

函数图象手册

Н. А. 维尔钦科
И. И. 利亚什科 著
К. И. 什维佐夫

贈入

请交换

内蒙古民族师范学院图书馆

内蒙古民族师范学院数学系

目 录

序 言

第一部分 利用初等方法作函数的图象	(1)
第一章 数·变量和函数的基本知识	(1)
§ 1、数·变量·函数	(1)
实数集合	(1)
实数集合的基本性质	(1)
常量和变量	(4)
函数的概念	(4)
函数的表示法	(5)
列表法(5) 图象法(5) 解析法(6) 叙述法(7) 半图象法(8)	
§ 2、函数的分类	(8)
反函数	(8)
复合函数	(9)
初等函数	(9)
单值函数和多值函数	(11)
有界函数和无界函数	(11)
单调函数	(11)
偶函数和奇函数	(12)
偶函数和奇函数的基本性质	(13)
周期函数	(13)
§ 3、函数的极限 函数的连续性	(16)
数列的极限	(16)
数列极限的基本定理	(16)
函数的极限	(17)
极限存在的准则	(17)
函数的单边极限	(18)
极限定理	(18)
无穷小函数的分类	(19)
函数的连续性	(22)
闭区间内连续函数的基本性质	(25)
第二章 函数作图的研究	(26)
§ 1、坐标系	(26)
笛卡儿坐标系	(26)
极坐标系	(27)

笛卡儿坐标系的变换	(28)
坐标原点的移动	(28)
坐标轴的旋转	(28)
一般情况(坐标原点的移动和坐标轴的旋转)	(29)
§ 2、在笛卡儿直角坐标系中函数的研究	(29)
函数的定义域	(29)
函数的值域·有界函数的图象	(31)
偶函数和奇函数·偶函数和奇函数的特性	(32)
对称性的形式·反函数的图象	(33)
函数 $y=f(x)$ 的图象关于垂直轴 $x=x_0$ 的对称性	(33)
函数 $y=f(x)$ 的图象关于点 $(x_0; y_0)$ 的对称性	(34)
反函数的图象	(35)
函数的周期性·周期函数的图象	(36)
函数的零点和符号	(38)
函数的单调性	(40)
函数的凸性	(41)
凸函数的某些性质	(41)
函数图象的特殊点	(44)
函数图象的渐近线	(45)
研究函数的次序和绘制函数图象的步骤	(47)
第三章 基本初等函数的图象	(47)
§ 1、幂函数	(47)
自然数幂的幂函数	(48)
负整数幂的幂函数	(49)
有理数幂的幂函数	(50)
无理数幂的幂函数	(53)
§ 2、指数函数	(54)
§ 3、对数函数	(55)
§ 4、三角函数	(56)
§ 5、反三角函数	(58)
第四章 图象的运算·在笛卡儿坐标系中图象的变换	(60)
§ 1、图象的算术运算	(60)
图象的加法和减法	(60)
图象的乘法和除法	(63)
§ 2、图象的简单变换	(67)
不变比例的变换	(67)
沿横轴平行移动(位移)	(67)
沿纵轴的平行移动(位移)	(67)

改变比例的变换.....	(68)
沿横坐标轴伸长或压缩.....	(68)
沿纵坐标轴伸长或压缩.....	(68)
作函数 $y = mf(Kx + b)$ 的图象.....	(70)
作解析式中含有绝对值符号的函数图象.....	(71)
作函数 $y = f(x)$ 的图象.....	(71)
作函数 $y = f(x) $ 的图象.....	(74)
作函数 $y = f(x) $ 的图象.....	(75)
第五章 初等函数的图象.....	(77)
§ 1、作复合函数的图象.....	(77)
§ 2、代数函数的图象.....	(88)
有理整函数的图象.....	(88)
一次函数.....	(88)
二次函数(二次三项式).....	(89)
三次函数(三次多项式).....	(90)
双二次函数.....	(92)
n 次多项式 $y = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + a_n$	(92)
形如 $y = (ax^2 + bx + C)^n$ 的函数, 其中 n 为正整数.....	(94)
有理分函数的图象.....	(95)
一次分式函数.....	(95)
有理分函数.....	(95)
无理函数的图象.....	(97)
形如 $y = \pm\sqrt{ax+b}$ 的函数.....	(97)
形如 $y = \pm\sqrt{ax^2+bx+C}$ 的函数.....	(97)
超越函数的图象.....	(100)
$y = Sjn^{\circ}x, \quad y = COS^{\circ}x,$ $y = tg^{\circ}x, \quad y = Ctg^{\circ}x$	(100)
$y = Sjn \pm p/gx, \quad y = COS \pm p/gx,$ $y = tg \pm p/gx, \quad y = Ctg \pm p/gx$	(101)
双曲线函数.....	(101)
反双曲线函数的形式.....	(102)
第六章 用参数给出函数图象.....	(103)
§ 1、用参数给出函数的研究.....	(103)
§ 2、用参数给出函数图象的作图例子.....	(104)
第七章 在极坐标系中的函数图象.....	(110)
§ 1、在极坐标系中函数的研究.....	(110)

§ 2、在极坐标系中函数的作图	(113)
函数作图的例子	(113)
在极坐标系中图象的变换	(118)
在极坐标系中函数图象的基本性质	(118)
第八章 隐函数的图象	(120)
§ 1、隐函数的研究	(120)
§ 2、隐函数图象的作图	(122)
§ 3、二次代数方程给出的曲线的研究	(126)
§ 4、含有绝对值符号的解析表达式的隐函数图象	(130)
§ 5、在极坐标系中作图方便的隐函数图象的作图	(132)
第九章 比较复杂的函数图象	(133)
§ 1、由几个解析表达式给出的函数图象的作图	(133)
§ 2、由某些递推关系给出的函数图象的作图	(135)
§ 3、形如 $y = [f(x)]$ 的函数图象的作图	(136)
§ 4、形如 $y = f([x])$ 的函数图象的作图	(137)
§ 5、形如 $y = f\{f(x)\}$ 的函数图象的作图	(138)
§ 6、形如 $y = f(\{x\})$ 的函数图象的作图	(139)
第二部分 利用导数作函数的图象	(140)
第一章 导数·微分及其在函数图象中的应用	(140)
§ 1、单变量函数的导数 导数的性质 初等函数的导数	(153)
微分法则	(141)
初等函数的导数	(141)
简单函数的高阶导数	(141)
§ 2、单变量函数的微分	(141)
§ 3、微分学的基本定理	(141)
§ 4、利用导数研究函数	(145)
函数的极大值和极小值	(147)
利用一阶导数研究函数的极值	(147)
利用二阶导数研究函数的极值	(148)
利用泰勒公式研究函数的极值	(149)
在区间上函数的最大值和最小值	(149)
曲线的凸性·拐点	(150)
§ 5、利用导数作函数的图象	(151)
§ 6、根据函数 $f(x)$ 的图象作函数 $f'(x)f''(x)$ 的图象	(152)
§ 7、洛比达法则	(154)

§ 8、方程根的近似计算	(156)
弦位法	(156)
切线法(牛顿法)	(156)
第二章 任何形式的函数图象的作图	(158)
§ 1、在笛卡儿坐标系中 $y=f(x)$ 形式	
函数作图的例子	(158)
§ 2、用参数给出函数图象的作图	(170)
利用导数研究参数给出的函数	(170)
用参数给出函数图象的作图例子	(171)
§ 3、隐函数的作图	(174)
§ 4、在极坐标系中函数图象的作图	(178)
第三章 某些重要的曲线	(180)
§ 1、二次曲线	(180)
§ 2、三次曲线	(183)
§ 3、四次和高次曲线	(186)
§ 4、超越曲线	(193)

第一部分 用初等方法作函数图象

第一章 数、变量和函数的基本知识

§1 数·变量·函数

实数集合 无限小数(正的和负的)的全体和零组成实数集合 R (数的连续统)。这个集合由两部分(子集合)组成:有理数子集合(正、负整数和分数以及零)和无理数子集合。

每个有理数都能表示成 $\pm \frac{p}{q}$ 的比的形式,其中 p 和 q 为自然数 $1, 2, \dots, n, \dots$, 而且它是循环小数,无理数是非循环小数。例如:
 $\frac{1}{3} = 0.333\dots$, $5 = \frac{5}{1}$ 是有理数; $\pi = 3.14159\dots$, $\sqrt{2} = 1.4142\dots$ 是无理数。

实数集合的基本性质

1. 集合是有序的,即该集合中的任意两个数 a 和 b , 或者相等, 或者一个比另一个大, 序表示为:

$$a < b \quad (a \text{ 小于 } b), \quad a \leq b \quad (a \text{ 不大于 } b),$$

$$a > b \quad (a \text{ 大于 } b), \quad a \geq b \quad (a \text{ 不小于 } b)。$$

2. 集合是稠密的,即任意两个无论多么邻近的实数 a 和 b 之间,都包含无限的中间实数集合(有理数和无理数)。

3. 集合是连续的,这就是说任何分划都能确定唯一的实数 a 。这一实数 a 能使 A 组的数同 B 组的数分开,至于 a 本身可能是 A 组的最大数(此时 B 组中没有最小数),也可能是 B 组的最小数(此时 A 组中没有最大数)。

集合 D 的分划 是指将全体实数分为两组:下组 A 和上组 B ,而且,每个实数只能包含在一组中,下组 A 中的任意数均小于上组 B 中的任意数。

实数用数轴上的点表示很方便。数轴是一条选定原点 O , 视某个方向为正方向及选定比例尺的(作为测量长度单位的线段)无限直线。每个实数都对应于数轴上的一个且只是一个点。数 0 和点 O 相对应。若数 x 是正数,则用放在点 O 右边、距离为 $OP = x$ 的点 P 表示;若数 x 是负数,则用放在点 O 左侧、距离为 $OQ = -x$ 的点 Q 表示(图1)。相反的判断:数轴上的每个点是一个,也只有一个实数。

能是一个实数的图象，这也是正确的。由此得出，全体实数和数轴的所有实数之间存在相互一一的对应。为了实用的目的，我们提示下列的论断：每一个无理数都能借助于有理数以任意精确程度表示出来。

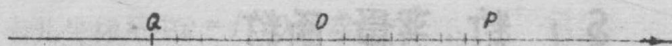


Рис. 1. 数轴：0是原点；实p和a放在数轴上

实数分为两组：实代数数（整系数代数方程实根）和实超越数（其余的实数）。任何有限或无限实数的全体称为数集。集合是用大写的拉丁字母： $X, Y, Z, \dots$ 表示。属于它们中间的数则用小写的字母： x, y, z 表示。例如： $x \in X$ (x 属于 X)。若元素 x 不属于 X ，则记为： $x \notin X$ 。

我们来研究两个集合 A 和 B 。若集合 A 的每个元素同时是集合 B 的元素，则称集合 A 是集合 B 的子集合，记作： $A \subset B$ ，或者 $B \supset A$ 。若 $A \subset B$ 且 $B \subset A$ ，则称：集合 A 和 B 相等，记作： $A = B$ 。不包含任何一个元素的集合称为空集合，用 $\emptyset$ 表示。

集合上的最简单运算——并（和）、交（乘积）、差。

设给出两个集合 A 和 B 。

含有集合 A 和 B 的所有元素，而不含有其它任何元素的集合 C 称为集合 A 和 B 的并（和）（表示为： $C = A \cup B$ ）。

含有集合 A 和 B 的所有公共元素，而不含其它任何元素的集合 D 称为集合 A 和 B 的交（乘积）（表示为： $D = A \cap B$ ）。

由集合 A 中所有不属于集合 B 的那些元素组成的，而不包含其它任何元素的集合 F 称为集合 A 和 B 的差，（记作： $F = A \setminus B$ ）。

在数集中，我们提示如下概念：

有界闭间隔（区间、线段） $X = [a; b]$ 是包含满足不等式 $a \leq x \leq b$ 的所有数 x 的集合 X 。在数轴上，这个数的全体表示包括它的端点在内的线段 $a-b$ （图 2, a ）；

有界开区间（区间） $X = (a; b)$ 是包含满足不等式 $a < x < b$ 的所有数 x 的集合 X 。在数直线上，这些数的全体表示没有端点的线段 $a-b$ （图 2, b ）；



Рис. 2. 数轴： a -区间 $[a; b]$ ； b -区间 $(a; b)$ 。

有界半开(或半闭)区间 $[a; b)$ 和 $(a; b]$ 是包含满足不等式 $a \leq x < b$ 和 $a < x \leq b$ 的所有数的集合 X 。在第一种情况下, 在数轴上对应的线段包含左端点, 而不包含右端点; 第二种情况, 包含右端点, 而不包含左端点。

半无限区间:

$(b; \infty)$ 是集合 X , 它的元素满足 $x > b$;

$[b; \infty)$ 是集合 X , 它的元素满足 $x \geq b$;

$(-\infty; a)$ 是集合 X , 它的元素满足 $x < a$;

$(-\infty; a]$ 是集合 X , 它的元素满足 $x \leq a$ 。

在数轴上, 这些集合用相应的无限半直线的所有点来表示。

所有实数的集合(整个数轴)称为无限区间, 表示为 $(-\infty, \infty)$ 。

设 a 是任意数。形如: $(a - \delta; a + \delta)$ 的任意开区间称为点 a 的 δ 邻域, 换言之: 点 a 的 δ 邻域是满足条件 $|x - a| < \delta$ 的所有实数 x 的集合, 其中 δ 是某个正数(图3)。点 $x = a$ 的邻域是包含 a 点的某个 δ 邻域的任意集合,

满足条件: $|a| = \begin{cases} a, & \text{若 } a > 0, \\ -a, & \text{若 } a < 0, \\ 0, & \text{若 } a = 0 \end{cases}$

的非负数, 称为数 a 的绝对值, 或者模(表示为 $|a|$ 读作“模 a ”)。

绝对值的基本性质:

若 $|a| = 0$ 则 $a = 0$ 。 $|a| \geq 0$

$$||a| - |b|| \leq |a - b| \leq |a| + |b|,$$

$$||a| - |b|| \leq |a - b| \leq |a| + |b|,$$

$$|ab| = |a| \cdot |b|,$$

$$\left| \frac{a}{b} \right| = \frac{|a|}{|b|} \quad (b \neq 0).$$

若 $|a| \leq A$ 和 $|b| \leq B$ 则 $|a + b| \leq A + B$ 和 $|ab| \leq AB$.

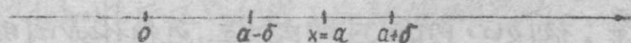


Рис.3 点 a 的 δ 邻域

我们来研究非空集合。对于 $\forall x \in X$, 满足不等式 $x \leq M$ 的任意数 M 称为集合 X 的上界。

对于 $\forall x \in X$, 满足不等式 $x \geq m$ 的任意数 m 称为集合 X 的下界。具有上界的集合称为上也有界。具有下界的集合称为下也有界, 上也有界和下也有界的集合

有界的。数 M 中的最小数，称为有界集合的上确界，而数 m 中的最大数，则称为有界集合的下确界。

若 M^* 是有界集合 X 的上确界 ($M^* = \sup X = \sup \{x\}$)，则对任意的无论多么小的数 $\varepsilon > 0$ ，总能找到一个数 $x_0 \in X$ ，满足 $x_0 < M^* - \varepsilon$ 。

若 m^* 是有界集合 X 的下确界 ($m^* = \inf x = \inf \{x\}$)，则对任意的无论多么小的数 $\varepsilon > 0$ ，总能找到一个数 $x_0 \in X$ ，满足 $x_0 < m^* + \varepsilon$ 。若集合 X 上边(下边)有界，那么它就有上确界(下确界)，也就是说，任何有界集合都有上确界和下确界。

常量和变量 在自然界和生产过程中，一些量是变化的(即量的数值变化)而另一些量是不变的。例如：在匀速运动中，时间和距离变化，而速度却保持不变；在封闭的容器中加热气体时，气体的压力和温度变化，而它的质量和体积却不变。

在某一过程中，能取不同数值的量称为变量。在某一过程中，不能改变数值的量称为常量。在任何条件下，都能保持同一数值的量称之为绝对常量，例如， $\pi = 3.141\dots$ 。

变量的特征很不相同。一些只能取正整数，而另一些可取无界的有理数，等。变量区分为取有限或无限的孤立数值的离散变量，和在取两个值： $x=a$ 和 $x=b$ (次序不重要)的同时，也取区间 $a < x < b$ 的所有值的连续变量。

被研究的量 x 所取值的集合，称为变量 x 的变化区域，或者称为 x 的值域。若每个变量后边的值大于前边的，则称它是递增的。若每个后边的变量值小于前边的，则称它是递减的。递增和递减的变量称为单调的。若变量的变化区域是有界集合，则变量是有界的。

函数的概念 在研究和讨论各种自然现象和解决一些技术问题时，需要研究的，主要的不是独立的变量的值，而是它们之间的联系，一个变量与另一个变量的依赖关系。在自然界中不存在那种与其它物理量没有联系的孤立变化的变量。例如，所通过的路程，可看作是随时间的变化而改变的量，即所通过的路程是时间的函数。又如：炮弹飞行的距离和命中的准确性，是由炮弹的质量，炮口升高的角度、炮弹的初速度、风向和风力以及其它许多因素所决定的。为了从这些具体实例中抽象出具体量之间的关系，所以在数学中引入了函数关系，或者函数的概念。

我们来研究两个集合： X 和 Y ，它们的元素可以是任何对象。设，集合

Y 中的一个元素按着某种规律与集合 X 的每个元素对应,这个元素用 $y=f(x)$ 表示。这时, f 称为从 X 到 Y 里的函数*(或者称为集合 X 到集合 Y 里的映射)。这样,若给出集合 X 到集合 Y 的映射 f ,就说,在集合 X 上确定了函数 f ,函数 f 从集合 Y 中取值 $y=f(x)$ 。集合 X 称为函数的定义域,而集合 $f(X)$ 称为函数 f 的值域。显然, $f(x)=y$ 。变量 x 称为自变量或者自变量。等式 $y=f(x)$ 表示,把规律 f 应用在自变量 x 上,可求的对应这个值 x 的函数 y 的值(图4)。例如,当 x 取 $[X=(-\infty+\infty)]$ 的所有值时,等式 $y=x^2+5$,确定 y 是 x 的函数,即是确定对于任何实数值 x 都有对应的函数 y 的法则,即在这种情况下,符号 f 表示如下的运算:求值 x 的立方,再加上5。

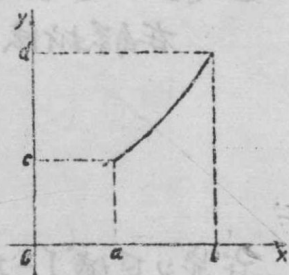


Рис. 4. 函数 $y=f(x)$ 的定义域是区间 $[a; b]$, 函数的值域是区间 $[c; d]$.

函数的表示法 给定函数就意味着建立一个规则(法则),利用这个规则由给出的自变量的值,求示与其对应的函数值。下面我们来研究表示函数的某些方法。

列表法 利用这种方法时,按确定的次序写出自变量一系列值 $x_1, x_2, \dots, x_n$ 和与其对应的函数值 $y_1, y_2, \dots, y_n$ 。如对照表、三角函数表等就是这样的。在技术和自然科学等方面,函数的列表法是非常普及的。对任何过程或现象连续观察到的数值结果,都可以写成表的形式。例如,在气象站里,可以把一天内测量的气温编成下表:

t (小时)	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
T ($^{\circ}\text{C}$)	-1	-2	-2.5	-2	-0.5	1	3	3.4	3.6	3.9

这个记录确定温度 T 是时间 t 的函数: $T=f(t)$ 。

函数列表法的优越性在于,它不用再加另外的测量和计算,能立刻确定某些具体的函数值。此法不足的是;函数值确定的不完全,仅是自变量某些值的函数,不能明显地表示出函数随自变量的改变而变化的特性。

图象法 平面上的所有坐标满足已知方程的点的集合,称为函数 $y=f(x)$ 的图象。函数图象可以是某个曲线,个别的也可以是直线,也可以是平面上孤立点的集合等。

函数的图象法,不能精确地确定变量的数值。但是,它比其它方法具有

* 术语“函数”是布菜尼茨(1692年)引入的,而符号 $f(x)$ 是尤拉引入的。

最大优点是直观性强。

在工程技术和物理学上,经常用函数的图象法,而且,有时图象则是它们唯一可用的方法。例如,利用自动地记录一个变量依赖于另一个变量的自动记录仪(气压图、湿度图等)。

解析法 这种方法可以利用公式解析地给出函数。这种方法能按自变量 x 的每一个数值,精确地或精确到某种程度地求出和它对应的函数 y 的数值。

在解析法中,函数能用几种不同的公式给出。例如函数

$$f(x) = \begin{cases} \cos x, & \text{当 } -\pi \leq x \leq 0 \text{ 时,} \\ 1, & \text{当 } 0 < x < 1 \text{ 时,} \\ \frac{1}{x}, & \text{当 } 1 \leq x \leq 2 \text{ 时,} \end{cases}$$

在定义区域 $[-\pi; 2]$ 上,是用三个公式给出的。

若 x 和 y 之间的关系用解出 y 的公式给出,即 $y = f(x)$ 的形式,就说,由 x 确定的函数是用显式给出,例如:

$$y = 6x - 2, \quad y = x^2 \ln x.$$

若 x 和 y 的值之间用某种形如 $F(x, y) = 0$ 的方程联系的,即公式中没有解出 y ,则说,函数 $y = f(x)$ 是用隐式给出的,例如方程 $x^2 + y^2 + 1 = 0$ 隐式确定两个函数: $y = \pm \sqrt{-x^2 - 1}$ 。

我们指出,不是任何隐式给出的函数,都能表示成显式形式: $y = f(x)$ 。反之,任何显函数 $y = f(x)$,都能表示成隐式形式 $y - f(x) = 0$ 。

还必须指出,解析方法表示函数还有一种变形,此时自变量 x 和函数 y 同时是第三个量——参变量 t 的函数: $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$,其中 t 在集合 T 上取值。这里,参变量 t 在其变化区域 T 中的每个值 t ,都对应 x 和 y 的数值 $x_0 = \varphi(t_0)$ 和 $y_0 = \psi(t_0)$,这一对应确定了 y 是 x 的函数(或者 x 是 y 的函数)。这样给出的函数关系称为参数方程。

若将值 x 和 y 看作是坐标平面 xOy 上点的坐标,则每个 t 值对应平面的确定点。若 t 由 t_1 变到 t_2 ,则要在平面上画出某条曲线。若从方程中消去参变量 t ,则得到以显式形式给出的函数: $y = f(x)$ 。曲线的参数表示,广泛地应用在力学上和几何学的一些理论研究等方面。

解析法是求函数最常用的方法,在数学分析中,它是表示函数的

最基本的方法。函数解析表示法的主要优点是，密集性，即对定义域中的任意变数值能够计算函数值，以及对给定的函数能够运用数学分析这个工具。不足的是：不够直观，有时必须得完成很复杂的计算。

叙述法 这种方法是以叙述表示函数间关系。

例1. 函数 $E(x)$ 是 x 的整数部分。一般用 $E(x) = [x]$ 表示不超过 x 的最大整数部分。换句话说，若 $x = n + r$ ，其中 n 是整数（可能是负的和 $0 \leq r < 1$ ），则 $[x] = n$ 。在区间 $[n; n+1)$ 上，函数 $E(x) = [x]$ 是常数。在这个区间上 $[x] = n$ 。

$$E(2.3) = 2, \quad E(-\pi) = -4.$$

例2. 迪里赫列函数定义为：

$$\chi(x) = \begin{cases} 1, & \text{当 } x \text{ 是有理数时,} \\ 0, & \text{当 } x \text{ 是无理数时.} \end{cases}$$

此函数定义在整个实数集合上，这个函数的解析表达式已经求出，但相当复杂，所以没有实用价值。叙述法能给出简明而确切的函数定义。

例3. $y = \{x\}$ 。这样表示的函数，称为 x 的小数部分。更确切地说， $y = \{x\} = x - [x]$ ，其中 $[x]$ 是 x 的整数部分。这个函数对所有的 x 有定义。若 x 是任意的实数，则把它表示成 $x = n + r$ 形式 ($n = [x]$)，其中 n 是整数和 $0 \leq r < 1$ ，得到 $\{x\} = n + r - n = r$ 。例如：

$$\{0\} = 0, \quad \{1\} = \{2\} = \dots = \{n\} = 0, \\ \{1.37\} = 0.37, \quad \{-1.3\} = -1.3 + 2 = 0.7.$$

例4. 黎曼函数是这样给出的：

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{n}, & \text{当 } x = \frac{m}{n} \text{ 时, 其中 } m \text{ 和 } n \text{ 是互质数,} \\ 0, & \text{当 } x \text{ 是无理数时.} \end{cases}$$

这里，函数是以描述 x 和 $f(x)$ 之间的对应规律给出的。

例5. 所谓算术函数是这样的函数，即以自然数为自变量的函数，而且这种函数只能取自然数值，例如 $n! = 1, 2, 3, \dots, n$ ，或者表示数 n 的因数个数的函数 $\tau(n)$ ，例如 $\tau(16) = 5$ ， $\tau(12) = 6$ 。例如，函数 $\varphi(n)$ 表示在自然数到 $1, 2, 3, \dots, n$ 中，与 n 互质的数的个数，例如 $\varphi(12) = 4$ ， $\varphi(16) = 8$ 。

半图象法

这里,函数值是线段形式,而自变量值是数的形式,这个数,是指明函数值的线段端点上所记录的数。例如,在温度表的衬板上,有分划均等的刻度,上面记有数字,这些数字是自变量的值(温度),它仍是在因温度变化导致体积膨胀而引起的水银柱伸长(函数值)的位置上。

§2. 函数的分类

反函数 若函数 $y=f(x)$ 取值是一一对应的,则称它是可逆的。

设 f 是把集合 E 映射到集合 M 上。若集合 M 中的任何元素 y 上,都存在集合 E 中的唯一的元素 $x=g(y)$, 使 $f(x)=y$, 则称映射 f 是可逆的。对于 y 的逆映射称为反函数,记作 f^{-1} 。同时,函数 $y=f(x)$ 称为原来的函数。

函数 f 的值域是反函数 f^{-1} 的定义域,而函数 f 的定义域是 f^{-1} 的值域。

函数 $y=f(x)$ 和 $x=f^{-1}(y)$ 称为互为反函数。

例如:

$$f(x) = \frac{1}{x} (x \neq 0), \quad f(x) = \frac{x}{x-1} (x \neq 1), \quad f(x) = \frac{1-x}{1+x} (x \neq -1).$$

对于某个函数,有反函数的充分必要条件是,函数定义域中不同的自变量值对应着不同的函数值。由此得知,为了证明某个函数是不可逆的,必须证明有某两个自变量值 $x_1 \neq x_2$ 使 $f(x_1) = f(x_2)$ 。

例如,函数 $f(x) = x^2$ (图5), $x \in (-\infty; +\infty)$, 没有反函数,因为它是一个单: $y = f(-3) = f(3)$ 对应两个不同的单: $-3 \in (-\infty; +\infty)$ 和 $3 \in (-\infty; +\infty)$ 。而函数 $y = f(x) = x^2, x \in [0; +\infty)$, 有反函数 $x = \sqrt{y}$, 因为它是一个单: $y_1 = x_1^2, y_2 = x_2^2$ 对应 $[0; +\infty)$ 中的任何两个不同的单 $x_1 \neq x_2$ 。事实上, $y_1 - y_2 = x_1^2 - x_2^2 = (x_1 - x_2)(x_1 + x_2) \neq 0$ 。

根据原来的函数 $y=f(x)$ 的图象,能够很容易地确定该函数是否有反函数。若任何平行于 O_y 轴的直线与原来函数的图象相交在

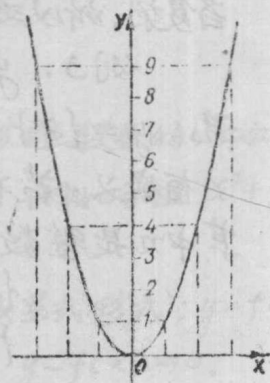


Рис. 5. $y = x^2$.

不起于一个交点上,则反函数 $x=f^{-1}(y)$ 存在。假如这些直线中存在至少一条与原来的函数图象相交于两个或多个交点上,则反函数不存在。若原来的函数 $y=f(x)$ 在集合 X 上是严格单调的,则函数 $x=f^{-1}(y)$ 存在,并且在集合 Y 上也是严格单调的。

复合函数 设已知两函数: 定义在集合 Z 上的函数 $y=f(z)$ 和定义在集合 X 上的函数 $z=g(x)$ 。若 $g(x) \subset Z$, 则在集合 X 上能够定义一个函数, 它按每个 $x \in X$ 对应 $g(x)=z \in Z$ 。这时, 在集合 X 上函数 $y=f[g(x)]=f(z)$ 是确定的。这个函数称为 x 的复合函数, 或者函数 f 和 g 的复合。

复合函数 $y=f[g(x)]$ 的定义域或者是函数 $z=g(x)$ 定义域的全体, 或者是它的一部分, 但这部分中确定的 z 值不超出函数 $f(z)$ 的定义域。

例1. 设 $y=\sin z$, 其中 $z=x^3$ 。函数 $y=\sin z$ 定义在全数轴上, 函数 $z=x^3$ 也是定义在全数轴上。这两个函数的复合 $y=\sin x^3$, 是定义在 $(-\infty; +\infty)$ 上的 x 的复合函数。

例2. $y=\sqrt{4-x^2}$ ($y=\sqrt{z}$, $z=4-x^2$)。函数 $y=\sqrt{z}$ 在 $z \geq 0$ 时有意义, 即 $4-x^2 \geq 0$ ($|x| \leq 2$), 然而函数 $z=4-x^2$ 在一切 x 值上都有意义。函数 $y=\sqrt{4-x^2}$ 的定义域是: $[-2; 2]$ 。

在研究复合函数时, 应注意列组成的函数的定义域。例如, 函数 $y=\arccos z$ 和 $z=3+x^4$, 不能表示成复合函数。事实上, 表达式 $y=\arccos(3+x^4)$ 不能给出 z 的复合函数, 因为函数 $y=\arccos z$ 是定义在 $[-1; 1]$ 上, 而函数 $z=3+x^4$ 的值在 x 取任何值时, 都不属于区间 $[-1; 1]$ 。

可以研究的复合, 不仅是两个函数的, 而且也是任意多个函数的。

初等函数 下列函数称为基本初等函数:

幂函数 $y=x^a$, 其中 $a \in \mathbb{R}$;

指数函数 $y=a^x$, 其中 $a > 0$, $a \neq 1$,

对数函数 $y=\log_a x$, 其中 $a > 0$, $a \neq 1$;

三角函数 $y=\sin x$, $y=\cos x$, $y=\operatorname{tg} x$, $y=\operatorname{ctg} x$ 。

反三角函数 $y=\arcsin x$, $y=\arccos x$, $y=\operatorname{arctg} x$, $y=\operatorname{arccot} x$ 。

基本初等函数, 经过有限次运算(加、减、乘、除)和复合所构成的函数是初等函数, 例如:

$$y = \sqrt{1+3\sin^3 x},$$

$$y = \frac{\log_4 x + 3\sqrt[3]{x} + 3\operatorname{tg} x}{10^{2x} + 2x + 4}.$$

我们命名几类初等函数。

有理整函数, 或者多项式。

$$y = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_n,$$

其中 n 是非负整数, (多项式的次数), $a_0, a_1, \dots, a_n$ 是常数(系数)。

有理分函数, 它是两个有理整函数的商:

$$y = \frac{a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_n}{b_0 x^m + b_1 x^{m-1} + \dots + b_m},$$

例如

$$y = \frac{4x^3 - 2x^2 + 5}{2x + 1}, \quad y = \frac{x}{x^4 - 1}.$$

有理整函数和有理分函数组成有理函数类。

无理函数是借助于有理函数和有理非整数指数幂函数的复合而成的函数, 例如:

$$y = \frac{3x^2 + \sqrt{x^2 - 1}}{\sqrt[3]{1 + 6x} - 4}, \quad y = \sqrt[3]{x + 1}.$$

有理函数和无理函数组成代数函数类。代数函数是满足方程

$$A_0(x)y^n + A_1(x)y^{n-1} + \dots + A_{n-1}(x)y + A_n(x) = 0$$

的任意函数 $y = f(x)$, 其中 n 是正整数, $A_0(x), A_1(x), \dots,$

$A_{n-1}(x), A_n(x)$ 是 x 的整有理函数, 且 $A_0(x) \neq 0$ 。

例 3. $y = \sqrt[3]{x^2 + 1}$ 是代数函数, 因为它满足方程

$$y^3 - x^2 - 1 = 0.$$

例 4. 方程 $y^5 + y - x^3 = 0$ 定义的函数是代数函数, 但这个函数不是显代数函数, 因为从高等代数中知道的五次或更高次的代数方程, 一般说来没有根式解。在这样情况下, 我们得到隐代数函数。

不是代数函数的初等函数称为超越函数。例如: $y = \cos x$ 。

$$y = 2^x, y = \log_2 x.$$

由此可见，所有的初等函数分为代数函数和超越函数。

单值函数和多值函数 若集合 X 的每个元素 x ，按照某个法则与集合 Y 中的不是一个，而是几个，甚至是无穷多个的元素相对应，则函数称为多值的。如 $y = \pm \sqrt{x}$ 是双值函数（常误认为是两个双值函数，而是分别研究两个单值函数： $y = +\sqrt{x}$ 和 $y = -\sqrt{x}$ ，即双值函数的分支）： $y = \text{Arc sin } x$ 是多值函数，等。

注：虽然现在数学分析中，不研究多值函数，但考虑到现有的科技文献情况，所以目前在研究中还不能消灭它。

有界函数和无界函数 定义在集合 X 上的函数 f 称为在集合 $X_1 \subseteq X$ 上是有界的，假如说，在集合 X_1 的函数值集合 $f(X_1)$ 是有界的，也就是说，假如存在常数 m 和 M ，对 X_1 的任何值 x 都满足不等式，

$$m \leq f(x) \leq M.$$

反之称函数是无界的。

数 $m_0 = \inf_{x \in X_1} \{f(x)\}$ 称为函数 $f(x)$ 在集合 X_1 上的下确界，而

数 $M_0 = \sup_{x \in X_1} \{f(x)\}$ 则称为函数 $f(x)$ 在集合 X_1 上的上确界。

差 $M_0 - m_0$ 称为函数在集合 X_1 上的振幅。

例 5. $f(x) = \sin x$ 在整个数轴上是有界的，因为对任意的 x ，都满足 $|\sin x| \leq 1$ 。

例 6. $f(x) = a^x$ 是下方有界的，因为对任何 x ，都是满足不等式 $0 < a^x$ 。

例 7. $f(x) = \text{tg } x$ 在 $[-\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{4}]$ 上是有界的，因为在这个区间上 $|\text{tg } x| \leq 1$ ，在任何 $-\frac{\pi}{2} < a < b < \frac{\pi}{2}$ 的区间 $[a; b]$ 也同样。但是，这个函数在 $[0, \frac{\pi}{2})$, $(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ 上也是无界的。

若函数 $f(x)$ 在实数 x_0 的某一邻域内有界，则称 $f(x)$ 在 x_0 处是有界的。函数 $y = f(x)$ 在 $[a; b]$ 上有界的充分必要条件是，按它在这个区间的任何实数上都有界。

单调函数 若对集合 X 中的任意两实数 x_1 和 x_2 ，当 $x_1 < x_2$ 时，满足不等式 $f(x_1) < f(x_2)$ ，即自变量较大的值对应较大的函数值，则称函数 $f(x)$ 在集合 X 上是递增的。