

□ 高等学校教材

# 初等代数研究

第二版

周焕山

高等教育出版社

高等学校教材

# 初等代数研究

Chudeng Daishu Yanjiu

第 二 版

周焕山



高等教育出版社·北京

内容提要

本书第一版是根据1991年12月颁发的中学教师进修高等师范专科《“初等数学研究”教学大纲》编写的《初等数学研究》。现根据当前教学需求分成两册出版,本书属于初等代数部分。作者试图以现代数学观点阐释中学数学涉及的各类初等代数问题以及相关理论,密切联系中学数学实际,分析透彻,逻辑严谨。本次修订不仅更新了原有内容,而且新增逻辑与集合初步、数列与数学归纳法两章,以适应新时代教育改革的需要。

本书内容包括逻辑与集合初步,数系,解析式,初等函数,方程,不等式,数列与数学归纳法,排列与组合等内容。对于其中的概念、命题、运算、数学思维和数学方法等详加诠释,精选例题予以说明;并适度介绍其历史渊源和一些较深、较广的相关理论,以便读者理解知识发展的脉络,从而形成知识体系,提高数学素养和解决问题的能力。

本书可作为高等师范院校初等代数研究课程的教材,也可供中、小学数学教师进修或参考。

图书在版编目(CIP)数据

初等代数研究 / 周焕山编. --2版. --北京:高等教育出版社, 2014. 7

ISBN 978-7-04-033959-8

I. ①初… II. ①周… III. ①初等代数-研究 IV. ①O122

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2014)第 039937 号

|      |     |      |     |      |     |      |    |
|------|-----|------|-----|------|-----|------|----|
| 策划编辑 | 张长虹 | 责任编辑 | 张长虹 | 特约编辑 | 师软贤 | 封面设计 | 于涛 |
| 版式设计 | 杜微言 | 责任校对 | 杨凤玲 | 责任印制 | 刘思涵 |      |    |

|      |                    |      |                                                                   |
|------|--------------------|------|-------------------------------------------------------------------|
| 出版发行 | 高等教育出版社            | 网 址  | <a href="http://www.hep.edu.cn">http://www.hep.edu.cn</a>         |
| 社 址  | 北京市西城区德外大街 4 号     |      | <a href="http://www.hep.com.cn">http://www.hep.com.cn</a>         |
| 邮政编码 | 100120             | 网上订购 | <a href="http://www.landaco.com">http://www.landaco.com</a>       |
| 印 刷  | 北京明月印务有限责任公司       |      | <a href="http://www.landaco.com.cn">http://www.landaco.com.cn</a> |
| 开 本  | 787mm × 960mm 1/16 | 版 次  | 1995 年 6 月第 1 版                                                   |
| 印 张  | 26.5               |      | 2014 年 7 月第 2 版                                                   |
| 字 数  | 490 千字             | 印 次  | 2014 年 7 月第 1 次印刷                                                 |
| 购书热线 | 010-58581118       | 定 价  | 38.40 元                                                           |
| 咨询电话 | 400-810-0598       |      |                                                                   |

本书如有缺页、倒页、脱页等质量问题,请到所购图书销售部门联系调换。  
版权所有 侵权必究  
物 料 号 33959-00

# 前 言

本书是在拙著《初等数学研究》(代数部分)(高等教育出版社,1995年6月第一版,2013年5月第28次印刷)的基础上,为适应数学教育新形势而重新编写的。

本书完稿之际,笔者最感欣慰的是将逻辑的基本原理写入第一章。内在的逻辑性是数学的根。但长期以来,国人重视数学,却忽视逻辑。现在中学数学里增设“常用逻辑用语”,这是一个很好的开端。但作为数学教师,局限于“逻辑用语”是远远不够的,必须学些逻辑的基本原理才好。

35年前,笔者曾在《人民教育》(1978年4—5合刊)上发表过一篇言志的文章:《为打好青少年的数学基础努力攻关》,说的是1971年目睹“教师无法教,学生不想学”的现象,我心里很着急。为了能给当时的数学教师提供教学参考读物,于是埋头苦读,在农村校舍的煤油灯下翻译了《应用数学基础》、《统计世界》等书。从此教学之余笔耕不辍。但所写的书除《高一代数教学参考书》之外,没有重印10次以上的。现在《初等数学研究》重印28次后还获得再次修订、分册出版的机会,真的很感谢高等教育出版社,感谢读者的厚爱,尤其要感谢编辑高尚华先生和张长虹先生给予的帮助。

周焕山

2013年11月17日

# 目 录

|                              |       |
|------------------------------|-------|
| 绪言 .....                     | (1)   |
| § 0.1 代数学发展的三个历史阶段 .....     | (1)   |
| § 0.2 中学代数的百年演变 .....        | (3)   |
| § 0.3 “初等代数研究”的研究目的和内容 ..... | (8)   |
| 第一章 逻辑与集合初步 .....            | (10)  |
| § 1.1 逻辑概说 .....             | (10)  |
| § 1.2 数学概念 .....             | (17)  |
| § 1.3 命题与推理 .....            | (23)  |
| § 1.4 数学命题与数学证明 .....        | (35)  |
| § 1.5 集合初步 .....             | (47)  |
| 习题一 .....                    | (54)  |
| 第二章 数系 .....                 | (56)  |
| § 2.1 数的概念与数系的扩展 .....       | (56)  |
| § 2.2 自然数集 .....             | (59)  |
| § 2.3 整数环 .....              | (66)  |
| § 2.4 有理数域 .....             | (70)  |
| § 2.5 近似计算 .....             | (74)  |
| § 2.6 实数域 .....              | (81)  |
| § 2.7 复数域 .....              | (90)  |
| 习题二 .....                    | (100) |
| 第三章 解析式 .....                | (103) |
| § 3.1 数学符号发展简史 .....         | (103) |
| § 3.2 解析式概念及其分类 .....        | (104) |
| § 3.3 多项式 .....              | (106) |
| § 3.4 分式 .....               | (119) |
| § 3.5 根式 .....               | (128) |
| § 3.6 指数式与对数式 .....          | (136) |

|                           |       |
|---------------------------|-------|
| § 3.7 三角式与反三角式 .....      | (143) |
| 习题三 .....                 | (156) |
| <b>第四章 初等函数</b> .....     | (160) |
| § 4.1 函数概念 .....          | (160) |
| § 4.2 用初等方法讨论函数 .....     | (171) |
| § 4.3 基本初等函数 .....        | (187) |
| 习题四 .....                 | (202) |
| <b>第五章 方程</b> .....       | (206) |
| § 5.1 方程与方程的同解性 .....     | (206) |
| § 5.2 一元 $n$ 次方程 .....    | (220) |
| § 5.3 含有参数的方程 .....       | (235) |
| § 5.4 不定方程 .....          | (237) |
| § 5.5 初等超越方程 .....        | (240) |
| § 5.6 方程组 .....           | (250) |
| 习题五 .....                 | (260) |
| <b>第六章 不等式</b> .....      | (265) |
| § 6.1 不等式及其性质 .....       | (265) |
| § 6.2 证明不等式的常用方法 .....    | (267) |
| § 6.3 几个著名的不等式 .....      | (272) |
| § 6.4 解不等式(组) .....       | (283) |
| § 6.5 不等式的应用 .....        | (299) |
| 习题六 .....                 | (306) |
| <b>第七章 数列与数学归纳法</b> ..... | (310) |
| § 7.1 数列概述 .....          | (310) |
| § 7.2 等差数列与等比数列 .....     | (314) |
| § 7.3 高阶等差数列 .....        | (326) |
| § 7.4 线性递推数列 .....        | (332) |
| § 7.5 数学归纳法 .....         | (342) |
| 习题七 .....                 | (348) |
| <b>第八章 排列与组合</b> .....    | (351) |
| § 8.1 两个基本计数原理 .....      | (351) |

## 目 录

---

|                   |       |
|-------------------|-------|
| § 8.2 排列 .....    | (353) |
| § 8.3 组合 .....    | (364) |
| § 8.4 二项式定理 ..... | (369) |
| 习题八 .....         | (376) |
| 部分习题参考答案或提示 ..... | (378) |
| 主要参考书目 .....      | (413) |

# 绪 言

现代意义下的代数学,奠基于 16 世纪和 17 世纪.当时欧洲自然科学兴起,涌现出一批新型的知识分子.其中最杰出的代表之一是法国哲学家、数学家笛卡儿(René Descartes, 1596—1650).他在关于科学方法的研究中,首先发现代数具有作为一门普遍的科学方法的潜力.代数方法是研究和解决科学问题的有力工具,也是对数学对象进行抽象推理的有力工具.他在《指导思维的法则》一书中,提出了一个后来被称为“笛卡儿模式”的解决问题的通用方法.其要点是:

第一,将任何种类的问题化归为数学问题;

第二,将任何种类的数学问题化归为代数问题;

第三,将任何种类的代数问题化归为单个方程的求解问题.

尽管笛卡儿模式并不是放之四海而皆准的灵丹妙药,但是它在一定范围内还是适用的.事实上,笛卡儿本人在运用代数方法解决几何问题方面获得了极大成功,这导致解析几何的诞生.17 世纪的那些向来崇尚希腊演绎几何的数学大师们,如费马、沃利斯和牛顿,先后承认了代数方法的优点.到了 18 世纪,欧拉在《无穷小分析引论》中,赞扬代数大大优于希腊人的综合几何.从此,代数学的地位牢固确立,成为和几何学并重的一门重要的数学课程.

1859 年,我国清代数学家李善兰在翻译《代数学》时,首先把英文 algebra 译成代数学,以表达这门学科用字母代表数的特点.这就是汉语“代数”一词的来历.

## § 0.1 代数学发展的三个历史阶段

代数学的最早起源可以追溯到公元前 1800 年左右,那时代的巴比伦数学文献里已经含有二次方程和某些很特殊的三次方程.从那时起到公元 15 世纪的三千多年里,中国、印度以及阿拉伯和欧洲的一些国家都在不同的方面对代数学的发展作出了贡献.特别是中国的代数获得了比较系统的、高水平的发展.例如,约在公元 1 世纪前后成书的《九章算术》,其中记载了“方程术”和“正负术”等重要成就.到了 13 世纪前后,中国数学在高次方程的数值解法、同余式理论以及高阶等差数列等方面再放异彩,取得了令人惊异的成就.

纵观代数学发展的历史过程,大体上经历了初等代数的形成、高等代数的创

建以及抽象代数的产生和发展这三个阶段.

## 一、初等代数形成阶段

在初等代数漫长的渐进阶段,其中心问题一直是方程的解法.最早得到二次方程解法的是巴比伦人和中国人.尽管他们解方程的方法很不相同,但相同的是他们都没有使用符号.公元3世纪的希腊数学家丢番图,以及后来的印度数学家,都曾使用过一些数学符号.但由于当时的书籍的流传靠传抄,符号不能定型,辨认起来很不方便.所以公元9世纪的阿拉伯人,热心采用了印度的数码、记数法和各种运算方法,并推进了方程解法的研究,却断然抛弃了印度人的数学符号.

文艺复兴时期现代印刷业的出现,使标准符号的引进有了实现和推广的可能.韦达是第一位有意识地系统使用字母,从而使符号化代数得以初步形成的数学家.他把使用符号的代数称为“类的计算术”,以区别于“数的计算术”,以此作为代数与算术的分界线.所谓“类”,是指字母所代表的量.因此“类的计算术”就是关于字母的运算.使用字母代表数,不仅便于研究方程解法,而且由字母和数构成的代数式,是研究数学理论和表达科学规律的极其有效的工具.经过笛卡尔、沃利斯和牛顿等人的改进,代数符号进一步完善.1768年,欧拉发表《对代数的完整的介绍》,系统地论述了方程理论和其他代数知识.这部著作表明初等代数已经完全形成.

从韦达到欧拉时代的数学家,基本上认为代数学是研究方程解法和字母运算的科学,这正是初等代数的基本内容.

## 二、高等代数创建阶段

17世纪以来,三次和四次方程的根式解问题的完满解决,鼓励人们去探索更高次方程的根式解.虽然许多数学家求解五次方程的努力没有成功,但是他们在多项式理论方面却有很多建树.例如,法国数学家范德蒙德继牛顿之后研究对称函数,证明了根的任何对称函数都能用多项式方程的系数表示出来.

代数学的另一个方向是关于线性方程组的研究.麦克劳林和克拉默分别给出了由方程组系数确定方程组的解的克拉默法则.后来经过贝祖、范德蒙德和拉普拉斯等人的研究,行列式理论初步形成.柯西在前人研究的基础上给出了系统的近代行列式理论,并建立了特征方程和特征根的理论.19世纪中期,凯莱和西尔维斯特等人为矩阵理论奠定了基础.1887年,弗罗贝尼乌斯首先证明了哈密顿-凯莱定理.他还研究了矩阵的特征多项式、不变因子和初等因子的性质,并引入矩阵的秩的概念.后来若尔当利用相似矩阵等概念,于19世纪末期证明矩

阵可化为标准形,现称为若尔当标准型.在上述这些数学家们看来,代数学是研究多项式理论和线性代数的科学.这里的代数学就是现在所说的高等代数.

### 三、抽象代数的产生和发展阶段

19 世纪初期,两位年轻数学家阿贝尔和伽罗瓦在代数学研究中取得了划时代的突破性进展.阿贝尔首次证明了一般五次方程不可能用根式求解;伽罗瓦则进一步得到了代数方程能用根式求解的充要条件是自同构群可解,并创造了伽罗瓦理论.他所引入的群和域的概念,成为尔后发展起来的抽象代数的基石.但是他们的工作生前被人们忽视,直到 19 世纪后期,在若尔当、凯莱、戴德金和克莱因等的著作的广泛影响下,抽象的群、环、域的理论才得以成长.20 世纪前期,抽象代数在女数学家诺特的著作中达到成熟的地步.

抽象代数是在数学严格化、公理化和抽象化的思想指导下形成和崛起的.其研究对象不再是方程,而是群、环、域、格等抽象系统的代数结构.因此在现代数学家看来,代数学是研究各种代数结构的科学.这里的代数学指抽象代数或近世代数.

这里应指出,上述三个阶段并无明确的时间界限.特别是第二阶段和第三阶段在时间上是有交叉的.有些数学家,例如若尔当(Jordan, 1838—1922),对于高等代数中的矩阵理论和抽象代数中的群论都有杰出贡献.再如初等代数,虽说到 18 世纪时已经“完全形成”,但此后仍有所发展,特别在表达形式上有诸多改进.

## § 0.2 中学代数的百年演变

近代中小学教育始于 19 世纪的欧洲.1870 年,英国国会正式颁布《初等教育法》,可以看做是近代义务教育的开端,也是近代中小学教育的开端.继英国之后,欧洲主要国家和美国也纷纷跟进,在 19 世纪下半叶逐渐推广了中小学教育.当时无统一规定的课程计划,但数学教育一般都讲授算术、代数、三角、测量和几何.

中学代数的内容也大同小异,即都以整数运算、有理数运算、代数式运算和方程、方程组的解法为主,同时还包括等差、等比数列(级数)和排列、组合以及二项式定理等内容.

### 一、20 世纪初国际数学教育改革中的中学代数

20 世纪初,出现了要求改革数学教育的国际运动.这次改革运动的领头人是德国数学家克莱因(F. Klein, 1849—1925).1904 年,他在埃尔兰根大学演讲,

主张中学数学教学应当“以函数为中心”. 他于 1908—1909 年出版《高观点下的初等数学》卷 I 和卷 II, 强调用近代数学的观点来改造传统的中学数学内容, 加强函数和微积分的教学, 改革和充实代数的内容, 并主张用几何变换的观点改造传统的几何内容.

1908 年, 第四届国际数学家大会在罗马举行. 会上正式通过一项提案, 成立了以克莱因为主席的国际数学教育委员会. 委员会进一步肯定了克莱因关于中学数学教育改革的主张. 但后来的第一次世界大战终止了这一改革的进程.

作为这次改革运动的重要成果之一, 中学代数中增加了函数的内容, 并且用函数观点来考察方程和解析式等内容.

## 二、我国辛亥革命后的中学代数

辛亥革命推翻了清朝统治, 为建立近代中小学教育制度创造了条件. 1922 年, 当时的教育部发布《学校系统改革令》, 其中最重要的是从美国引进“六三三”学制: 规定小学 6 年, 初中 3 年, 高中 3 年. 该学制一直沿用至今. 1933 年发布《算学课程标准》, 规定中学开设 6 门数学课程: 算术、代数、平面几何、立体几何、三角和解析几何.

《初中算学课程标准》中规定了初中代数的内容(略).

《高中算学课程标准》中规定, 高中代数内容为: 代数式的运算、方程及方程组(解法及讨论: 独解、无解及有无数解之条件)、应用问题、初等函数、无理方程、排列、组合、或然率(概率)、级数、等差级数、等比级数、调和级数等(细目略).

由此可见, 我国上世纪 30 年代的中学代数内容已经基本和国际接轨. 当时没有规定全国统一的数学教材, 多数教科书译自美国和日本. 最著名的是《范氏大代数》, 作者是美国数学家范因(Fine, 1858—1928).

## 三、教育大发展、全面学苏联时期的中学代数

1949 年新中国成立以来, 教育大发展, 中小学教育迅速普及, 大学教育也发展很快. 1950—1958 年是全面学习苏联时期. 1952 年 7 月, 教育部根据“学习苏联先进经验, 先搬过来, 然后中国化”的方针编订了《中学数学教学大纲(草案)》, 该大纲基本上照搬苏联 10 年制学校 6—10 年级的数学教学大纲, 并且教材也使用编译过来的苏联教材. 规定中学数学 5 门课程: 算术、代数、平面几何、立体几何和三角, 完全删掉了解析几何, 而学习算术占用了 252 课时, 相当于 30 年代算术课时(108)的 233%.

就高中代数而言, 50 年代全国都用苏联教材. 内容相对较浅、较窄, 但系统性较强.

#### 四、20 世纪 60 年代的中学代数

因受国内“大跃进”的影响,1960 年前后有人提出反对学科教材“少、慢、差、费”,批判“量力性原则”.许多地方出现中小学“九年一贯制”甚至“七年一贯制”的试验,各地还编出一些“大跃进”式的数学教材.以华东师范大学编写的五年制中学数学课本为例.该套课本包括《代数与初等函数》两册、《数学分析》两册、《概率论与数理统计》一册、《计算数学初步》一册,都由上海教育出版社 1960 年出版.有些内容是大学二、三年级才学习的,竟然编进中学教科书.这些书其实就是由一些思想激进的在读大学生编写的.所幸当年在对国民经济进行“调整、巩固、充实、提高”的同时,也对教育事业进行了大幅度的整顿.教育部决定恢复“六三三”学制,把初中算术下放到小学,并于 1963 年颁布《全日制中学数学教学大纲(草案)》(下称《63 年大纲》).

《63 年大纲》首次提出:“中学数学的教学目的是:使学生牢固地掌握代数、平面几何、立体几何、三角和平面解析几何的基础知识,培养学生正确而且迅速的计算能力、逻辑思维能力和空间想象能力,以适应参加生产劳动和进一步学习的需要”.

《63 年大纲》摆脱了苏联十年制学校数学教学大纲的束缚,及时端正了我国数学教育的方向,为建设我国独立、完整的数学教育体系发挥了重要作用,在我国数学教育史上具有极其重要的地位.

《63 年大纲》中规定了中学代数的内容.

##### 1. 初中代数的教学内容:

- (1) 数(有理数、实数、常用对数及近似计算).
  - (2) 式(整式、分式、根式和有理指数的计算,多项式的因式分解等).
  - (3) 方程、方程组和一次不等式(解法,及二次方程的根的判别式,根与系数的关系).
  - (4) 直角坐标系和函数(正比例、反比例函数,一次、二次函数).
- 以上四类对象的概念、性质(或计算法则)等.

##### 2. 高中代数的教学内容:

- (1) 数的发展,复数的概念、性质和运算法则,复数的计算.
- (2) 多项式的一些性质和待定系数法;用综合除法和余数定理分解因式;用辗转相除法求最高公因式和最低公倍式;用待定系数法分解对称式的因式,分解分式成部分分式.
- (3) 方程的一些初步理论.一些简单的高次方程的解法;高次方程的无理根的近似值的求法;行列式的一些性质及用行列式解二元、三元、四元的线性方

程组.

(4) 不等式的性质,条件不等式、不等式组、绝对值不等式等的解法及不等式的证明.

(5) 等差数列、等比数列的通项公式和求和公式以及有关问题的解法;数列的极限和变量的极限的意义,有关极限的定理.

(6) 幂函数、指数函数和对数函数的概念和性质及其图像;对数的性质、简单的对数方程和指数方程、对数计算尺的构造原理和使用方法.

(7) 数学归纳法的证明方法,排列、组合的意义,利用排列、组合的基本公式解答一些简单问题,二项式定理和它的展开式的性质及概率的意义.

《63年大纲》所规定的中学代数的教学内容,得到广大中学数学教师的好评.特别在改革开放之后,更加彰显它的价值.

## 五、20 世纪 60 年代的“新数”运动

1957 年 11 月,苏联成功发射了第一颗人造卫星,美国人把空间技术方面的落后归咎于数学教育的落后,这是兴起数学教育现代化运动(简称“新数(new math)”)的起因.1959 年以后,“新数”运动扩展到法国、英国等国,60 年代几乎席卷了所有国家(中国除外).“新数”运动的主要内容是在中学数学引进现代数学的概念,大幅增加现代数学内容.如增加集合、逻辑、群、环、域、矩阵、向量、概率、统计、微积分等,强调结构统一和公理方法等.同时大幅削减基本运算和欧几里得几何等传统数学内容.

“新数”运动经历十几年的实践(在西方国家多元化的教育制度下,只是部分学校使用“新数”教科书),暴露出许多缺点和问题,受到猛烈的批评.到了 70 年代,又“回到基础”.80 年代又兴起以“问题解决”为中心的数学教育改革新方向.“新数”运动的主要问题是忽视量力性原则,忽视必要的基本技能训练,增加的内容过于抽象,分量过重,无法让学生真正理解和巩固.

“新数”运动的失败是前进中的挫折,其中有些改革措施得到历史的肯定.例如,增加集合和逻辑的初步知识,推广使用集合记号和逻辑用语,增加概率、统计和向量知识,增加微积分初步等内容,都是可行的.当然在增加新知识的同时,势必要精简一部分传统数学的内容.

## 六、1977—2000 年的我国中学代数

改革开放初期,百废待兴.教育领域的首要任务是恢复中小学正常的教学秩序,恢复高考.1978 年,教育部发布《全日制十年制学校中学数学教学大纲(草案)》(下称《78 年大纲》),规范五年制中学(初中三年,高中二年)的数学教学.

《78年大纲》明确提出以下三原则:

1. 精简传统的中学数学内容.
2. 增加微积分以及概率统计、逻辑代数等的初步知识.
3. 把集合、对应等思想适当渗透到教材中去.

这三条原则得到教育界的广泛赞同,并很快编写出新的数学教材和配套的教学参考书.但实践中立即暴露出问题:全国各地水平不齐,师资水平难以跟上,五年制中学无法适应新的高要求.为了解决这些问题,教育部于1982、1983年接连下发两个数学教学大纲.恢复六年制重点中学,并组织编写水平有差别的两套数学教材(甲种本、乙种本),以适应水平不一致的实际状况.同时大力加强师资培训.1986年,国家教委颁发《全日制中学数学教学大纲》.经过10年努力,我国中学数学教育最终确立了数学教育现代化的正确方向,贯彻了改革精神.

这时期的高中代数教材仍然保持系统性和相对完整性.虽然传统内容有所精简,但是涵盖的范围更广了.不仅把原来的“平面三角”精简后并入代数,而且新增了集合等内容.集合记号广泛使用,并用集合、对应思想革新了函数概念,还渗透到其他章节.

## 七、新世纪的数学教育和中学代数

教育部于2001年颁布《全日制义务教育数学课程标准(实验稿)》之后,又于2003年颁布《普通高中数学课程标准(实验稿)》(下称《高中新课标》),拉开了新世纪中小学数学教育改革的序幕.下面主要分析《高中新课标》.

《高中新课标》在课程结构设置方面较过去的大纲有很大的变化.课程结构框架彻底打破了传统模式.整个高中数学课程分成必修课程和选修课程.必修课程由5个模块组成(数学1—5),选修课程由4个系列组成.其中选修系列1为希望在人文、社会科学等方面发展的学生而设置,含两个模块;系列2为希望在理工、经济方面发展的学生而设置,含3个模块;系列3、4为对数学有兴趣以及希望进一步提高数学素养的学生而设置,系列3含6个专题,系列4含10个专题.规定每个模块36课时,每个专题18课时.

中学代数在本次课程改革中变化较大.改革后不再有单一的代数课本,取而代之的是混合编写的数学课本.下面关注的主要是高中数学必修课数学1至数学5,以及选修课的系列2.

高中代数有以下特点:

1. 高中代数包括必修课中集合、函数、平面向量、三角恒等变换、数列、不等式和解三角形等内容;选修课系列2包括常用逻辑用语、推理与证明、数系的扩充与复数的引入以及计数原理(排列组合)等内容.

2. 和以往的高中代数相比,精简了传统内容,如高次方程、反三角函数与三角方程等内容;同时增加了集合、平面向量、常用逻辑用语等内容.以上增减,是符合新时期的教改精神的.

3. 高中代数内容是最重要的数学基础知识,在高中数学中仍然占有最大的比例:在必修课中占 60%,在选修课系列 2 中占 44%.

## 八、中学代数的百年变革说明了什么

回顾中学代数的百年变革,可以看到具有以下特点:

1. 学科性 中学代数以代数学的基础知识为主体,因此它和初等代数高度契合,属于代数学科.人们有时将中学代数视为初等代数的同义语.

2. 开放性 为了实用的目的,中学代数的内容从一开始就吸收了原本不属于初等代数的知识.例如,19 世纪末的中学代数就含有等差、等比数列和排列、组合等内容.20 世纪初,受克莱因关于中学数学应当“以函数为中心”的观点的影响,中学代数接纳了函数内容.此后,有相当多的研究中学代数的著作,冠以《初等代数与初等函数》的书名.

20 世纪 60 年代以后,因受“新数”运动的影响,中学代数先后接纳集合与逻辑的初步知识,后来随着平面三角的逐渐“瘦身”,索性把以三角函数为主体的三角知识并入代数.由此可见,中学代数和孤芳自赏的欧氏几何不同,它有着兼收并蓄的开放性特征.

3. 发展性 中学代数随着社会的前进,自身也处于变革过程中.一方面淘汰不合时宜的东西,同时也接受新生事物.例如,从查各种数学用表发展到运用对数计算尺,再发展到使用计算器,再到使用电脑.

## § 0.3 “初等代数研究”的研究目的和内容

### 一、“初等代数研究”的研究目的

“初等代数研究”是师范院校数学教育类的一门专业必修课.这门课的研究目的是以现代数学观点审视中学代数所涉及的各种有关问题,加深、拓宽中学代数的知识和方法,夯实中学数学的基础,为学生将来走上教师岗位准备必要的学科知识.

《初等代数研究》这本书就是为“初等代数研究”这门课准备的教材,也可供在职中小学数学教师参考.

## 二、《初等代数研究》的内容

由于在确定中学代数内容时,要充分考虑中学生的原有知识基础和量力性原则,所以中学代数的许多内容都是比较浅显的,缺乏理论深度.例如,讲方程的解法回避了同解理论;讲复数不提为什么复数不能比较大小等.对于诸如此类的中学代数无法回答或无法彻底解决的问题,在本书中要以现代数学观点从理论上给予必要的论述.针对中学代数内容庞杂、浅显的特点,有必要加深、拓宽,使之形成知识体系.此外,针对一般数学教师逻辑知识比较欠缺的现状,利用首次把“常用逻辑用语”列入教学内容的契机,增加“逻辑与集合初步”作为第一章,以夯实中学数学的逻辑基础.

对于中学课本中已阐述充分、无需深究的内容,如解三角形等;或高等代数中已有详细讨论的内容,如平面向量等,本书不再研究.

在教材内容的编排次序上,本书和一般教材有所不同.对于一般教材,前面没有定义过的概念或没有介绍过的内容,是不可以引用的.但对于本书来说,凡是中学数学课本已有的内容,或是学生已学过的高等数学中较易掌握的内容,都可以看做是学生的已有知识,因而可以引用.

# 第一章 逻辑与集合初步<sup>①</sup>

从柏拉图时代开始,逻辑和数学就如影随形,共生共荣.逻辑源自数学,又渗透在数学之中.数学家们自觉要求数学理论应符合逻辑规范.在现代数学著作中,逻辑原则和方法已经成为数学理论的依据.逻辑用语和符号也被广泛采用.另一方面,数学家们又用数学方法改造并发展了逻辑,创造出以数理逻辑为核心的现代逻辑.

集合概念及其基本理论是现代数学的重要基础.从20世纪60年代起,集合初步知识被引入中学数学,集合、对应思想渗透于数学教材的许多章节,集合记号更是比比皆是.考虑到集合和逻辑内在联系十分密切,故放在一起讨论.

## § 1.1 逻辑概说

“逻辑”一词是英语“logic”的音译(始见于近代学者严复译《穆勒名学》,1905),而“logic”又源于古希腊语.在现代汉语中,“逻辑”一词除了作为逻辑学的简称之外,还具有“思维规则”、“客观规律”等意义.

### 一、逻辑学的研究对象和发展简史

#### 1. 逻辑学的研究对象和功用

逻辑学是研究概念、命题和推理的学问,其核心内容是研究推理的规律.

我们学习数学的主要目的之一就是学习如何进行推理,从而培养逻辑思维能力.当我们证明数学题(或解题)时,其关键就是如何运用推理寻找合适的证题(或解题)途径,进而作出正确的论证;并学会如何检查自己的论证推理是否正确,以及如何评价他人的论证推理是否正确.此外,我们学习数学时还要学习多种概念和命题.所有这一切,都和逻辑学的研究内容高度相关.因此,学一点逻辑初步知识对于理解和掌握数学会大有帮助.

逻辑的功用远不止数学.学点逻辑,有助于人们正确地分析事物的矛盾,探求真理,提高学习、认知能力;有助于人们准确、严密地表述思想,提高表达、辩论

---

<sup>①</sup> 第一章内容相对独立,对于课时较少的学校可作为选学内容.