2}$.

【例 3】求函数 $y = \ln\frac{x}{x-2} + \arccos\frac{3x-1}{5}$ 的定义域.

解题思路 根据对数函数中,真数要大于零;反余弦函数 $\arccos x$ 中 $-1 \leqslant x \leqslant 1$ 直接求解即得.

【解】因为 $y = \ln\frac{x}{x-2} + \arccos\frac{3x-1}{5}$,所以

$$\begin{cases} \frac{x}{x-2} > 0, \\ x - 2 \neq 0, \\ -1 \leqslant \frac{3x-1}{5} \leqslant 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < 0 \text{ 或 } x > 2, \\ x \neq 2, \\ -\frac{4}{3} \leqslant x \leqslant 2 \end{cases} \Leftrightarrow -\frac{4}{3} \leqslant x < 0,$$

故所求定义域为 $-\frac{4}{3} \leqslant x < 0$.

【评注】求函数的定义域时注意：
(1) 分式中分母不能为零；
(2) 根式中负数不能开偶次方根；
(3) 对数函数中，底数要大于零不等于1，真数要大于零；
(4) 反正弦函数和反余弦函数 $\arcsin x$，$\arccos x$ 中 $-1 \leqslant x \leqslant 1$.
(5) $\tan x$，$\sec x$ ($x \neq k\pi + \frac{\pi}{2}$)，$k$ 为整数；$\cot x$，$\csc x$ ($x \neq k\pi$)，k 为整数.

【例 4】 设 $f(x) = \begin{cases} 4 - x^2, & |x| \leqslant 2, \\ 0, & |x| > 2, \end{cases}$ 求 $f(f(x))$.

【解】
$$f(f(x)) = \begin{cases} 4 - f^2(x), & |f(x)| \leqslant 2, \\ 0, & |f(x)| > 2. \end{cases}$$
进一步，由下列不等式确定 x 取值范围，从而可得 $f(x)$ 的表达式，再代入上面式子：

(1) 由 $|f(x)| \leqslant 2$ 有 $\begin{cases} |4 - x^2| \leqslant 2, \\ |x| \leqslant 2 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} |0| \leqslant 2, \\ |x| > 2. \end{cases}$ 即 $\sqrt{2} \leqslant |x| \leqslant 2$ 或 $|x| > 2$.

(2) 由 $|f(x)| > 2$ 有 $\begin{cases} |4 - x^2| > 2, \\ |x| \leqslant 2 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} |0| > 2, \\ |x| > 2. \end{cases}$ 即 $|x| < \sqrt{2}$.

故
$$f(f(x)) = \begin{cases} 4, & |x| > 2, \\ 4 - (4 - x^2)^2, & \sqrt{2} \leqslant |x| \leqslant 2, \\ 0, & |x| < \sqrt{2}. \end{cases}$$

【例 5】 已知 $f(x + \frac{1}{x}) = \frac{x + x^3}{1 + x^4}$，则函数 $f(x) =$ ________.

【解】 因为 $f(x + \frac{1}{x}) = \dfrac{x + x^3}{1 + x^4} = \dfrac{\frac{1}{x} + x}{(\frac{1}{x} + x)^2 - 2}$，　令 $\frac{1}{x} + x = t$，　则

$f(t) = \dfrac{t}{t^2 - 2}$，　　可见　$f(x) = \dfrac{x}{x^2 - 2}$.

【评注】 若按一般方法令 $\frac{1}{x} + x = t$，解出 x 再代入求 $f(t)$ 十分繁琐，应掌握一些基本技巧.

【例 6】 设 $f(x)$ 满足方程 $2f(x) + f\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{x}$，求 $f(x)$.

> **解题思路**　先将 x 换成 $\frac{1}{x}$，再求出 $f(x)$ 的表达式.

【解】 因为
$$2f(x) + f\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{x} \quad ①$$
将 x 换成 $\frac{1}{x}$，有
$$2f\left(\frac{1}{x}\right) + f(x) = x \quad ②$$
由 ①② 解得
$$f(x) = \frac{2 - x^2}{3x}.$$

【例 7】 求函数 $y = \begin{cases} x, & -\infty < x < 1, \\ x^2, & 1 \leqslant x \leqslant 4, \\ 2^x, & 4 < x < +\infty \end{cases}$ 的反函数.

解题思路 分段分别求各区间段的反函数即可.

【解】当 $-\infty < x < 1$ 时,$y = x$,其反函数为:$y = x, -\infty < x < 1$;

当 $1 \leqslant x \leqslant 4$ 时,$y = x^2$,其反函数为:$y = \sqrt{x}, 1 \leqslant x \leqslant 16$;

当 $4 < x < +\infty$ 时,$y = 2^x$,其反函数为:$y = \log_2 x, 16 < x < +\infty$.

因此所求反函数为

$$y = \begin{cases} x, & -\infty < x < 1, \\ \sqrt{x}, & 1 \leqslant x \leqslant 16, \\ \log_2 x, & 16 < x < +\infty. \end{cases}$$

小 结

要掌握如下几种问题的作答

1. 假设有关系式 $f(g(x)) = \varphi(x)$,其中 $\varphi(x)$ 的表达式已知,有两种情况:

(1) 已知 f,求 g. 这相当于求反函数 $g(x) = f^{-1}(\varphi(x))$;

(2) 已知 g,求 f. 一般作变量代换 $g(x) = u \Rightarrow x = g^{-1}(u)$,于是有 $f(u) = \varphi(g^{-1}(u))$,再根据函数关系与变量字母无关,得 $f(x) = \varphi(g^{-1}(x))$.

以上(1)(2) 均要求相应的反函数存在.

2. 求函数的定义域时注意事项见例 3 后的评注.

3. 求复合函数 $f(g(x))$ 的表达式. 先由外层函数 f 写出复合函数的表达式,同时写出内层函数 g,即中间变量的取值范围. 然后按内层函数 $g(x)$ 的取值范围确定自变量 x 的取值范围和复合函数 $f(g(x))$ 的表达式.

4. 求已知函数 $y = f(x)$ 的反函数,就是把已知函数 $y = f(x)$ 中的 x 用 y 表示为 $x = \varphi(y)$.

(1) 求出 $x = \varphi(y)$ 后将 x 与 y 互换,得 $y = \varphi(x)$;

(2) 求出直接函数的定义域便得反函数 $x = \varphi(y)$ 的值域,即 $y = \varphi(x)$ 的值域.

【注】求分段函数的反函数,分段分别求各区间段的反函数.

二、函数的特性

【例 8】判别下列函数的奇偶性:

(1) 符号函数 $\operatorname{sgn}(x) = \begin{cases} 1, x > 0, \\ 0, x = 0, \\ -1, x < 0. \end{cases}$

(2) $f(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$.

(3) $F(x) = \int_a^x f(t)\mathrm{d}t$,其中 a 为常数,$f(x)$ 为可积的奇函数.

【解】(1) 因为 $\operatorname{sgn}(-x) = -\operatorname{sgn}(x)$,故 $\operatorname{sgn}(x)$ 为奇函数.

(2) 因为 $$f(-x) = \ln(-x + \sqrt{(-x)^2 + 1}) = \ln(\sqrt{x^2 + 1} - x) = \ln \frac{x^2 + 1 - x^2}{\sqrt{x^2 + 1} + x}$$