函数图象手册

Н．А．维尔钦科
И．И．利亚什科 著
К．И．什维佐夫

内蒙古民族师范学院数学系

目　　录

第一部分　用初等方法作函数图象

第一章　数·变量和函数的基本知识

§1 数·变量·函数

实数集合　无限小数（正的和负的）的全体和零组成实数集合R（数的连续统）。这个集合由两部分（子集合）组成：有理数子集合（正，负整数和分数以及零）和无理数子集合。

每个有理数都能表示成$\pm\frac{p}{q}$的比的形式，其中p和q为自然数1，2，…，n，…，而且它是循环小数，无理数是非循环小数。例如：$\frac{1}{3}=0.333\ldots$，$5=\frac{5}{1}$是有理数；$\pi=3.14159\cdots$，$\sqrt{2}=1.4142\cdots$是无理数。

实数集合的基本性质

1. 集合是有序的，即该集合中的任意两个数a和b，或者相等，或者一个比另一个大，序表示为：

$a<b$　（a小于b），　$a\leq b$　（a不大于b），

$a>b$　（a大于b），　$a\geqslant b$　（a不小于b）。

2. 集合是稠密的，即任意两个无论多么邻近的实数a和b之间，都包含无限的中间实数集合，（有理数和无理数）。

3. 集合是连续的，这就是说任何分划都能确定唯一的实数a。这一实数a能使A组的数同B组的数分开，至于a本身可能是A组的最大数（此时B组中没有最小数），也可能是B组的最小数，（此时A组中没有最大数）。

集合D的分划是指将全体实数分为两组；下组A和上组B，而且，每个实数只能包含在一组中，下组A中的任意数均小于上组B中的任意数。

实数用数轴上的点表示很方便。数轴是一条选定原点O、规定某个方向为正方向及选定比例尺的（作为测量长度单位的线段）无限直线。每个实数都对应于数轴上的一个且只是一个点。数0和点0相对应。若数x是正数，则用放在点0右边、距离为$OP=x$的点P表示；若数x是负数，则用放在点0左侧，距离为$OQ=-x$的点Q来表示（图1）。相反的论断：数轴上的每个点是一个，也只

能是一个实数的图象，这也是正确的。由此得出，全体实数和数轴的所有点之间存在相互一一的对应。为了实用的目的，我们提出下列的论断：每一个无理数都能借助于有理数以任意精确程度表示出来。

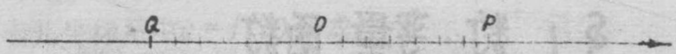

Рис1. 数轴：0是原点；点P和Q放在数轴上

实数分为两组：实代数数（整系数代数方程实根）和实超越数（其余的实数）。任何有限或无限实数的全体称为**数集**。集合是用大写的拉丁字母：X、Y、Z…表示。属于它们中间的数则用小写的字母：x、y、z表示。例如：$x \in X$（x属于X）。若元素x不属于X，则记为：$x \overline{\in} X$。

我们来研究两个集合A和B。若集合A的每个元素同时是集合B的元素，则称集合A是集合B的**子集合**，记作：$A \subset B$，或者$B \supset A$。若$A \subset B$且$B \subset A$，则称：集合A和B相等，记作：$A = B$。不包含任何一个元素的集合称为**空集合**，用φ表示。

集合上的最简单运算——併（和）、交（乘积）、差。

设给出两个集合A和B。

含有集合A和B的所有元素，而不含有其它任何元素的集合C称为集合A和B的**併**（和）（表示为：$C = A \cup B$）。

含有集合A和B的所有公共元素，而不含其它任何元素的集合D称为集合A和B的**交**（乘积）（表示为$D = A \cap B$）。

由集合A中所有不属于集合B的那些元素组成的，而不包含其它任何元素的集合F称为集合A和B的**差**，（记作：$F = A^{B}$）。

在数集合中，我们提出如下概念：

有界闭间隔（区间、线段）$X = [a;b]$是包含满足不等式$a \le x \le b$的所有数x的集合X。在数轴上，这个数的全体表示包括它的端点在内的线段a·b（图2，а）；

有界开间隔（区间）$X = (a;b)$是包含满足不等式$a < x < b$的所有数x的集合X。在数直线上，这些数的全体表示没有端点的线段a·b（图2，δ）；

Рис. 2. 数轴：а—区间[a;b]；δ—区间(a;b).

有界半开(或半闭)区间 $[a;b)$ 和 $(a;b]$ 是包含满足不等式 $a \le x < b$ 和 $a < x \le b$ 的所有数的集合 X。在第一种情况下，在数轴上对应的线段包含左端点，而不包含右端点；第二种情况，包含右端点，而不包含左端点。

半无限区间：

$(b;\infty)$ 是集合 X，它的元素满足 $X > b$；

$(b;\infty)$ 是集合 X，它的元素满足 $x \geqslant b$；

$(-\infty;a)$ 是集合 X，它的元素满足 $x < a$；

$(-\infty;a)$ 是集合 X，它的元素满足 $x \le a$。

在数轴上，这些集合用相应的无限半直线的所有点来表示。

所有实数的集合(整个数轴)称为无限区间，表示为 $(-\infty, \infty)$。

设 a 是任意数。形如：$(a-\delta; a+\delta)$ 的任意开区称为点 a 的 δ 邻域，换言之：点 a 的 δ 邻域是满足条件 $|x-a| < \delta$ 的所有点 x 的集合，其中 δ 是某个正数(图3)。点 $x=a$ 的邻域是包含 a 点的某个 δ 邻域的任意集合，

满足条件：$|a| = \begin{cases} a, & 若\ a > 0, \\ -a, & 若\ a < 0, \\ 0, & 若\ a = 0 \end{cases}$

的非负数，称为数 a 的绝对值，或者模(表示为 $|a|$ 读作《模 a》)。

绝对值的基本性质：

$$|a| \geqslant 0$$

若 $|a| = 0$ 则 $a = 0$.

$$||a|-|b|| \leqslant |a+b| \leqslant |a|+|b|,$$

$$||a|-|b|| \leqslant |a-b| \leqslant |a|+|b|,$$

$$|ab| = |a| \cdot |b|,$$

$$\left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|} \quad (b \neq 0).$$

若 $|a| \leqslant A$ 和 $|b| \leqslant B$ 则 $|a+b| \leqslant A+B$ 和 $|ab| \leqslant AB$.

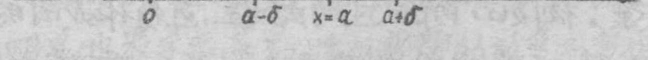

Рис.3 点 a 的 δ 邻域

我们来研究非空集合。对于 $\forall x \in X$，满足不等式 $x \le M$ 的任意数 M 称为集合 X 的上界。

对于 $\forall x \in X$，满足不等式 $x \geqslant m$ 的任意数 m 称为集合 X 的下界。具有上界的集合称为上边有界。具有下界的集合称为下边有界，上边有界和下边有界的集称

有界的。数M中的最小数，称为有界集合的**上确界**，而数m中的最大数，则称为有界集合的**下确界**。

若M^*是有界集合X的上确界（$M^*=\sup X=\sup\{x\}$），则对任意的无论多么小的数$\varepsilon>0$，总能找到一个数$x_0\in X$，满足$x_0<M^*-\varepsilon$。

若m^*是有界集合X的下确界（$m^*=\inf x=\inf\{x\}$），则对任意的无论多么小的数$\varepsilon>0$，总能找到一个数$x_0=\in x$，满足$x_0<m^*+\varepsilon$。若集合X上边（下边）有界，那么它就有上确界（下确界），也就是说，任何有界集合都有上确界和下确界。

常量和变量 在自然界和生产过程中，一些量是变化的（即量的数值变化）而另一些量是不变的。例如：在匀速运动中，时间和距离变化，而速度却保持不变；在封闭的容器中加热气体时，气体的压力和温度变化，而它的质量和体积却不变。

在某一过程中，能取不同数值的量称为**变量**。在某一过程中，不能改变数值的量称为**常量**。在任何条件下，都能保持同一数值的量称之为**绝对常量**，例如，$\pi=3.141\cdots$。

变量的特征很不相同。一些只能取正整数，而另一些可取无界的有理数，等等。变量区别为取有限或无限的孤立数值的离散变量，和在取两个值：$x=a$和$x=b$（次序不重要）的同时，也取区间$a<x<b$的所有值的连续变量。

被研究的量x所取值的集合，称为变量x的**变化区域**，或者称为x的值域。若每个变量后边的值大于前边的，则称它是**递增的**。若每个后边的变量值小于前边的，则称它是**递减的**。递增和递减的变量称为**单调的**。若变量的变化区域是有界集合，则变量是有界的。

函数的概念 在研究和讨论各种自然现象和解决一些技术问题时，需要研究的，主要的不是孤立的变量的值，而是它们之间的联系，一个变量与另一个变量的依赖关系。在自然界中不存在那种与其它物理量没有联系的孤立变化的变量。例如，所通过的路程，可看作是因时间的变化而改变的量，即所通过的路程是时间的函数。又如：炮弹飞行的距离和命中的准确性，是由炮弹的质量，炮口升高的角度、炮弹的初速度、风向和风力以及其它许多因素所决定的。为了从这些具体实例中抽象出具体量之间的关系，所以在数学中引入了函数关系，或者函数的概念。

我们来研究两个集合：X和Y、它们的元素可以是任何对象。设，集合

Y中的一个元素按着某种规律与集合X的每个元素对应，这个元素用 $y=f(x)$ 表示。这时，f称为从X到Y里的函数※（或者称为**集合X到集合Y里的映射**）。这样，若给出集合X到集合Y的映射f，就说，在集合X上确定了函数f，函数f从集合Y中取值 $y=f(x)$。集合X称为函数的定义域，而集合 $f(X)$ 称为函数f的值域。显然，$f(x)=y$。变量x称为**自变数或者自变量**。等式 $y=f(x)$ 表示，把规律f应用在自变量x上，可求出对应这个值x的函数y的值（图4）。例如，当x取 $[X=(-\infty+\infty)]$ 的所有值时，等式 $y=x^3+5$，确定 y 是x的函数，即是确定对于任何实数值x都有对应的函数y的法则，即在这种情况下，符号f表示如下的运算：求值x的立方，再加上5。

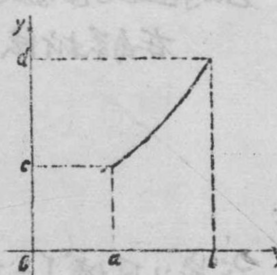

Рис. 4. 函数 $y=f(x)$ 的定义域是区间 $[a;b]$，函数的值域是区间 $[c;d]$。

函数的表示法 给定函数就意味着建立一个规则（法则），利用这个规则由给出的自变量的值，求出与其对应的函数值。下面我们来研究表示函数的某些方法。

列表法 利用这种方法时，按确定的次序写出自变量一列值 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 和与其对应的函数值 $y_1, y_2, \cdots, y_n$。如对数表、三角函数表等等就是这样。在技术和自然科学等方面，函数的列表法是非常普及的。对于通过程式现象、连续观察到的数值结果，都可以写成表的形式。例如，在气象站里，可以把一天内测量的气温编成下表：

t（小时）	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
T（C°）	-1	-2	-2.5	-2	-0.5	1	3	3.4	3.6	3.9

这个记录确定温度T是时间t的函数：$T=f(t)$。

函数列表法的优越性在于，它不用再加另外的测量和计算，就能立刻确定某些具体的函数值。此法不足的是：函数值确定的不完全，仅仅是自变量的某些值的函数，不能明显地表示出函数随自变量的改变而变化的特性。

图象法 平面上的所有坐标满足已知方程的点的集合，称为函数 $y=f(x)$ 的图象。函数图象可以是某个曲线，个别的也可以是直线，也可以是平面上孤立点的集合等等。

函数的图象法，不能精确地确定出变量的数值。但是，它比其它方法具有

※ 术语"函数"是布莱尼茨（1692年）引入的，而符号 $f(x)$ 是尤拉引入的。

最大优点是直观性强。

在工程技术和物理学上，经常用函数的图象法，而且，有时图象则是它们唯一可用的方法。例如，利用自动地记录一个变量依赖于另一个变量的自动记录仪器（气压图、温度图等）。

解析法 这种方法可以利用公式清解析地给出函数。这种方法能按自变量 x 的每一个数值，精确地或精确到某种程度地求出和它对应的函数 y 的数值。

在解析法中，函数能用几种不同的公式给出。例如函数

$$f(x)=\begin{cases}\cos x, & \text{当} -\pi \leq x \leq 0 \text{时}, \\ 1, & \text{当} 0 < x < 1 \text{时}, \\ \frac{1}{x}, & \text{当} 1 \leq x \leq 2 \text{时},\end{cases}$$

在定义区域 $[-\pi;2]$ 上，是用三个公式给出的。

若 x 和 y 之间的关系用解出 y 的公式给出，即 $y=f(x)$ 的形式，就说，由 x 确定的函数是用显式给出，例如：

$$y=6x-2, \quad y=x^{2\ln x}.$$

若 x 和 y 的值之间用某种形如 $F(x,y)=0$ 的方程联系的，即公式中没有解出 y，则说，函数 $y=f(x)$ 是用隐式给出的，例如方程 $x^2+y^2+r^2=0$ 隐式确定两个函数：$y=\pm\sqrt{r^2-x^2}$。

我们指出，不是任何隐式给出的函数，都能表示成显式形式：$y=f(x)$。反之，任何显函数 $y=f(x)$，都能表示成隐式形式 $y-f(x)=0$。

还须指出，解析方法表示函数还有一种变形，此时自变量 x 和函数 y 同时是第三个量——参变量 t 的函数：$x=\varphi(t)$，$y=\psi(t)$，其中 t 在集合 T 上取值。这里，参变量 t 在其变化区域 T 中的每个值 t_0，都对应 x 和 y 的数值 $x_0=\varphi(t_0)$ 和 $y_0=\psi(t_0)$。这一对应确定了 y 是 x 的函数（或者 x 是 y 的函数）。这样给出的函数关系称为**参数方程**。

若将值 x 和 y 看作是坐标平面 xOy 上点的坐标，则每个 t 值对应平面的确定点。若 t 由 t_1 变到 t_2，则点在平面上画出某条曲线。若从方程中消去参变量 t，则得到以显式形式给出的函数：$y=f(x)$。曲线的参数表示，广泛地应用在力学上和几何学的某些理论研究等方面。

解析法是表示函数的最常用的方法，在数学分析中，它是表示函数的

最基本的方法。函数解析表示法的主要优点是：运算性，即对定义域中的任意变数值能够计算函数值，以及对给出的函数能够应用数学分析这个工具。不足的是：不够直观，有时必须得完成很复杂的计算。

叙述法 这种方法是以叙述表示函数间关系。

例 1. 函数 $E(x)$ 是《数 x 的整数部分》。一般用 $E(x)=[x]$ 表示不超过 x 的最大整数部分，换句话说，若 $x=n+r$，其中 n 是整数（可能是负的）和 $0\leq r<1$，则 $[x]=n$。在区间 $[n;n+1)$ 上，函数 $E(x)=[x]$ 是常数。在这个区间上 $[x]=n$。

$$E(2,3)=2\text{，}\quad E(-\pi)=-4\text{。}$$

例 2. 迪里赫列函数定义为：

$$\chi(x)=\begin{cases}1\text{，当 } x \text{ 是有理数时，}\\ 0\text{，当 } x \text{ 是无理数时。}\end{cases}$$

此函数定义在整个实数集合上，这个函数的解析表达式已经求出但相当复杂，所以没有实用价值。叙述法能给出简明而确切的函数定义。

例 3. $y=\{x\}$。这样表示的函数，称为数 x 的分数部分。更确切说，$y=\{x\}=x-[x]$，其中 $[x]$ 是 x 的整数部分。这个函数对所有的 x 有定义。若 x 是任意的实数，则把它表示成 $x=n+r$ 形式（$n=[x]$），其中 n 是整数和 $0\leq r<1$，得到 $\{x\}=n+r-n=r$。例如：

$$\{0\}=0\text{，}\{1\}=\{2\}=\cdots=\{n\}=0\text{，}$$
$$\{1.37\}=0.37\text{，}\{-1.3\}=-1.3+2=0.7\text{。}$$

例 4. 黎曼函数是这样给出的：

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{n}\text{，} & \text{当 } x=\dfrac{m}{n} \text{ 时，其中 } m \text{ 和 } n \text{ 是互为质数，}\\ 0\text{，} & \text{当 } x \text{ 是无理数时。}\end{cases}$$

这里，函数是以描述 x 和 $f(x)$ 之间的对应规律给出的。

例 5. 所谓算术函数是这样的函数，即以自然数为自变量的函数，而且这种函数只能取自然数值，例如 $n!=1,2,3,\cdots,n$，或者表示数 n 的因数个数的函数 $\tau(n)$，例如 $\tau(16)=5$，$\tau(12)=6$。再如，函数 $\varphi(n)$ 表示在自然数列 $1,2,3\cdots,n$ 中，与 n 互质的数的个数，例如 $\varphi(12)=4$，$\varphi(16)=8$。

半图象法　这里，函数值是线段形式，而自变量值是数的形式，这个数，是指明函数值的线段端点上所记录的数。例如，在温度表的衬板上，有分划均等的刻度，上面记有数字，这些数字是自变量的值（温度），它们是在因温度变化导致体积膨胀而引起的水银柱伸长（函数值）的位置上。

§2. 函数的分类

反函数　若函数 $y=f(x)$ 取值是一一对应的，则称它是可逆的。

设 f 是把集合 E 映射到集合 M 上。若集合 M 中的任何元素 y 上，都存在集合 E 中的唯一的元素 $x=g(y)$，使 $f(x)=y$，则称映射 f 是可逆的。对于 y 的逆映射称为反函数，记作 f^{-1}。同时，函数 $y=f(x)$ 称为原来的函数。

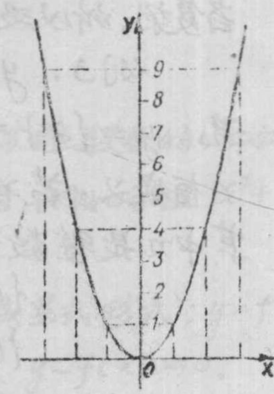

Рис. 5. $y=x^2$.

函数 f 的值域是反函数 f^{-1} 的定义域，而函数 f 的定义域是 f^{-1} 的值域。

函数 $y=f(x)$ 和 $x=f^{-1}(y)$ 称为互为反函数。

例如：

$$f(x)=\frac{1}{x}\ (x\neq 0),\quad f(x)=\frac{x}{x-1}\ (x\neq 1),\quad f(x)=\frac{1-x}{1+x}\ (x\neq -1)。$$

对于某个函数，有反函数的充分必要条件是，函数定义域中不同的自变量值对应着不同的函数值。由此得知，为了证明某个函数是不可逆的，只须证明有某两个自变量值 $x_1\neq x_2$ 使 $f(x_1)=f(x_2)$。

例如，函数 $f(x)=x^2$（图5），$x\in(-\infty;+\infty)$，没有反函数，因为它是从一个点：$9=f(-3)=f(3)$ 对应两个不同的点：$-3\in(-\infty;+\infty)$ 和 $3\in(-\infty;+\infty)$。而函数 $y=f(x)=x^2$，$x\in[0;+\infty)$，有反函数 $x=\sqrt{y}$，因为它是从两个不同点：$y_1=x_1^2$，$y_2=x_2^2$ 对应 $[0;+\infty)$ 中的任何两个不同的点 $x_1\neq x_2$。事实上，$y_1-y_2=x_1^2-x_2^2=(x_1-x_2)(x_1+x_2)\neq 0$。

根据原来的函数 $y=f(x)$ 的图象，能够很容易地确定该函数是否有反函数。若任何平行于 Ox 轴的直线与原来函数的图象相交在

不超于一个交点上，则反函数 $x=f^{-1}(y)$ 存在。假如这些直线中存在至少一条与原来的函数图象相交于两个或多个点上，则反函数不存在。若原来的函数 $y=f(x)$ 在集合 X 上是严格单调的，则函数 $x=f^{-1}(y)$ 存在，并且在集合 y 上也是严格单调的。

复合函数 设已知两函数：定义在集合 Z 上的函数 $y=f(z)$ 和定义在集合 X 上的函数 $z=g(x)$。若 $g(x)\subset Z$，则在集合 X 上能够定义一个函数，它使每个 $x\in X$ 对应 $g(x)=z\in Z$。这时，在集合 X 上函数 $y=f[g(x)]=f_1(x)$ 是确定的。这个函数称为 x 的**复合函数**，或者函数 f 和 g 的复合。

复合函数 $y=f[g(x)]$ 的定义域或者是函数 $z=g(x)$ 定义域的全体，或者是它的一部分，但这部分中确定的 z 值不超出函数 $f(z)$ 的定义域。

例 1. 设 $y=\sin z$，其中 $z=x^3$。函数 $y=\sin z$ 定义在全数轴上，函数 $z=x^3$ 也是定义在全数轴上。这两个函数的复合 $y=\sin x^3$，是定义在 $(-\infty;+\infty)$ 上的 x 的复合函数。

例 2. $y=\sqrt{4-x^2}$ $(y=\sqrt{z},\ z=4-x^2)$。函数 $y=\sqrt{z}$ 在 $z\geqslant 0$ 时有意义，即 $4-x^2\geqslant 0$ $(|x|\leqslant 2)$，然而函数 $z=4-x^2$ 在一切 x 值上都有意义。函数 $y=\sqrt{4-x^2}$ 的定义域是：$[-2;2]$。

在研究复合函数时，应注意到组成的函数的定义域。例如，函数 $y=\arccos z$ 和 $z=3+x^4$，不能表示成复合函数。事实上，表达式 $y=\arccos(3+x^4)$ 不能给出 x 的复合函数，因为函数 $y=\arccos z$ 是定义在 $[-1;1]$ 上，而函数 $z=3+x^4$ 的值在 x 取任何值时，都不属于区间 $[-1;1]$。

可以研究的复合，不仅是两个函数的，而且也是任意多个函数的。

初等函数 下列函数称为基本初等函数：

幂函数 $y=x^2$，其中 $\alpha\in R$；

指数函数 $y=a^x$，其中 $a>0$，$a\neq 1$，

对数函数 $y=\log a^x$，其中 $a>0$，$a\neq 1$；

三角函数 $y=\sin x$，$y=\cos x$，$y=tg\,x$，$y=ctg\,x$。

反三角函数 $y=\arcsin x$，$y=\arccos x$，$y=arctg\,x$，$y=arcctg\,x$。

基本初等函数，经过有限次运算（加、减、乘、除）和复合所构成的函数是初等函数，例如：

$$y=\sqrt{1+3\sin^3 x},$$

$$y=\frac{\log_4 x+3\sqrt[3]{x}+3\operatorname{tg} x}{10^{2x}+2x+4}。$$

我们命名几类初等函数。

有理整函数，或者多项式。

$$y=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_n,$$

其中n是非负整数，（多项式的次数），$a_0, a_1, \cdots a_n$是常数（系数）。

有理分函数，它是两个有理数函数的商：

$$y=\frac{a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_n}{b_0x^m+b_1x^{m-1}+\cdots b_m},$$

例如

$$y=\frac{4x^3-2x^2+5}{2x+1},\quad y=\frac{x}{x^4-1}。$$

有理数函数和有理分函数组成有理函数类。

无理函数是借助于有理函数和有理非整数指数幂函数的复合而成的函数，例如：

$$y=\frac{3x^2+\sqrt{x^2-1}}{\sqrt[3]{1+6x}-4},\quad y=\sqrt[3]{x+1}。$$

有理函数和无理函数组成代数函数类。代数函数是满足方程

$$A_0(x)y^n+A_1(x)y^{n-1}+\cdots A_{n-1}(x)y+A_n(x)=0$$

的任意函数$y=f(x)$，其中n是正整数，$A_0(x), A_1(x), \cdots A_{n-1}(x), A_n(x)$是$x$的整有理函数，且$A_0(x)\neq 0$。

例3. $y=\sqrt[3]{x^2+1}$是代数函数，因为它满足方程

$$y^3-x^2-1=0。$$

例4. 方程$y^5+y-x^3=0$定义的函数是代数函数，但这个函数不是显代数函数，因为从高等代数中知道的五次或更高次的代数方程，一般说来没有根式解。在这样情况下，我们得到隐代数函数。

不是代数函数的初等函数称为超越函数，例如：$y=\cos x$.

$y=2^x$，$y=\log_2 x$。

由此可见，所有的初等函数分为代数函数和超越函数。

单值函数和多值函数 若集合X的每个元素x，按照某个法则与集合y中的不是一个，而是n个，甚至是无穷多个的元素相对应，则函数称为多值的。如 $y=\pm\sqrt{x}$ 是双值函数（常常不是研究这个双值函数，而是分别研究两个单值函数：$y=+\sqrt{x}$ 和 $y=-\sqrt{x}$，即双值函数的分支）；$y=\mathrm{Arc}\sin x$ 是多值函数，等等。

注：虽然现在数学分析中，不研究多值函数，但考虑到现有的科技文献情况，所以目前在研究中还不能消去它。

有界函数和无界函数 定义在集合X上的函数f称为在集合 $X_1\subseteq X$ 上是有界的，假如说，在集合 X_1 的函数值集合 $f(X_1)$ 是有界的，也就是说，假如存在常数m和M，对 X_1 的任何值x都满足不等式，

$$m\leq f(x)\leq M。$$

反之称函数是无界的。

数 $m_0=\inf\limits_{x\in X_1}\{f(x)\}$ 称为函数 $f(x)$ 在集合 X_1 上的下确界，而数 $M_0=\sup\{f(x)\}$ 则称为函数 $f(x)$ 在集合 X_1 上的上确界。

差 M_0-m_0 称为函数在集合 X_1 上的振幅。

例5. $f(x)=\sin x$ 在整个数轴上是有界的，因为对任意的x，都满足 $|\sin x|\leq 1$。

例6. $f(x)=a^x$ 是下方有界的，因为对任何x，都是满足不等式 $0<a^x$。

例7. $f(x)=\mathrm{tg}\,x$ 在 $[-\frac{\pi}{4};\frac{\pi}{4}]$ 上是有界的，因为在这个区间上 $|\mathrm{tg}\,x|\leq 1$，在任何 $-\frac{\pi}{2}<a<b<\frac{\pi}{2}$ 的区间 $[a;b]$ 也同样。但是，这个函数在 $[0,\frac{\pi}{2}]$，$(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2})$ 上也是无界的。

若函数 $f(x)$ 在点 x_0 的某一邻域内有界，则称 $f(x)$ 在 x_0 点上是有界的。函数 $y=f(x)$ 在 $[a;b]$ 上有界的充分必要条件是，使它在这个区间的任何点上都有界。

单调函数 若对集合X中的任意两点 x_1 和 x_2，当 $x_1<x_2$ 时，满足不等式 $f(x_1)<f(x_2)$，即自变量较大的值对应较大的函数值，则称函数 $f(x)$ 在集合X上是**递增的**。