

高等概率论基础 及极限理论

Foundations of Advanced Probability Theory and Limit Theory

胡泽春 编著

Hu Zechun

清华大学出版社

高等概率论基础 及极限理论

Foundations of Advanced Probability Theory and Limit Theory

胡泽春 编著

Hu Zechun

清华大学出版社

北 京

内 容 简 介

本书主要包含三个部分：测度论基础、概率论基础与概率极限理论。测度论基础包括前四章：测度空间与概率空间；可测映射与随机变量；积分与期望；乘积空间与 Fubini 定理。概率论基础包括两章：独立性、条件期望、一致可积性；鞅论简介。概率极限理论包括两章：大数定律；中心极限定理。最后，用一章介绍 Chebyshev 不等式的经典及最新成果，用一章介绍概率论领域中的三个著名问题：Gauss 相关猜测；Hunt 假设(H)与 Gettoor 猜测；热点猜测。

本书适合作为研究生及高年级本科生相关课程的教材，也可供教师参考阅读。

版权所有，侵权必究。侵权举报电话：010-62782989 13701121933

图书在版编目(CIP)数据

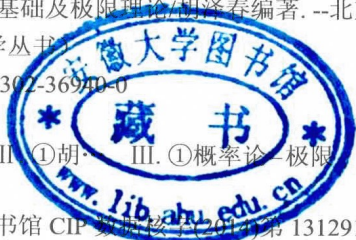
高等概率论基础及极限理论/胡泽春编著. --北京：清华大学出版社，2014

(研究生数学丛书)

ISBN 978-7-302-36940-0

I. ①高… II. ①胡… III. ①概率论—极限 IV. ①O211.4

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2014)第 131291 号



责任编辑：石磊 赵从棉

封面设计：常雪影

责任校对：赵丽敏

责任印制：王静怡

出版发行：清华大学出版社

网 址：<http://www.tup.com.cn>, <http://www.wqbook.com>

地 址：北京清华大学学研大厦 A 座 邮 编：100084

社总机：010-62770175

邮 购：010-62786544

投稿与读者服务：010-62776969, c-service@tup.tsinghua.edu.cn

质 量 反 馈：010-62772015, zhiliang@tup.tsinghua.edu.cn

印 装 者：三河市中晟雅豪印务有限公司

经 销：全国新华书店

开 本：170mm×230mm 印 张：12.25

字 数：224 千字

版 次：2014 年 9 月第 1 版

印 次：2014 年 9 月第 1 次印刷

印 数：1~2500

定 价：25.00 元

前言

概率论是研究随机现象的一门数学分支. 投掷一枚硬币是一种非常简单随机现象, 投掷之前我们并不知道结果会出现正面还是反面, 然而这看似“完全随机”的背后隐藏着其本身所固有的规律, 概率论的主要目标就是揭示随机现象中所蕴含的各种规律. 数理统计是与概率论有着密切关系的一门学科. 关于概率论与数理统计, 中科院数学与系统科学研究院的严加安院士写有如下诗句:

悟道诗

随机非随意, 概率破玄机
无序隐有序, 统计解迷离

近年来, 概率论在数学中的地位显得越来越高了. 2006 年 G. Perelman, A. Okounkov, W. Werner 与 T. Tao 获得菲尔兹奖, 其中, A. Okounkov 因在概率、表示论与代数几何之间建立起桥梁与纽带而获奖, W. Werner 因对发展随机共形映射、布朗运动二维空间的几何学以及共形场理论作出了突出贡献而获奖. 2006 年 K. Itô 获得首届高斯奖, K. Itô 对随机微分方程的创立与发展作出了突出贡献, 随机微分方程在经济、金融等众多领域发挥着重要的作用. 2007 年美籍印度数学家 S. R. S. Varadhan 获得阿贝尔奖, Varadhan 先生因对概率论作出的贡献, 特别是建立一个“大偏差统一理论”而获得奖项. 2010 年 E. Lindenstrauss, N. B. Chau, S. Smirnov 与 C. Villani 获得菲尔兹奖, 其中后两位的获奖工作都与概率论有关.

概率论在图论、组合、数论等领域有着重要的应用, 著名数学家 P. Erdős 创立了一种特有的方法, 称为概率方法, 又称为 Erdős 方法. 粗略地讲, 本方法指的是为证明某种离散结构存在, 构造一个合适的概率空间, 然后证明那种结构在这个概率空间中以正概率存在, 从而证明了那个结构的存在性. 有兴趣作深入了解的读者, 请参看 N. Alon 与 J. H. Spencer 的专著^[1].

虽然许多本科生都学过“概率论”(我们称之为“初等概率论”), 但是对于概率统计及相关专业研究生的学习, 对于概率统计及相关领域(如金融、经济)的学者从事科学研究, “初等概率论”还远远不够, 为此我们需要学习“高等概率论”.

本书将主要介绍三部分内容: 第一部分, 测度论基础; 第二部分, 概率论基础; 第三部分, 概率极限理论. 第一部分包括前四章: 测度空间与概率空间; 可测映

射与随机变量；积分与期望；乘积空间与 Fubini 定理. 第二部分包括两章：独立性、条件期望、一致可积性；鞅论简介. 第三部分包括两章：大数定律；中心极限定理. 另外，将用一章介绍 Chebyshev 不等式，最后一章介绍概率论领域中的三个著名问题：Gauss 相关猜测；Hunt 假设(H)与 Gettoor 猜测；热点猜测.

测度论是概率论的基础，概率论是统计学的基础；概率极限理论本身是概率论中一个重要分支，同时许多学科（如统计）中又发挥着重要作用；概率论是学习随机过程、随机微分方程的基础，而随机过程、随机微分方程在金融、经济等众多领域发挥着重要作用. 由此我们可以说“高等概率论”是概率统计专业研究生的一门非常重要的基础课.

作者自 2006 年春季起连续 9 年给数学系硕士研究生讲授“高等概率论”. 本教材是结合自己在讲授过程中的一些体会编写而成的. 本书具有以下一些特点：

- (1) 介绍了一些最新的科研成果（比如 Borel-Cantelli 引理的推广，Banach 空间值 Chebyshev 不等式）；
- (2) 介绍了概率论领域中的几个著名问题；
- (3) 对许多命题，采用分析法给出证明；
- (4) 提出了一些思考题供有兴趣的读者思考；
- (5) 对一些高深的知识或分支，不作详细介绍，只在章节结束时的“进一步阅读”中给出参考文献.

感谢国家自然科学基金、中央高校基本科研业务费、江苏省自然科学基金、江苏省优势学科经费对我科研的支持，感谢南京大学数学系领导的支持与帮助，感谢家人给予我的爱与鼓励.

由于作者水平有限，有处理不当的地方，诚请各位专家和读者批评指正.

胡泽春

2014 年 5 月于南京大学

目 录

第 0 章 概率论的历史简介	1
第 1 章 测度空间与概率空间	4
1.1 可测空间	4
1.1.1 集类	4
1.1.2 生成集类、单调类定理	7
1.2 测度与概率	10
1.2.1 定义及性质	10
1.2.2 外测度、测度扩张定理	13
1.2.3 欧氏空间上的 Lebesgue-Stieltjes 测度	19
第 2 章 可测映射与随机变量	24
2.1 定义、性质及构造	24
2.2 几种收敛性	30
2.3 随机变量的分布、分布函数	34
第 3 章 积分与期望	36
3.1 定义、性质及变换	36
3.2 Riemann 积分与 Lebesgue 积分	43
3.3 积分收敛定理	45
3.4 不定积分与符号测度	49
3.5 L^p 空间	56
第 4 章 乘积空间与 Fubini 定理	64
4.1 乘积测度与 Fubini 定理	64
4.2 由 σ 有限核产生的测度与积分	68
4.3 无穷乘积空间上的概率测度	70

第 5 章 独立性、条件期望、一致可积性	75
5.1 独立性, 0-1 律	75
5.1.1 事件与随机变量的独立性	75
5.1.2 Borel-Cantelli 引理、Borel 0-1 律	77
5.1.3 Kolmogorov 0-1 律	81
5.1.4 Hewitt-Savage 0-1 律	82
5.2 条件期望与条件概率	83
5.2.1 条件期望的定义	83
5.2.2 条件期望的性质	86
5.2.3 条件期望的计算、Bayes 法则	89
5.2.4 条件概率、条件独立性	91
5.2.5 正则条件概率	93
5.3 随机变量的一致可积性	96
第 6 章 鞅论简介	101
6.1 定义、性质、停止定理	101
6.2 不等式	106
6.3 鞅收敛定理、上鞅 Doob 分解定理	109
6.4 连续鞅的定义及一点说明	113
6.5 鞅论在保险精算中的应用	114
第 7 章 大数定律	117
7.1 弱大数定律	117
7.2 强大数定律	122
7.2.1 一些准备	122
7.2.2 收敛定理	124
7.3 随机级数的收敛	129
7.4 重对数律	132
第 8 章 中心极限定理	133
8.1 测度的弱收敛、随机变量的依分布收敛	133
8.2 特征函数	139
8.3 分布函数与特征函数的收敛性	141
8.4 中心极限定理	146
8.5 稳定分布	149
8.6 无穷可分分布	151

8.7 Skorokhod 构造与其他收敛性定理	153
第 9 章 Chebyshev 不等式	155
9.1 经典 Chebyshev 不等式及多元推广	155
9.2 Hilbert 空间值 Chebyshev 不等式	156
9.3 Banach 空间值 Chebyshev 不等式	156
第 10 章 著名问题介绍	161
10.1 Gauss 相关猜测	161
10.1.1 猜测的具体内容及等价形式	161
10.1.2 早期历史	162
10.1.3 近年来的主要进展	163
10.2 Hunt 假设(H)与 Getoor 猜测	165
10.2.1 Hunt 假设(H)及相关位势原理	165
10.2.2 Getoor 猜测及已有成果	167
10.2.3 我们在 Getoor 猜测方面的工作	169
10.2.4 待解决的一些问题	173
10.3 热点猜测	173
10.3.1 猜测的具体内容	173
10.3.2 猜测的进展	175
索引	178
参考文献	182

第0章

概率论的历史简介

本章对概率论的发展历史作一个简单介绍。

1. 起源

概率论这门学科可以说起源于赌博。尽管早在 15 世纪与 16 世纪意大利的一些数学家（如 Cardano, Pacioli, Tartaglia 等）已经对某些靠运气的游戏中的特定的概率进行了计算，但是概率论作为一门学科起源于 17 世纪中期。

1654 年，一个名叫 A.G.C. de Méré 的法国贵族对赌博以及赌博中的问题很感兴趣，但他对一些问题感到很困惑，为解决自己的困惑，他向著名数学家 B. Pascal (1623—1662) 求助。为解答 de Méré 提出的问题，Pascal 与另外一位法国著名数学家 P. Fermat (1601—1655) 通信进行了讨论。1655 年，荷兰科学家 C. Huygens (1629—1695) 首次访问巴黎，期间他学习了 Pascal 与 Fermat 关于概率论的工作。1657 年，当他回到荷兰后，写了一本小册子，名叫《De Ratiociniis in Ludo Aleae》（可译为《关于机会游戏的计算》），这是关于概率论的第一本书。在这个时期，“数学期望”这一基本概念以及关于概率的可加性、可乘性已经建立。

2. 18 世纪

概率论在 18 世纪得到了快速发展，这个期间的主要贡献者是 J. Bernolli (1654—1705) 与 A. de Moivre (1667—1754)。

J. Bernoulli 是一位瑞士数学家, Bernoulli 家族的第一位数学家. Bernoulli 在概率论领域的代表作是《Ars Conjectandi》(可译为《猜测的艺术》), 发表于 1713 年, 即他逝世后的第八年. 在此书中他严格地证明了概率论的第一个极限定理.

De Moivre 是一位法国数学家, 但是大部分时间他住在英国. De Moivre 开创了概率论的现代方法: 1718 年发表了《The Doctrine of Chance》. 在此书中统计独立性的定义首次出现. 该书在 1738 年与 1756 年出了扩展版, 生日问题出现在 1738 年的版本中, 赌徒破产问题出现在 1756 年的版本中.

1730 年 de Moivre 的另外一本专著《Miscellanea Analytica Supplementum》(可译为《解析方法》) 正式出版. 其中, 关于对称 Bernoulli 试验的中心极限定理首次提出并得到证明.

3. 19 世纪

19 世纪, 概率论的早期理论得到了进一步的发展与推广, 这个期间的主要贡献者是 P. S. M. Laplace (1749—1827), S. D. Poisson (1781—1840), C. F. Gauss (1777—1855), P. L. Chebyshev (1821—1894), A. A. Markov (1856—1922) 与 A. M. Lyapunov (1857—1918). 这个时期的研究主要围绕极限定理展开.

1812 年 Laplace 的伟大专著《Théorie Analytique des Probabilités》(可译为《概率论的解析理论》) 诞生, 其中, 他阐述了他自己及前辈在概率论方面的结果. 特别地, 他将 De Moivre 的定理推广到 Bernoulli 试验非对称情形. Laplace 最重要的工作是将概率方法应用到观测误差, 在很一般的条件下证明了观测误差的分布一定是渐近正态的.

在当代概率论中, 与 Poisson 相关的有 Poisson 分布、Poisson 过程. Gauss 创立了误差理论, 特别地, 创立了最小二乘的基本方法. Chebyshev, Markov 与 Lyapunov 在研究独立但不同分布的随机变量和的极限定理方面发展了有效的方法.

在 Chebyshev 之前, 概率论的主要兴趣在于对随机事件的概率进行计算. 而 Chebyshev 是第一个清晰认识并充分利用随机变量及其数学期望概念的人. Chebyshev 思想的主要倡导者是他的忠诚的学生 Markov, 他将其老师的结果

完整清晰地展现出来. Markov 自己对概率论的重大贡献之一是创立了概率论的一个分支: 研究相依随机变量的理论, 称为“Markov 过程”.

为证明概率论的中心极限定理, Chebyshev 与 Markov 利用的是矩方法, 而 Lyapunov 利用了特征函数方法. 极限定理的后续发展表明特征函数方法是一种强大的解析工具.

4. 20 世纪

20 世纪可称为概率论发展的现代时期, 本时期开始于概率论的公理化. 在这个方向上的早期贡献者有 S. N. Bernstein (1880—1968), R. von Mises (1883—1953) 与 E. Borel (1871—1956). 1933 年, 俄罗斯著名数学家 A. N. Kolmogorov 出版了他的伟大专著《Foundations of the Theory of Probability》. 其中, 他为概率论建立了目前广泛采纳的公理化体系.

在 20 世纪, 随机过程理论 (马氏过程, 平稳过程, 鞅, 随机过程的极限定理等) 得到了快速发展. 另外, 还有许多分支, 比如 (排名不分先后) 随机微分方程、随机偏微分方程、倒向随机微分方程、随机微分几何、Malliavin 变分、白噪声分析、狄氏型理论、遍历理论、数理金融、大偏差理论、交互粒子系统、测度值过程、概率不等式、泛函不等式、渗流、最优传输、SLE、随机矩阵、随机优化、随机控制、随机动力系统等众多概率论、随机分析及相关领域中的分支得到了快速发展. 作出重要贡献的科学家实在太多, 不便一一列出.

第1章

测度空间与概率空间

随机变量是概率论的一个主要研究对象, 定义为从一个概率空间 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ 到实数空间 $\mathbf{R}$ 中满足某种性质的映射. 为更好地研究这种映射, 我们在这一章中介绍什么是概率空间, 实际上我们介绍更一般的测度空间, 概率空间为一种特殊的测度空间.

1.1 可测空间

为介绍测度空间 $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$, 首先介绍可测空间 $(\Omega, \mathcal{F})$.

1.1.1 集类

为介绍可测空间 $(\Omega, \mathcal{F})$, 先介绍一些基本的集合论符号与概念. 假定 Ω 为一个非空集合, $\omega \in \Omega$ 表示元素 ω 属于集合 Ω , $\omega \notin \Omega$ 表示元素 ω 不属于集合 Ω . 不含任何元素的集合称为空集, 记为 $\emptyset$. 假定集合 A 与 B 为 Ω 的两个子集 (我们用 $A \subset \Omega$ 与 $B \subset \Omega$ 表示), 定义

$$A \cap B = \{\omega \in \Omega : \omega \in A \text{ 而且 } \omega \in B\},$$

$$A \cup B = \{\omega \in \Omega : \omega \in A \text{ 或者 } \omega \in B\},$$

$$A \setminus B = \{\omega \in \Omega : \omega \in A \text{ 而且 } \omega \notin B\},$$

$$A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A),$$

$$A^c = \Omega \setminus A,$$

分别称为 A 与 B 的交、 A 与 B 的并、 A 减去 B 的差、 A 与 B 的对称差、 A

的余集(或补集). 根据上述定义有 $A \setminus B = A \cap B^c$.

集合的并 $\cup$ 与交 $\cap$ 满足交换律、结合律与分配律(请看习题1). 它们与取余集运算还满足 de Morgan 公式:

$$(A \cap B)^c = A^c \cup B^c, (A \cup B)^c = A^c \cap B^c.$$

对于数列 $\{x_n\}_{n \geq 1}$, 有

$$\text{上极限 } \limsup_{n \rightarrow \infty} x_n = \inf_{n \geq 1} \sup_{k \geq n} x_k, \text{ 下极限 } \liminf_{n \rightarrow \infty} x_n = \sup_{n \geq 1} \inf_{k \geq n} x_k.$$

类似地, 给出下述定义:

定义 1.1 假定 $\{A_n\}_{n \geq 1}$ 为一个集合序列, 定义 上极限

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} A_n = \bigcap_{n \geq 1} \bigcup_{k \geq n} A_k,$$

下极限

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} A_n = \bigcup_{n \geq 1} \bigcap_{k \geq n} A_k.$$

如果 $\limsup_{n \rightarrow \infty} A_n = \liminf_{n \rightarrow \infty} A_n = A$, 称 A 是集合列 $\{A_n\}_{n \geq 1}$ 的极限, 记为 $A = \lim_{n \rightarrow \infty} A_n$.

根据以上定义, 容易证明

$$\begin{aligned} \limsup_{n \rightarrow \infty} A_n &= \{\omega : \omega \text{ 属于无穷多个 } A_n\}, \\ \liminf_{n \rightarrow \infty} A_n &= \{\omega : \omega \text{ 至多不属于有限个 } A_n\}. \end{aligned}$$

如果对任意 $n \geq 1$, 有 $A_n \subset A_{n+1}$, 称 $\{A_n\}$ 为单调上升的. 如果记 $A = \bigcup_{n \geq 1} A_n$, 则此时有 $\lim_{n \rightarrow \infty} A_n = A$, 简记为 $A_n \uparrow A$. 类似地, 如果对任意 $n \geq 1$, 有 $A_n \supset A_{n+1}$, 称 $\{A_n\}$ 为单调下降的. 如果记 $A = \bigcap_{n \geq 1} A_n$, 则此时有 $\lim_{n \rightarrow \infty} A_n = A$, 简记为 $A_n \downarrow A$.

由 de Morgan 公式可知, 如果 $A_n \uparrow A$, 则 $A_n^c \downarrow A^c$.

很多时候将集合的并表示为不交并是很有用的. 假定 $A_1, A_2, \dots$ 为 Ω 的子集. 有

$$(1) \cup_{i=1}^n A_i = A_1 \cup (A_1^c \cap A_2) \cup (A_1^c \cap A_2^c \cap A_3) \cup \cdots \cup (A_1^c \cap \cdots \cap A_{n-1}^c \cap A_n).$$

$$(2) \cup_{n=1}^{\infty} A_n = \cup_{n=1}^{\infty} (A_1^c \cap \cdots \cap A_{n-1}^c \cap A_n).$$

(1) 与 (2) 中, 右边的集合互不相交. 如果 $\{A_n\}$ 是单调上升的集合列, 上述两公式变为

$$(3) \cup_{i=1}^n A_i = A_1 \cup (A_2 \setminus A_1) \cup \cdots \cup (A_n \setminus A_{n-1}).$$

$$(4) \cup_{n=1}^{\infty} A_n = \cup_{n=1}^{\infty} (A_n \setminus A_{n-1}) \text{ (取 } A_0 \text{ 为空集)}.$$

现在我们给出一些集类的定义, 关于它们之间的一些关系, 请参看下面的注记 1.1(1) 与习题 2, 3.

定义 1.2 假定 $\mathcal{C}$ 为 Ω 上的一个集类.

(1) 称 $\mathcal{C}$ 为 π 类, 如果 $\forall A, B \in \mathcal{C}$, 有 $A \cap B \in \mathcal{C}$, 即 $\mathcal{C}$ 对有限交封闭;

(2) 称 $\mathcal{C}$ 为 代数, 如果 $\emptyset \in \mathcal{C}$, 而且 $\forall A, B \in \mathcal{C}$, 有 $A \cap B \in \mathcal{C}, A^c \in \mathcal{C}$, 即 $\emptyset \in \mathcal{C}$, 而且 $\mathcal{C}$ 对有限交封闭, 对取余集运算封闭;

(3) 称 $\mathcal{C}$ 为 σ 代数, 如果 $\emptyset \in \mathcal{C}$, 而且 $\forall A_1, A_2, \dots \in \mathcal{C}$, 有 $A_1^c \in \mathcal{C}, \cap_{i=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{C}$, 即 $\emptyset \in \mathcal{C}$, 而且 $\mathcal{C}$ 对可数交封闭, 对取余集运算封闭;

(4) 称 $\mathcal{C}$ 为 单调类, 如果 $A_n \in \mathcal{C}, A_n \uparrow A$ 或者 $A_n \downarrow A$, 则 $A \in \mathcal{C}$;

(5) 称 $\mathcal{C}$ 为 λ 类, 如果它满足以下三条性质:

(i) $\emptyset, \Omega \in \mathcal{C}$;

(ii) 对正常差封闭, 即如果 $A, B \in \mathcal{C}, A \subset B$, 则 $B \setminus A \in \mathcal{C}$;

(iii) 如果 $A_n \in \mathcal{C}, A_n \uparrow A$, 则 $A \in \mathcal{C}$.

注记 1.1 (1) 由上述定义容易知道 σ 代数是代数, 代数是 π 类; σ 代数是单调类, 也是 λ 类; λ 类是单调类.

(2) 根据 de Morgan 公式, 可知代数的定义中“对有限交封闭”可以改为“对有限并封闭”; σ 代数的定义中“对可数交封闭”可以改为“对可数并封闭”; λ 类的定义中条件 (iii) 可以改为以下的条件:

(iii)' 如果 $A_n \in \mathcal{C}, A_n \downarrow A$, 则 $A \in \mathcal{C}$.

例 1.1 (1) 以 2^Ω 记 Ω 的幂集, 即由 Ω 的所有子集构成的集类. 显然 2^Ω 是 σ 代数, 而且是 Ω 上最大的 σ 代数.

(2) $\{\emptyset, \Omega\}$ 是 Ω 上最小的 σ 代数.

(3) 如果 A 是 Ω 的一个非平凡子集 (即 $A \neq \emptyset, A \neq \Omega$), 则包含 A 的最小 σ 代数为 $\{\emptyset, A, A^c, \Omega\}$.

下面命题的证明是容易的, 我们省略证明.

命题 1.1 假定 I 为一个指标集, $\forall i \in I, \mathcal{C}_i$ 为 Ω 上的一个集类. 如果 $\forall i \in I, \mathcal{C}_i$ 为 π 类 (代数, σ 代数, 单调类, λ 类), 则 $\cap_{i \in I} \mathcal{C}_i$ 为 π 类 (代数, σ 代数, 单调类, λ 类).

定义 1.3 假设 Ω 为一非空集合, $\mathcal{F}$ 为 Ω 上的一 σ 代数, 则称 $(\Omega, \mathcal{F})$ 为一个可测空间.

1.1.2 生成集类、单调类定理

由例 1.1(1) 及命题 1.1 知, 对于 Ω 上任意子集类 $\mathcal{C}$, 一定存在包含 $\mathcal{C}$ 的最小 σ 代数、最小 λ 类和最小单调类, 称它们为由 $\mathcal{C}$ 生成的 σ 代数、 λ 类和单调类, 并分别用 $\sigma(\mathcal{C}), \lambda(\mathcal{C})$ 和 $m(\mathcal{C})$ 来表示. 实际上, 可定义 $\sigma(\mathcal{C}) = \cap \{\mathcal{G} : \mathcal{G} \text{ 为包含 } \mathcal{C} \text{ 的 } \sigma \text{ 代数}\}$. 对 $\lambda(\mathcal{C})$ 与 $m(\mathcal{C})$, 可类似定义. 由注记 1.1(1) 知 $m(\mathcal{C}) \subset \lambda(\mathcal{C}) \subset \sigma(\mathcal{C})$.

定理 1.2 (单调类定理) 设 $\mathcal{C}$ 为一集类.

(1) 若 $\mathcal{C}$ 为代数, 则 $m(\mathcal{C}) = \sigma(\mathcal{C})$.

(2) 若 $\mathcal{C}$ 为 π 类, 则 $\lambda(\mathcal{C}) = \sigma(\mathcal{C})$.

证明 我们只证明 (1), 将 (2) 的证明留作习题. 由 $m(\mathcal{C}) \subset \sigma(\mathcal{C})$ 知, 只需要证明 $\sigma(\mathcal{C}) \subset m(\mathcal{C})$. 由于 $\mathcal{C} \subset m(\mathcal{C})$, 因此由定义只需要证明 $m(\mathcal{C})$ 是一个 σ 代数. 进一步, 利用本节习题 2, 只需要证明 $m(\mathcal{C})$ 是一个代数. 令

$$\mathcal{G}_1 = \{A | A \in m(\mathcal{C}), A^c \in m(\mathcal{C}), A \cap B \in m(\mathcal{C}), \forall B \in \mathcal{C}\}.$$

因为 $\mathcal{C}$ 是一个代数, 所以 $\mathcal{C} \subset \mathcal{G}_1$. 容易验证 $\mathcal{G}_1$ 为单调类, 因此 $\mathcal{G}_1 = m(\mathcal{C})$. 令

$$\mathcal{G}_2 = \{A | A \in m(\mathcal{C}), A \cap B \in m(\mathcal{C}), \forall B \in m(\mathcal{C})\}.$$

由 $\mathcal{G}_1$ 的定义及 $\mathcal{G}_1 = m(\mathcal{C})$ 知 $\mathcal{C} \subset \mathcal{G}_2$. 可以验证 $\mathcal{G}_2$ 为单调类, 因此 $\mathcal{G}_2 = m(\mathcal{C})$. 总之, 由 $\mathcal{G}_1 = \mathcal{G}_2 = m(\mathcal{C})$ 知 $m(\mathcal{C})$ 为代数, 故证明完成. $\square$

由定理 1.2 立即得到如下推论:

推论 1.3 设 $\mathcal{C}, \mathcal{F}$ 为两个集类, 且 $\mathcal{C} \subset \mathcal{F}$.

(1) 若 $\mathcal{C}$ 为代数, 且 $\mathcal{F}$ 为单调类, 则 $\sigma(\mathcal{C}) \subset \mathcal{F}$.

(2) 若 $\mathcal{C}$ 为 π 类, 且 $\mathcal{F}$ 为 λ 类, 则 $\sigma(\mathcal{C}) \subset \mathcal{F}$.

单调类定理及其推论是很有用的工具. 为证明某个 σ 代数 $\mathcal{F}$ 中的元素满足某种性质, 利用单调类定理 (或其上述推论), 只需要证明: (1) 有一生成 $\mathcal{F}$ 的代数 (π 类) $\mathcal{C}$ 中的元素都满足该性质; (2) 满足该性质的集合全体构成一单调类 (λ 类).

命题 1.4 (文献 [2] 第 5 页) 设 $\mathcal{C}$ 为 Ω 上的一个集类, $A \subset \Omega$. 令 $A \cap \mathcal{C} = \{A \cap B | B \in \mathcal{C}\}$, 则

$$\sigma_A(A \cap \mathcal{C}) = A \cap \sigma(\mathcal{C}),$$

其中 $\sigma_A(A \cap \mathcal{C})$ 表示 $A \cap \mathcal{C}$ 在 A 上生成的 σ 代数.

证明 因为 $\mathcal{C} \subset \sigma(\mathcal{C})$, 所以 $A \cap \mathcal{C} \subset A \cap \sigma(\mathcal{C})$. 容易验证 $A \cap \sigma(\mathcal{C})$ 是 A 上的 σ 代数, 因此 $\sigma_A(A \cap \mathcal{C}) \subset A \cap \sigma(\mathcal{C})$. 于是为证明此命题, 只需要证明 $\sigma_A(A \cap \mathcal{C}) \supset A \cap \sigma(\mathcal{C})$, 即需要证明对于任意 $B \in \sigma(\mathcal{C})$, 有 $A \cap B \in \sigma_A(A \cap \mathcal{C})$. 为此, 令 $\mathcal{F}$ 是 $\sigma(\mathcal{C})$ 中的好集合的类, 即

$$\mathcal{F} = \{B \in \sigma(\mathcal{C}) | A \cap B \in \sigma_A(A \cap \mathcal{C})\}.$$

因为 $\sigma(\mathcal{C})$ 与 $\sigma_A(A \cap \mathcal{C})$ 都是 σ 代数, 所以容易验证 $\mathcal{F}$ 也是 σ 代数. 然而 $\mathcal{C} \subset \mathcal{F}$, 因此 $\mathcal{F} = \sigma(\mathcal{C})$. □

命题 1.4 中的证明方法称为“好集原理”, 在测度论中经常使用.

例 1.2 (Borel σ 代数) 假设 E 为一拓扑空间, 用 $\mathcal{B}(E)$ 表示由全体开集 (或全体闭集) 生成的 σ 代数, 称 $\mathcal{B}(E)$ 为 E 上的 Borel σ 代数. 这样就得到一可测空间 $(E, \mathcal{B}(E))$.

定义 1.4 假设 $\mathcal{F}$ 为集合 Ω 上的一 σ 代数, 称 $\mathcal{F}$ 为可分的 (或可数生成的) 如果存在一可数子集类 $\mathcal{C}$, 使得 $\mathcal{F} = \sigma(\mathcal{C})$.

定义 1.5 设 $(\Omega, \mathcal{F})$ 为一可测空间, 对任意 $\omega \in \Omega$, 令

$$\mathcal{F}_\omega = \{B \in \mathcal{F} | \omega \in B\}, \quad A(\omega) = \bigcap_{B \in \mathcal{F}_\omega} B,$$

称 $A(\omega)$ 为含 ω 的 $\mathcal{F}$ 原子.

根据上述定义, 容易证明:

- (1) 设 $\omega, \omega' \in \Omega$, 则或者 $A(\omega) = A(\omega')$, 或者 $A(\omega) \cap A(\omega') = \emptyset$;
- (2) 设 $\mathcal{C}$ 为生成 $\mathcal{F}$ 的代数. 对任何 $\omega \in \Omega$, 令 $\mathcal{C}_\omega = \{B \in \mathcal{C} | \omega \in B\}$, 则有

$$A(\omega) = \bigcap_{B \in \mathcal{C}_\omega} B.$$

特别地, 若 $\mathcal{F}$ 可分, 则每个 $\mathcal{F}$ 原子属于 $\mathcal{F}$.

习题 1.1

1. 证明集合的并与交满足交换律、结合律与分配律, 即如果 A, B, C 为三个集合, 则

$$A \cap B = B \cap A, A \cup B = B \cup A;$$

$$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C), (A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C);$$

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C), A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C).$$

2. 如果 $\mathcal{C}$ 同时是代数与单调类, 则 $\mathcal{C}$ 为 σ 代数.

3. 如果 $\mathcal{C}$ 同时为 π 类与 λ 类, 则 $\mathcal{C}$ 为 σ 代数.

4. 设 $\mathcal{C}$ 为 Ω 上的一集类, 且 $\emptyset, \Omega \in \mathcal{C}$, 令

$$\mathcal{G} := \left\{ \left(\bigcap_{i=1}^n A_i \right) \cap \left(\bigcap_{j=1}^m B_j^c \right) \mid n, m \geq 1, A_i, B_j \in \mathcal{C}, 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m \right\};$$

$$\mathcal{H} := \left\{ \bigcup_{i=1}^n A_i \mid n \geq 1, A_i \in \mathcal{G}, 1 \leq i \leq n, \text{并且 } A_1, A_2, \dots, A_n \text{ 互不相交} \right\}.$$

证明: $\mathcal{H}$ 是包含 $\mathcal{C}$ 的最小的代数.

5. 证明定理 1.2 (2).

6. 对 $\lambda(\mathcal{C})$, 证明与命题 1.4 类似的结果.

7. 假定 $\mathcal{F}$ 与 $\mathcal{G}$ 是 Ω 上的两个 σ 代数, 请问 $\mathcal{F} \cup \mathcal{G}$ 是否一定是一个 σ 代数? 若是请给出证明; 若不是请举反例.