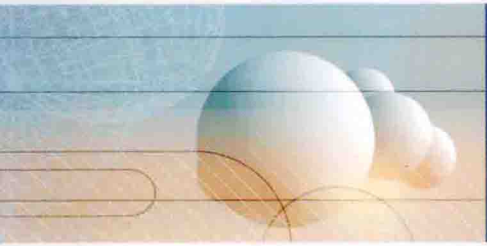
经济管理
数学模型案例教程

（第二版）



谭永基　朱晓明　丁颂康
陈恩华　池　洪　蔡志杰
等　编著

高等教育出版社

经济管理数学模型案例教程

Jingji Guanli Shuxue Moxing Anli Jiaocheng

（第二版）

谭永基　朱晓明　丁颂康
陈恩华　池　洪　蔡志杰　等　编著

高等教育出版社·北京

内容简介

本书是第一部由数学模型方面的专家和有丰富实际经验、对数学模型与数学应用有浓厚兴趣的领导干部和企业家合作编写的数学模型案例教材，既有理论又有应用。主要内容有：经济数学模型、金融数学模型、管理数学模型。每个数学模型案例都分为问题的提出、模型的构建、模型的应用、实践与思考几个模块，讲解清晰明了。

本书在讲解数学模型与数学建模的基本概念、特点与方法的基础上，用百余个经典的或结合我国实际情况的经济、金融和管理的数学模型案例，进一步阐明数学建模和用数学解决经济、金融及管理实际问题的方法与技巧。本次修订适当增加了一些新鲜案例，删除若干不太重要的章节。

本书可用作经济、管理、金融类专业本、专科生或 MBA 的数学模型课程教材，也可用作大学生数学建模竞赛的参考书。

图书在版编目(CIP)数据

经济管理数学模型案例教程/谭永基等编著. --2版. --北京:高等教育出版社,2014.6
ISBN 978-7-04-039610-2

Ⅰ.①经… Ⅱ.①谭… Ⅲ.①经济管理-数学模型-案例-高等学校-教材 Ⅳ.①F224.0

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2014)第 068173 号

策划编辑 张彦云 责任编辑 张彦云 封面设计 姜 磊 版式设计 余 杨
插图绘制 邓 超 责任校对 胡美萍 责任印制 韩 刚

出版发行	高等教育出版社	网 址	http://www.hep.edu.cn
社 址	北京市西城区德外大街 4 号		http://www.hep.com.cn
邮政编码	100120	网上订购	http://www.landraco.com
印 刷	北京汇林印务有限公司		http://www.landraco.com.cn
开 本	787mm×960mm 1/16		
印 张	29.75	版 次	2006 年 6 月第 1 版
字 数	540 千字		2014 年 6 月第 2 版
购书热线	010-58581118	印 次	2014 年 6 月第 1 次印刷
咨询电话	400-810-0598	定 价	46.00 元

本书如有缺页、倒页、脱页等质量问题，请到所购图书销售部门联系调换

物 料 号 39610-00

序 言

数学这一重要的基础学科正迅速向自然科学和社会科学的各个领域渗透，并在工程技术和经济管理等方面发挥出愈来愈明显、甚至是关键性的作用。由于大量采用了数学工具，经济管理领域从学科基础到应用实践都已变得焕然一新，充分显示了数学方法的威力。近年来在实践中行之有效的经济、金融和管理方面的数学方法及软件的大量涌现，以及在众多诺贝尔经济学奖获奖者的贡献中数学定量方法所起的重要作用，都有力地证明了这一点。

要用数学工具定量地解决经济、金融和管理中的实际问题，首先要建立相应的数学模型，即通过正确的假设和合理的简化，将这个实际问题归结为一个易于求解的数学问题。在这个基础上，才能用数学或数值方法求得应有的解答，给实践以正确的指导。

数学模型的种类丰富多彩，建立数学模型的方法也多种多样。经过大量的实践，不断发现和总结建立数学模型的规律，已经形成了数学模型这门新的大学课程，出版了相当多的教科书。但专门以经济、金融和管理专业学生为主要对象的数学模型教科书目前尚不多见。考虑到面对经济建设的更高要求和定量化的发展趋势，未来的领导干部、企业家和经济金融工作者都应该了解本领域中一些重要的数学模型，并具有至少是初步的数学建模的能力，一本专门为经济、金融和管理专业学生编写的数学模型教科书就显得特别重要。本书就是为了这个目的而编写的。

本书的编著者中既有多年从事数学模型科研与教学的教师，又有奋斗在经济、金融及管理第一线、成绩卓著的领导干部和企业家。他们结合自身的实践，在书中精心选取和介绍了经济、金融和管理中的百余个典型的数学模型案例。这些案例包括了经济、金融和管理科学中最重要的一些数学模型，其中有些出自诺贝尔经济学奖获奖者的工作，也包括了在我国经济管理实践中已有成功应用的数学模型，还有些与我国当前重大经济活动或事件紧密关联。这样，本书的选材既覆盖了建立数学模型的基本方法和众多典型的数学模型，又贴近我国经济管理实际，体现了理论联系实际的精神和学以致用的原则，形成了本书鲜明

的特色。

应该强调指出，数学模型这门课程的最大特点是它的实践性。关键不在于知识的积累，而应着眼于能力的提高。仅仅将百余个案例都念懂背熟，未必会有太大的帮助。只有通过这些案例的学习举一反三，努力参加一些解决问题的实践，才能掌握数学建模的精髓，真正达到学习本课程的目的。本书编著者采用对案例进行分析的方法来叙述数学建模的基本规律与方法，强调认识模型与建立模型，而不将着重点放在对建立起来的数学模型进行求解的细致的数学方法上，这种做法更能体现数学建模的精神和实质，在叙述上也比较简明，应该说是一个正确的引导，也是符合经济管理类专业的特点的。

李大潜
2006年3月于上海

第二版前言

本书第一版系普通高等教育"十一五"国家级规划教材，自2006年出版发行以来被许多兄弟院校作为教材、教学参考书或数学建模竞赛培训教材使用，获得了广泛好评。同时，有关老师对本书的改进也提出了许多有益的建议。

随着社会和经济的发展，更多经济管理数学模型的成果和案例涌现出来。为保持本教材的先进性、提高教材的可读性，我们对本书进行了修订改编，增加了一些数学建模竞赛及数学模型有关资料中出现的反映经济、金融和管理的新案例，以及近年来获得诺贝尔经济学奖的有关成果中的数学模型案例，如"肠衣搭配问题优化模型"是根据食品加工工厂提出的实际课题而建立的模型；"表层土壤中重金属污染问题"、"养老金问题"研究的是现阶段公众普遍关注的问题；"市场设计模型"是获得2012年诺贝尔经济学奖的数学模型；"输油管布置模型"是数学建模竞赛的赛题；"再融资问题"是融资贷款时经常遇到的现实问题等。同时，我们也删除了第一版部分比较难读难教或典型性不够的章节，如"农业开发区可持续土地利用系统结构模型"、"城市土地价格动力学模型"、"商用汽车企业竞争力研究模型"、"国有商业银行外汇结构性存款的定价模型"、"国有商业银行运营效率评价模型"、"国内某保险公司定期寿险产品定价模型"、"外汇风险管理中的期权组合参考模型"、"民营上市公司超额控制治理参考研究模型"、"质量成本最小化分析模型"、"区域公共物流中心规模和选址模型"、"某市工业行业专利产出滞后机制研究模型"等。我们还改写了部分章节的内容以增加可读性，并对一些印刷错误做了订正。

在此我们衷心感谢对本书提出过宝贵意见和建议的同仁，并再次感谢为本书编写做出贡献的同志和朋友们，也要感谢高等教育出版社的编辑为本书的改进付出的艰辛劳动。

虽然我们为提高本书的质量做了力所能及的努力，但限于水平，纰漏和瑕疵在所难免，热忱欢迎读者和同行进一步批评指正。

编者

2013年8月

第一版前言

经济、管理科学近几十年来获得了飞速的发展,并取得丰硕的成果,这些成果的重要标志之一就是经济、管理科学更加数学化和定量化。随着我国经济的蓬勃发展,人们越来越重视用数学定量地解决经济、管理领域中的各种问题。

用数学定量地解决经济、管理科学和经济、管理实践中的问题,恰当地建立与这些问题有关的数学模型是关键。建立数学模型不仅是用数学解决经济、管理问题的第一步,它还贯穿在解决问题的全过程中。因此,培养具有一定数学素养、掌握一定数学建模能力的经济、金融和管理人才就显得十分重要了。为此我们编写了本教程,为经济、金融和管理专业的各类学生提供一本学习数学模型和数学建模的教材。

本教程从各种数学模型教材和经济、管理科学专著中选取了典型数学建模案例,其中既有诺贝尔经济学奖获奖者建立的著名的数学模型案例,也有我国近年来重大经济活动和事件中的相当一部分成功的数学模型案例,充分体现了教材的科学性和时代性。本教程同时选取了部分领导和管理干部亲自运用过并取得良好效益的数学模型,如有关"开发区规划、建设"、"循环经济"、"奥运会"、"世博会"、"银行对个人住房按揭贷款潜在信用风险"、"民营上市公司超额控制治理"、"招聘公务员"、"河流污染源强度的辨识"、"灾情巡视的最佳路线"、"敏感问题调查"等模型,这些都能令人感到耳目一新。

本教程注重介绍数学模型以及数学建模的方法。模型的求解虽然十分重要,但介绍数学求解不是本教程的主要目的。对已有成熟解法或容易找到求解软件的模型,我们仅介绍有关文献或软件,不在模型求解环节过多地展开。

本教程中的数学模型案例是按应用领域分章节编排的。我们还在本书的附录中设计了若干附表,将全书中的案例按"行业分类"和"数模分类"列于一表,对照展示,以方便教师的教学和学生自学。

教学时,既可根据本教程的章节顺序,按应用领域讲解案例,也可按数学要求的深浅将案例重新排序,依次讲解。需要时,可补充讲解一些必要的数学准备知识。

学习数学模型不能只靠书本知识的学习。通过自身的实践,动手建立模型,才是学习数学模型和数学建模的好方法。我们在大多数案例后都有“实践与思考”,它提供两种类型的问题:一类是帮助读者理解正文,另一类是提供读者建模实践。后者可组织课题小组合作完成。本书附录提供的国内外数学建模竞赛中有关经济、管理的赛题,也可作为实践课题的素材。

为适应本教程的编写要求,本书的编著者由熟悉数学模型教学的教师和活跃在经济管理第一线、熟悉经济管理科学的领导和管理干部组成,他们是:谭永基(复旦大学数学科学学院教授,博士生导师,中国工业与应用数学学会常务理事、数学模型专业委员会主任,上海市工业与应用数学学会理事长,全国大学生数学建模竞赛组织委员会委员);朱晓明(博士,教授级高级工程师,上海市人大常委会副主任,上海交通大学经济与管理学院名誉院长、教授、博士生导师,曾任上海市工业与应用数学学会副理事长,中国工业与应用数学学会副理事长);丁颂康(上海海事大学基础部教授,中国工业与应用数学学会理事,上海市工业与应用数学学会常务理事);陈恩华(管理学博士,高级经济师,上海金桥集团有限公司总经理助理);池洪(工学博士,高级工程师,上海市虹口区人民政府副区长,曾任上海市工业与应用数学学会副秘书长);蔡志杰(理学博士,复旦大学数学科学学院副教授)。

此外,上海市人大常委会陈晓明硕士,太平洋保险集团刘金钵博士,上海银行谢玲芳博士,上海交通大学博士研究生季成、颜炳祥、杨海,东华大学博士研究生黄凌云等也参加了本书的编写工作。

高等教育出版社高等理工出版中心和数学分社对本书的出版给予了大力的支持和热情的关心,特别是徐刚同志和李艳馥同志对本书的内容、结构乃至书名都提出了许多有益的建议,对本书的顺利出版和质量的提高很有裨益。对此我们表示衷心的感谢。

编著者

2005 年 11 月 30 日于上海

目 录

第一章　绪论

近几十年来,随着科学技术的发展和社会的进步,数学这一重要的基础学科迅速地向自然科学和社会科学的各个领域渗透,并在工程技术、经济建设及金融管理等方面发挥出愈来愈明显、甚至是举足轻重的作用.“高技术本质上是一种数学技术”的提法,已为愈来愈多的人所认识和接受.要充分发挥数学的作用,首先就要懂得如何将所要考察的现实世界中的问题归结为一个相应的数学问题,即数学模型,然后才有可能利用数学的工具,去寻找解决原有的实际问题的途径.而整个过程,就是通常所说的数学建模的过程.这里,我们将介绍什么是数学模型,数学模型的特点,数学建模的方法、主要步骤,数学模型的分类,数学模型在经济、管理中的重要作用.

第一节　数学模型及其分类

现实问题往往是十分复杂的.人们在长期实践的过程中创造了解决现实问题的模型化方法,即摒弃问题中的一些与本质无关或次要的因素,建立一个“模型”.由于模型更加突出了事物的本质,人们通过解决这个模型化的问题就可获得有效解决现实问题的方法和途径.

在现实世界的许多问题中,数、形和模式是起支配作用的,抓住问题的数量本质,经过简化所得的模型就是数学模型.

在方法论中,所谓模型,是相对于原型而言的一个概念.按照《辞海》的解释,“原型是指客观存在的对象客体”,也就是所考察的实际对象、系统或者过程,而“模型是具有与原型相似特点的替代物,是实体、系统或过程的简化、抽象和类比表示.”

本德(E. A. Bender)曾经给数学模型下了这样的定义:“数学模型是关于部分现实世界为一定目的而作的抽象、简化的数学结构”.也就是说,数学模型是用数学术语对部分现实世界的描述,是指对于现实世界的某个特定对象,为了某个特定目的,做出一些必要的简化和假设,运用适当的数学工具所得到的一个数学结构.

数学模型作为原型的替代物,它必须能反映现实,也就是要能够确切地反映所要讨论的实际问题的数量方面;同时作为一种模型,它不可能是现实世界的简单拷贝,它将忽略现实问题中的许多与数量无关的因素,有时还要忽略一些次要

的数量因素,做出必要的简化,从而在本质上能更加集中地反映现实问题的数量规律.

建立数学模型后,经过数学的演绎,推断得出数学上的结论.然后用这些结论去分析、解释原问题,得到解决现实问题的最终结果.

构建数学模型是一个复杂的过程.建立一个好的数学模型通常需要经过多次反复,即通过对现实问题的探求,经简化、抽象,建立初步的数学模型,再通过各种检验和评价发现模型的不足之处,然后作出改进.这样的过程有时需要经过多次反复,才能得到理想的模型.

不难看出,用数学解决现实问题的第一步就是建立数学模型,而数学建模是一个有丰富内涵的复杂过程,人们必须掌握数学建模的科学方法才能有效地解决各种现实问题.

下面,我们通过3个实例来说明数学建模的过程.

例1 均衡价格问题

经济学中有一个课题,就是市场均衡.微观经济学认为,商品的价格是由其供需关系决定的.如果市场上某种商品的价格使得该种商品的总需求等于总供给,则称这一商品市场达到均衡.这时的价格称为均衡价格,在此价格下,商品的供给量(也就是需求量)称为均衡数量.

首先建立供需与价格关系的数学模型.对于一般商品而言,市场对该种商品的需求量总是随着价格的上扬而有所下降,但是,生产厂商的积极性会随着价格的上扬而上升.用数学语言表示就是:商品的需求量 Q_d 是价格 P 的递减函数,记为 $Q_d(P)$,而商品的供应量 Q_s 是价格 P 的递增函数,记为 $Q_s(P)$.最简单的递增或递减函数是线性函数,因此,经济学中最简单的需求和供给函数模型分别为

$$Q_d(P) = -aP + b,$$

$$Q_s(P) = cP - d,$$

其中 a,b,c,d 均为非负常数.显然 $Q_d(P)$ 和 $Q_s(P)$ 分别是 P 的递减和递增函数.注意到当 $P=0$ 时,$Q_d=b$,即当该商品为免费时的需求量为 b,因此,b 称为社会极大需求量.而当 $Q_s(P)=cP-d=0$ 时,可解得 $P=d/c$,即当价格为 d/c 时,该商品的产量为0,即 d/c 为生产商能够承受的最低价格.

由此可见,虽然这两个供需与价格关系的函数模型十分简单,但它们确实反映了需求、供给和价格数量关系的本质特性,模型中的参数也有十分明确的经济学意义.

所谓均衡价格,就是使得 $Q_d(P)=Q_s(P)$ 的价格 P.由 Q_d,Q_s 的表达式,应有

$$-aP + b = cP - d,$$

由此解得均衡价格

$$\overline{P}=\frac{b+d}{a+c}$$

和相应的均衡供求量

$$\overline{Q}=\frac{cb-ad}{a+c},$$

这就解决了均衡价格的问题. 从上述通过数学建模解决均衡价格问题的过程,我们可以看出,虽然数学模型简单,但却能反映供求与价格关系的特性,揭示均衡价格这一经济现象的本质.

然而,在实际中,有些商品的供求与价格之间的关系不能用简单的线性关系来描述,因此,在经济学中还有一些更加复杂的模型. 比较典型的需求函数模型有 $Q_d(P)=-aP^2+b$, $Q_d(P)=be^{-aP}$, $Q_d(P)=-a\sqrt{P}+b$,它们分别称为二次函数模型、指数函数模型和根式函数模型,另外还有形如 $Q_d(P)=\frac{a}{P+c}-b$ 的分式函数模型. 供给与价格关系的函数模型还有分式函数模型 $Q_s(P)=\frac{aP-b}{-cP+d}$. 以上各模型中的 a,b,c,d 均为非负常数.

当然,均衡价格还会受到其他因素的影响,如一些随机自然因素或类似替代产品的竞争对需求的影响,一些客观因素对供给的影响等等. 要考虑这些因素必须建立更加精细的数学模型.

例 2　国民总收入(GDP)增长模型

凯恩斯(John M. Keynes)建立了著名的国民经济增长模型. 令 Y 表示国民总收入,C 表示总消费,那么应有

$$C=c_0+cY,$$

其中 c_0 为最低消费,它是由储蓄等支持的;$c(0<c<1)$ 称为"边际消费",反映了消费随收入增加而增加的倾向.

另外总支出 E 为消费和投资两部分之和,令 I 表示投资,则有

$$E=C+I.$$

由总收入等于总支出:$Y=E$,即解得

$$Y=\frac{c_0+I}{1-c}.$$

由于 $0<c<1$, $\frac{1}{1-c}>1$, c 越接近 1,国民收入越大. 这解释了扩大消费可以促进国民总收入的增加,这种效应称为乘数效应.

设 G 为政府的投入(如投资基本建设等),则总支出可改写为

$$E=C+I+G,$$

此时可解得

$$Y=\frac{c_0+I}{1-c}+\frac{G}{1-c},$$

其中

$$\frac{G}{1-c}=\Delta Y$$

为由政府投入导致的国民总收入增量. 显然,政府的支出 G 拉动了国民收入增加 $\frac{G}{1-c}$,超过了 G. $\frac{1}{1-c}$称为乘数,乘数越大,政府的干预能力越大.

这个模型很清晰地解释了,为了保 GDP 增长,最有效的措施是扩大内需(增大模型中的 c). 增加政府的投入也会导致 GDP 增长,而内需越大,政府投入对 GDP 增长的作用越大.

例 3 生物种群中生物的数量

在生态学和环境经济学中经常需要计算某一地区某种生物群体中生物的总数. 生物群体的总数原来是整数,因此是离散量. 但当群体较大时,不妨用一个连续量(实数)来表示. 设时刻 t 该生物群体的数量为 $N(t)$,又设该群体的自然增长率(出生率与死亡率之差)为常数 r,即单位时间一个生物会导致增加 r 个生物. 考察时段 $[t,t+\Delta t]$ 该种群数量由自然增长引起的变化,应成立

$$N(t+\Delta t)-N(t)=rN(t)\Delta t,$$

等式左边表示生物种群总量的变化,而右边表示在该时段内生物的自然增长. 将等式两边同除以 Δt,并令 $\Delta t\to 0$,即得

$$\frac{\mathrm{d}N(t)}{\mathrm{d}t}=rN(t),$$

若在初始时刻 $t=0$ 生物总数为 N_0,即 $N(0)=N_0$. 这二式结合,

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}t}=rN,\\ N(0)=N_0,\end{cases}$$

就构成生物群体总数增长的数学模型.

在模型的微分方程两边同乘 e^{-rt},移项后得

$$\frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}t}\mathrm{e}^{-rt}-r\mathrm{e}^{-rt}N=0$$

或

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(N\mathrm{e}^{-rt})=0,$$

积分得

$$N(t)e^{-rt} = C \text{ 或 } N(t) = Ce^{rt},$$

其中 C 为任意常数. 令上式中的 $t=0$,注意到 $N(0)=N_0$,即得 $C=N_0$,从而有

$$N(t) = N_0 e^{rt}.$$

由此可见,生物群体总数是指数增长的,这一增长规律称为马尔萨斯(Malthus)生物总数增长定律,相应地,上述数学模型称为马尔萨斯模型.

有人观察过一块土地上田鼠的数量,开始时为 2 只,2 个月后为 5 只,6 个月后为 20 只,10 个月后增加到 109 只. 若设田鼠的自然增长率为 40%,那么田鼠数量可用 $N(t)=2e^{0.4t}$ 来计算,用它分别计算 2 个、6 个和 10 个月的田鼠数,并与观察到的田鼠数比较,如表 1-1-1 所示.

表 1-1-1

月　数	0	2	6	10
观察数	2	5	20	109
计算数	2	4.5	22.0	109.2

由此可见用马尔萨斯生物总数增长定律来描述 10 个月中田鼠总数增长是相当精确的.

但按月增长 40% 的马尔萨斯增长定律,3 年后田鼠数量将达到 $N(36) = 2e^{0.4\times 36} \approx 3\,588\,150$,10 年后超过 1.4×10^{21} 只,且随着 $t\to+\infty$ 田鼠数量趋于无穷,这显然是不合理的,模型需要修改.

马尔萨斯模型的一个十分明显的缺陷是没有反映环境和资源对群体自然增长率的影响,没有反映各生物成员之间为了争夺有限的生活场所、食物所进行的竞争,没有反映食物和养料的紧缺对增长率的影响. 为克服这一缺陷,我们引入自限模型,又称逻辑斯蒂(logistic)模型.

设在所考察的自然环境下,群体可能达到的最大总数(称为生存极限数)为 K,若开始时群体的自然增长率为 r,随着群体的增大,增长率下降,一旦群体总数达到 K,群体停止增长,即增长率为零. 所以增长率是群体中生物总数的函数,可以用 $r\left(1-\dfrac{N(t)}{K}\right)$ 来描述,于是数学模型就可以改进为

$$\begin{cases} \dfrac{dN}{dt} = r\left(1-\dfrac{N(t)}{K}\right)N, \\ N(0) = N_0. \end{cases}$$

采用分离变量法可以求解上述模型. 模型的微分方程可以改写为

$$\frac{K\,dN}{(K-N)N} = r\,dt,$$