全国理科高等数学研究会推荐
高等数学同步辅导及考研复习用书

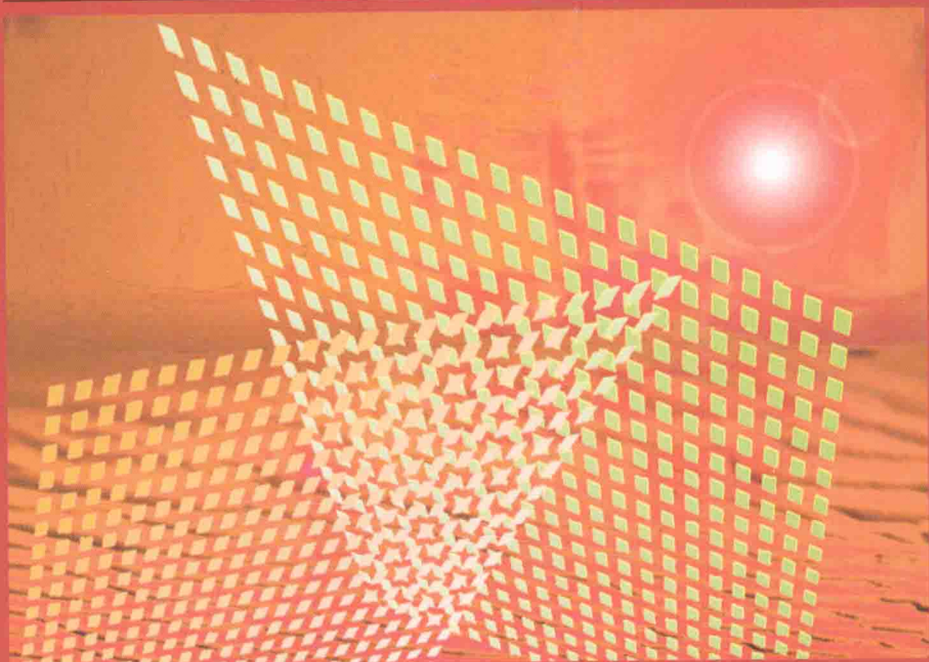
Б.П.吉米多维奇

数学分析习题精选精解 上

（第二版）

主编 张天德 路慧芹
主审 刘建亚 吴 臻

SHUXUE FENXI XITI JINGXUAN JINGJIE



山东科学技术出版社
www.lkj.com.cn

全国理科高等数学研究会推荐
高等数学同步辅导及考研复习用书

Б.П.吉米多维奇

数学分析习题精选精解 上

（第二版）

主　编　张天德　路慧芹
主　审　刘建亚　吴　臻
副主编　宋丽叶　刘允欣

SHUXUE FENXI XITI JINGXUAN JINGJIE

山东科学技术出版社
www.lkj.com.cn

图书在版编目(CIP)数据

数学分析习题精选精解．上／张天德，路慧芹主编．
—济南：山东科学技术出版社，2014
ISBN 978-7-5331-7324-1

Ⅰ．①数… Ⅱ．①张… ②路… Ⅲ．①数学分析—高等学校—题解 Ⅳ．①O17—44

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2014）第 082380 号

主　编　张天德　路慧芹
副主编　宋丽叶　刘允欣
编　委　（以姓氏笔画为序）

王子峰　王　刚　王　玮　王明辉　王　颜　毛　凯　孔爱中
左进明　叶　宏　付吉美　吕洪波　朱鹏华　乔　凤　刘长文
李亿民　李　娜　张云卿　张永存　张焕玲　张　锋　林　慧
宗晓航　贾广素　高夫征　程红玉　窦　慧

数学分析习题精选精解(上)

主编　张天德　路慧芹
主审　刘建亚　吴　臻

出版者：山东科学技术出版社
地址：济南市玉函路 16 号
邮编：250002　电话：(0531) 82098088
网址：www. lkj. com. cn
电子邮件：sdkj@sdpress. com. cn

发行者：山东科学技术出版社
地址：济南市玉函路 16 号
邮编：250002　电话：(0531) 82098071

印刷者：山东新华印务有限责任公司
地址：济南市世纪大道 2366 号
邮编：250104　电话：(0531)82079112

开本：720mm×1020mm　1/16
印张：19.5
版次：2014 年 7 月第 2 版第 6 次印刷

ISBN 978-7-5331-7324-1
定价：28.00 元

前言
QIANYAN

《数学分析》是数学各专业最重要的一门基础课，也是报考数学各专业硕士研究生的专业考试科目。初学者往往感到内容繁杂，方法深奥，做题困难，不易掌握，缺乏对其主要内容进行深入研究分析的能力。

《吉米多维奇数学分析习题集》自20世纪50年代初在我国翻译出版以来，在全国各大专院校广大师生中引起了巨大反响。凡从事数学分析教学的教师和数学专业的学生，常以试解该习题集中的习题作为检验掌握数学分析基本知识和基本技能的一项重要手段。该书4462道习题，数量多，内容丰富，由浅入深，部分题目难度大。为帮助、指导广大读者学好这门课程，《数学分析习题精选精解》的第一版从4462道习题中精选了部分习题，做出了详细的解答。图书出版后，得到了广大读者的认可。

许多读者反映本书内容虽然经典，但与平时学习的教材不吻合，不方便学习。针对这种情况，我们编辑出版本书的第二版。第二版将原书的内容打散，重新编排章节，在章节设置上和华东师范大学数学系主编的教材《数学分析》(第四版)基本一致，分为上下两卷。全书共分二十二章，每章又分若干节，涉及的内容涵盖了数学分析的全部主题。在内容上，增加了对数学分析课程涉及的基本内容的系统、透彻的分析，并对基本习题进行归类、分析，提炼出常用的解题方法，引导读者在熟练掌握基本解题方法的过程中，提高分析问题和解决问题的能力。

在本书中，每章除最后一节外每节包括两大部分内容：

知识要点：简要对每节涉及的基本概念、基本定理和常用公式进行系统梳理，便于读者快速复习、高效掌握，形成稳固、扎实的知识网，为提高解题能力和数学思维水平夯实基础。

基本题型：对每节常见的基本题型进行归纳总结，精选丰富的例题，举一反三，深入讲解，便于读者理解和掌握基本知识，有利于提高读者的解题能力和数学思维水平。

前言

QIANYAN

每章最后一节是综合提高题型，这一节的题目综合性较强，难度较大，有相当一部分是考研真题，给出了详细解答，以提高读者的综合解题能力。通过本节的学习，可以提高读者的应变能力、思维能力和分析问题、解决问题的能力，使读者把握重点、了解考研动向，同步完成考研备考，达到考研要求的水平。

该书可以作为在读大学生同步学习的优秀辅导书，也可以作为广大教师的教学参考书，还可以为毕业生考研复习提供富有成效的帮助。读者使用本书时，宜先独立求解，然后再与本书作比较，这样一定会获益匪浅，牢固掌握各种解题方法。

限于编者水平，书中疏漏与不妥之处在所难免，恳请同行和读者提出宝贵意见，以便再版时更正、改进。

编　者

2014 年 5 月

目录

MULU

目 录

MULU

第一章　实数集与函数

§1. 实　　数

1. 实数　实数由有理数与无理数两部分组成. 有理数可用分数形式 $\frac{p}{q}$ (p,q 为整数,$q\neq 0$) 表示,也可用有限十进小数或无限十进循环小数来表示;而无限十进不循环小数则称为无理数. 有理数和无理数统称为实数. 为了讨论实数理论的需要,我们把有限小数也表示为无限小数.

2. 实数的 n 位不足近似与 n 位过剩近似的定义

设 $x=a_0.a_1a_2\cdots a_n\cdots$ 为非负实数. 称有理数 $x_n=a_0.a_1a_2\cdots a_n$ 为实数 x 的 n 位不足近似,而有理数 $\overline{x}_n=x_n+\frac{1}{10^n}$ 称为 x 的 n 位过剩近似,$n=0,1,2,\cdots$. 对于负实数 $x=-a_0.a_1a_2\cdots a_n\cdots$,其 n 位不足近似与过剩近似分别规定为

$$x_n=-a_0.a_1a_2\cdots a_n-\frac{1}{10^n}\quad 与\quad \overline{x}_n=-a_0.a_1a_2\cdots a_n.$$

3. 充要条件　设 $x=a_0.a_1a_2\cdots$ 与 $y=b_0.b_1b_2\cdots$ 为两个实数,则 $x>y$ 的等价条件是:存在非负整数 n,使得 $x_n>\overline{y}_n$,其中 x_n 表示 x 的 n 位不足近似,$\overline{y}_n$ 表示 y 的 n 位过剩近似.

4. 实数的主要性质

(1)实数集 R 对加、减、乘、除(除数不为 0)四则运算是封闭的,即任意两个实数的和、差、积、商仍然是实数.

(2)实数集是有序的,即任意两实数 a、b 必满足下述三个关系之一:$a<b,a=b,a>b$.

(3)实数的大小关系具有传递性,即若 $a>b,b>c$,则有 $a>c$.

(4)实数具有阿基米德性,即对任何 $a,b\in R$,若 $b>a>0$,则存在正整数 n,使得 $na>b$.

(5)实数集 R 具有稠密性,即任何两个不相等的实数之间必有另一个实数,且既有有理数,也有无理数.

(6)实数集 R 与数轴上的点有着一一对应关系.

5. 绝对值的定义　实数 a 的绝对值定义为 $|a|=\begin{cases} a, & a\geqslant 0,\\ -a, & a<0.\end{cases}$

从数轴上看,数 a 的绝对值 $|a|$ 就是点 a 到原点的距离.

6. 实数的绝对值的主要性质

(1) $|a|=|-a|\geqslant 0$;当且仅当 $a=0$ 时有 $|a|=0$.

(2) $-|a|\leqslant a\leqslant |a|$.

(3) $|a|<h\Leftrightarrow -h<a<h$;$|a|\leqslant h\Leftrightarrow -h\leqslant a\leqslant h\quad (h>0)$.

(4)对于任何 $a,b\in R$ 有如下的三角形不等式:$|a|-|b|\leqslant |a\pm b|\leqslant |a|+|b|$.

(5) $|ab|=|a||b|$.

(6) $\left|\frac{a}{b}\right|=\frac{|a|}{|b|}\quad (b\neq 0)$.

基本题型

利用实数的性质证明相关结论

【1】设 $a,b\in R$. 证明:若对任何正数 ε 有 $a<b+\varepsilon$,则 $a\leqslant b$.

证 用反证法. 倘若结论不成立,则根据实数集的有序性,有 $a>b$. 令 $\varepsilon=\frac{1}{2}(a-b)$,则 ε 为正数且 $a>b+\varepsilon$,但这与假设 $a<b+\varepsilon$ 相矛盾. 从而必有 $a\leqslant b$.

点评 由本题可得结论:设 $a,b\in R$. 若对任何正数 ε 有 $|a-b|<\varepsilon$,则 $a=b$. 我们常用该结论证明两个实数相等.

【2】设 $x>0,b>0,a\neq b$. 证明 $\frac{a+x}{b+x}$ 介于 1 与 $\frac{a}{b}$ 之间.

证 $\left(\frac{a+x}{b+x}-1\right)\left(\frac{a+x}{b+x}-\frac{a}{b}\right)=\frac{a-b}{b+x}\cdot\frac{bx-ax}{(b+x)b}=-\frac{x(a-b)^2}{b(b+x)^2}$,

由题设条件 $x>0,b>0,a\neq b$ 可知 $-\frac{x(a-b)^2}{b(b+x)^2}<0$. 于是原命题得证.

点评 比较两数的大小通常用作差法或作商法. 而如果要证某数 a 介于另外两数 b 与 c 之间可转化为证 $(c-a)(b-a)<0$,该方法在 b 与 c 大小关系不确定时也不必分情况讨论,较为方便.

【3】设 p 为正整数. 证明:若 p 不是完全平方数,则 $\sqrt{p}$ 是无理数.

证 用反证法. 假若 $\sqrt{p}$ 为有理数,设 $\sqrt{p}=\frac{u}{v}$,u,v 为正整数,互质,且 $v\neq 0$,于是有 $p=\frac{u^2}{v^2}$.

一方面,p 为非平方数,故 $v^2\neq 1$. 另一方面,因 u 与 v 互质,故 u^2 与 v^2 也互质;但由 $u^2=pv^2$,v^2 为 u^2 的一个整数因子,故必有 $v^2=1$,矛盾. 由此可见 $\sqrt{p}$ 为无理数.

几个著名的不等式及证明

【4】证明伯努利(Bernoulli)不等式:设 $h>-1,n\in N_+,n\geqslant 2$,则有

$$(1+h)^n\geqslant 1+nh,$$

其中等号当且仅当 $h=0$ 时成立.

证 当 $h=0$ 时显然等号成立. 现设 $h\neq 0$,对 $n\geqslant 2$,当 $h>0$ 时有

$$(1+h)^n=1+nh+\frac{n(n-1)}{2}h^2+\cdots+h^n>1+nh;$$

当 $-1<h<0$ 时有

$$\begin{aligned}(1+h)^n-1&=(1+h-1)[1+(1+h)+(1+h)^2+\cdots+(1+h)^{n-1}]\\&=h[1+(1+h)+(1+h)^2+\cdots+(1+h)^{n-1}]\\&>nh.\end{aligned}$$

【5】证明柯西(Cauchy)不等式:设 $x_1,\cdots,x_n,y_1,\cdots,y_n$ 为两组实数,则有

$$\left(\sum_{i=1}^{n}x_iy_i\right)^2\leqslant\left(\sum_{i=1}^{n}x_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n}y_i^2\right).$$

证法一 不妨设 $x_1,\cdots,x_n$ 不全为零. 考虑关于 λ 的二次三项式

$$0\leqslant\sum_{i=1}^{n}(\lambda x_1-y_i)^2=\lambda^2\sum_{i=1}^{n}x_i^2-2\lambda\sum_{i=1}^{n}x_iy_i+\sum_{i=1}^{n}y_i^2,$$

上式右边关于任何实数 λ 为非负，故其判别式 $\leqslant 0$，即有

$$\left(2\sum_{i=1}^{n}x_iy_i\right)^2-4\left(\sum_{i=1}^{n}x_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n}y_i^2\right)\leqslant 0\Rightarrow\left(\sum_{i=1}^{n}x_iy_i\right)^2\leqslant\left(\sum_{i=1}^{n}x_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n}y_i^2\right).$$

证法二 由等式

$$\sum_{i=1}^{n}\left[\frac{x_i}{\sqrt{x_1^2+\cdots+x_n^2}}\right]^2=1=\sum_{i=1}^{n}\left[\frac{y_i}{\sqrt{y_1^2+\cdots+y_n^2}}\right]^2,$$

得到

$$\sum_{i=1}^{n}\left\{\left[\frac{x_i}{\sqrt{x_1^2+\cdots+x_n^2}}\right]^2+\left[\frac{y_i}{\sqrt{y_1^2+\cdots+y_n^2}}\right]^2\right\}=2.$$

由不等式 $x^2+y^2\geqslant 2|x||y|=2|xy|$ 可见，上述和式大括号中每两项之和不小于

$$\frac{2|x_iy_i|}{\sqrt{\left(\sum\limits_{i=1}^{n}x_i^2\right)\left(\sum\limits_{i=1}^{n}y_i^2\right)}},$$

从而有

$$\frac{2\sum\limits_{i=1}^{n}|x_iy_i|}{\sqrt{\left(\sum\limits_{i=1}^{n}x_i^2\right)\left(\sum\limits_{i=1}^{n}y_i^2\right)}}\leqslant 2\Rightarrow\left(\sum_{i=1}^{n}x_iy_i\right)^2\leqslant\left(\sum_{i=1}^{n}x_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n}y_i^2\right).$$

点评 柯西不等式中等号成立的充要条件是数组 $\{x_i\}_1^n$ 与 $\{y_i\}_1^n$ 对应成比例，即存在不全为 0 的数 λ 和 μ，使得 $\lambda x_i+\mu y_i=0$，$i=1,2,\cdots,n$.

【6】证明平均值不等式：设 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 为 n 个正实数，则

$$\sqrt[n]{x_1x_2\cdots x_n}\leqslant\frac{1}{n}(x_1+x_2+\cdots+x_n).$$

证 当 $n=1,2$ 时，不等式显然成立. 假设对任意 $n-1$ 个正实数，命题成立. 对 n 个正实数的情形，我们重新排列它们，使 x_n 为其中最大的一个，则有

$$x_n\geqslant A=\frac{1}{n-1}(x_1+x_2+\cdots+x_{n-1})\geqslant\sqrt[n-1]{x_1x_2\cdots x_{n-1}}.$$

于是

$$\begin{aligned}\left(\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}\right)^n&=\left[\frac{(n-1)A+x_n}{n}\right]^n=\left(A+\frac{x_n-A}{n}\right)^n=A^n+nA^{n-1}\left(\frac{x_n-A}{n}\right)+\cdots\\&\geqslant A^n+nA^{n-1}\left(\frac{x_n-A}{n}\right)=A^{n-1}x_n\geqslant x_1x_2\cdots x_{n-1}x_n,\end{aligned}$$

即 $\sqrt[n]{x_1x_2\cdots x_n}\leqslant\dfrac{1}{n}(x_1+x_2+\cdots+x_n)$.

当且仅当所有的 x_i 都相等时，等号成立.

【7】证明赫尔德(Hölder)不等式：设实数 p,q 满足 $\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{q}=1$，且 a_i,b_i $(i=1,2,\cdots,n)$ 为非负实数，则当 $p>1$ 时，

$$\sum_{i=1}^{n}a_ib_i\leqslant\left(\sum_{i=1}^{n}a_i^p\right)^{\frac{1}{p}}\left(\sum_{i=1}^{n}b_i^q\right)^{\frac{1}{q}},$$

当 $p<1$ 时，上述不等式反向. 当且仅当 a_i^p 与 b_i^q 成比例时，等号成立.

证 利用下列不等式：对 $t>0$，有

$$t^{\alpha}-\alpha t+\alpha-1\geqslant 0\quad(\alpha>1\text{ 或 }\alpha<0),\qquad ①$$

$$t^{\alpha}-\alpha t+\alpha-1\leqslant 0\quad(0<\alpha<1).\qquad ②$$

当 $t=1$ 时等号成立（利用函数的单调性与极值来证明）.

在式①、式②中，令 $\alpha=\frac{1}{p}$，$1-\alpha=\frac{1}{q}$，并以 $\frac{x}{y}$ 代替 t，得

$p<1$ 时，$\left(\frac{x}{y}\right)^{\frac{1}{p}}\geqslant\frac{1}{p}\frac{x}{y}+\frac{1}{q}\Rightarrow x^{\frac{1}{p}}y^{1-\frac{1}{p}}\geqslant\frac{x}{p}+\frac{y}{q}$；

$p>1$ 时，$x^{\frac{1}{p}}y^{1-\frac{1}{p}}\leqslant\frac{x}{p}+\frac{y}{q}$，

即

$$\begin{cases}x^{\frac{1}{p}}y^{\frac{1}{q}}\leqslant\dfrac{x}{p}+\dfrac{y}{q}, & p>1, \qquad ③\\ x^{\frac{1}{p}}y^{\frac{1}{q}}\geqslant\dfrac{x}{p}+\dfrac{y}{q}, & p<1. \qquad ④\end{cases}$$

在式③中，令 $x_i=\frac{a_i^p}{A}$，$y_i=\frac{b_i^q}{B}$，其中 $A=\sum\limits_{i=1}^{n}a_i^p$，$B=\sum\limits_{i=1}^{n}b_i^q$，则当 $p>1$ 时，有

$$\frac{a_ib_i}{A^{\frac{1}{p}}B^{\frac{1}{q}}}\leqslant\frac{a_i^p}{pA}+\frac{b_i^q}{qB},\quad i=1,2,\cdots,n.$$

于是

$$\sum_{i=1}^{n}a_ib_i\leqslant A^{\frac{1}{p}}B^{\frac{1}{q}}\left[\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}a_i^p}{pA}+\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}b_i^q}{qB}\right]=A^{\frac{1}{p}}B^{\frac{1}{q}}\left(\frac{1}{p}+\frac{1}{q}\right)=\left(\sum_{i=1}^{n}a_i^p\right)^{\frac{1}{p}}\left(\sum_{i=1}^{n}b_i^q\right)^{\frac{1}{q}}.$$

类似可证 $p<1$ 时的不等式.

【8】证明闵可夫斯基(Minkowski)不等式：对任意的 $r\neq0,1$ 及 $a_i,b_i\geqslant0$ $(i=1,2,\cdots,n)$，有：

当 $r>1$ 时，$\left(\sum\limits_{i=1}^{n}(a_i+b_i)^r\right)^{\frac{1}{r}}\leqslant\left(\sum\limits_{i=1}^{n}a_i^r\right)^{\frac{1}{r}}+\left(\sum\limits_{i=1}^{n}b_i^r\right)^{\frac{1}{r}}$，

当 $r<1$ 时，上述不等式反向. 当且仅当 a_i 与 b_i 成比例时，等号成立.

证 当 $r>1$ 时，令 $t_i=a_i+b_i$，有

$$\sum_{i=1}^{n}t_i^r=\sum_{i=1}^{n}(a_i+b_i)^r=\sum_{i=1}^{n}(a_i+b_i)^{r-1}(a_i+b_i)=\sum_{i=1}^{n}a_it_i^{r-1}+\sum_{i=1}^{n}b_it_i^{r-1}.$$

又令 $p=r$，$q=\frac{r}{r-1}$，则 $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$，应用赫尔德不等式，得

$$\sum_{i=1}^{n}t_i^r\leqslant\left(\sum_{i=1}^{n}a_i^r\right)^{\frac{1}{r}}\left(\sum_{i=1}^{n}t_i^r\right)^{\frac{r-1}{r}}+\left(\sum_{i=1}^{n}b_i^r\right)^{\frac{1}{r}}\left(\sum_{i=1}^{n}t_i^r\right)^{\frac{r-1}{r}}$$

$$=\left[\left(\sum_{i=1}^{n}a_i^r\right)^{\frac{1}{r}}+\left(\sum_{i=1}^{n}b_i^r\right)^{\frac{1}{r}}\right]\left(\sum_{i=1}^{n}t_i^r\right)^{1-\frac{1}{r}}.$$

不等式两边同乘 $\left(\sum\limits_{i=1}^{n}t_i^r\right)^{\frac{1}{r}-1}$ (>0)，得

$$\left(\sum_{i=1}^{n}t_i^r\right)^{\frac{1}{r}}=\left(\sum_{i=1}^{n}(a_i+b_i)^r\right)^{\frac{1}{r}}\leqslant\left(\sum_{i=1}^{n}a_i^r\right)^{\frac{1}{r}}+\left(\sum_{i=1}^{n}b_i^r\right)^{\frac{1}{r}}.$$

类似可证 $r<1$ 时的不等式.

利用绝对值的性质求解不等式

【 9 】在数轴上表示出不等式 $|x-1|<|x-3|$ 的解.

解 不等式 $|x-1|<|x-3|$ 同解于不等式 $(x-1)^2<(x-3)^2$,即 $x^2-2x+1<x^2-6x+9$,解得 $x<2$. 从而不等式 $|x-1|<|x-3|$ 的解为 $x<2$. 在数轴上表示如图 1−1 所示.

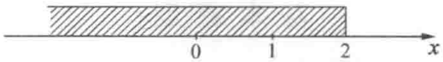


图 1−1

【 10 】求解不等式 $|x-a|<|x-b|$,其中 a,b 为给定实数.

解 由于 $x=b$ 不是原不等式的解,故原不等式可化为 $\left|\dfrac{x-a}{x-b}\right|<1$,即 $-1<\dfrac{x-a}{x-b}<1$. 由此得不等式组

$$\begin{cases}\dfrac{(x-a)-(x-b)}{x-b}<0,\\[2mm] \dfrac{(x-a)+(x-b)}{x-b}>0,\end{cases}\quad 即\quad \begin{cases}x>b,\\ b-a<0,\\ 2x-a-b>0,\end{cases}\quad 或\quad \begin{cases}x<b,\\ b-a>0,\\ 2x-a-b<0.\end{cases}$$

故当 $a<b$ 时,原不等式的解为 $x>\dfrac{a+b}{2}$;当 $a<b$ 时,原不等式的解为 $x<\dfrac{a+b}{2}$.

当 $a=b$ 时,原不等式的解集是 $\varnothing$.

§2. 数集 · 确界原理

1. 区间与邻域 设 $a,b\in R$,且 $a<b$. 数集 $\{x|a<x<b,x\in R\}$ 称为开区间,记作 (a,b);数集 $\{x|a\leqslant x\leqslant b,x\in R\}$ 称为闭区间,记作 $[a,b]$;类似可定义半开区间 $[a,b)$ 和 $(a,b]$,这几类区间统称为有限区间. 满足关系式 $x\geqslant a$ 的全体实数 x 的集合记作 $[a,+\infty)$,类似可定义 $(-\infty,a]$,$(a,+\infty)$,$(-\infty,a)$,$(-\infty,+\infty)=R$,这几类数集都称为无限区间. 有限区间和无限区间统称为区间.

设 $a\in R,\delta>0$. $U(a;\delta)=\{x\,|\,|x-a|<\delta,x\in R\}=(a-\delta,a+\delta)$ 称为点 a 的 δ 邻域;$U^0(a;\delta)=\{x|0<|x-a|<\delta,x\in R\}$ 称为点 a 的空心 δ 邻域;类似地有:点 a 的 δ 右邻域 $U_+(a;\delta)=[a,a+\delta)$;点 a 的 δ 左邻域 $U_-(a;\delta)=(a-\delta,a]$;点 a 的空心 δ 左、右邻域 $U_-^0(a;\delta)=(a-\delta,a)$ 与 $U_+^0(a;\delta)=(a,a+\delta)$;$\infty$ 邻域 $U(\infty)=\{x\,|\,|x|>M\}$,其中 M 为充分大的正数(下同);$+\infty$ 邻域 $U(+\infty)=\{x|x>M\}$;$-\infty$ 邻域 $U(-\infty)=\{x|x<-M\}$.

2. 有界集的定义 设 S 为 R 中的一个数集,若存在数 $M(L)$,使得对一切 $x\in S$,都有 $x\leqslant M$ $(x\geqslant L)$,则称 S 为有上界(下界)的数集,数 $M(L)$ 称为 S 的一个上界(下界). 若数集 S 既有上界又有下界,则称 S 为有界集. 若 S 不是有界集,则称 S 为无界集.

3. 上确界的定义 设 S 是 R 中的一个数集. 若数 η 满足:

(ⅰ)对一切 $x\in S$,有 $x\leqslant\eta$,即 η 是 S 的上界;

(ⅱ)对任何 $\alpha<\eta$,存在 $x_0\in S$,使得 $x_0>\alpha$,即 η 又是 S 的最小上界,

则称数 η 为数集 S 的上确界,记作 $\eta=\sup S$. 若数集 S 无上界,则定义 $\sup S=+\infty$.

4. 下确界的定义 设 S 是 R 中的一个数集. 若数 ξ 满足:

（ⅰ）对一切 $x\in S$，有 $x\geqslant\xi$，即 ξ 是 S 的下界；

（ⅱ）对任何 $\beta>\xi$，存在 $x_0\in S$，使得 $x_0<\beta$，即 ξ 又是 S 的最大下界，

则称数 ξ 为数集 S 的下确界，记作 $\xi=\inf S$. 若数集 S 无下界，则定义 $\inf S=-\infty$.

5. 确界原理 设 S 为非空数集. 若 S 有上界，则 S 必有上确界；若 S 有下界，则 S 必有下确界.

基本题型

根据上、下确界的定义求给定数集的上、下确界

【11】 设数集 $S=\{x\,|\,x^2<2\}$，求 $\sup S$，$\inf S$.

解 ∵ $S=\{x\,|\,x^2<2\}=(-\sqrt{2},\sqrt{2})$. S 的上、下确界分别为 $\sqrt{2}$ 和 $-\sqrt{2}$.

对 $\forall x\in S$，均有 $x\leqslant\sqrt{2}$；对 $\forall\varepsilon>0$，不妨设 $\varepsilon<2\sqrt{2}$，取 $x_0=\sqrt{2}-\dfrac{\varepsilon}{2}$，则

$$x_0^2=\left(\sqrt{2}-\frac{\varepsilon}{2}\right)^2=2+\frac{\varepsilon^2}{4}-\sqrt{2}\varepsilon<2,$$

即 $x_0\in S$，且 $x_0>\sqrt{2}-\varepsilon$. 因此 $\sup S=\sqrt{2}$.

对 $\forall x\in S$，均有 $x\geqslant-\sqrt{2}$；对 $\forall\varepsilon>0$，不妨设 $\varepsilon<2\sqrt{2}$，取 $x_1=-\sqrt{2}+\dfrac{\varepsilon}{2}$，则

$$x_1^2=\left(-\sqrt{2}+\frac{\varepsilon}{2}\right)^2=2+\frac{\varepsilon^2}{4}-\sqrt{2}\varepsilon<2,$$

即 $x_1\in S$，且 $x_1<-\sqrt{2}+\varepsilon$. 因此 $\inf S=-\sqrt{2}$.

【12】 设数集 $S=\{y\,|\,y=1+x^2,x\text{ 为有理数}\}$，试求 $\inf S$，$\sup S$.

解 对 $\forall M>0$，∃ 有理数 x_0（设 $M>1$，只要 $x_0>\sqrt{M-1}$），使得 $1+x_0^2>M$，于是 S 为无上界数集. 按定义，$\sup S=+\infty$. 下证 $\inf S=1$：

（ⅰ）$\forall y\in S$，$y=1+x^2\geqslant1$ （x 为有理数）；

（ⅱ）$\forall\varepsilon>0$，由有理数的稠密性，∃ 有理数 x_0，使得 $-\sqrt{\varepsilon}<x_0<\sqrt{\varepsilon}$，于是 $1+x_0^2<1+\varepsilon$. 由下确界的定义知 $\inf S=1$.

【13】 设数集 $S=\left\{x\,\middle|\,x=1-\dfrac{1}{2^n},n\in N_+\right\}$，求 $\sup S$，$\inf S$.

解 $\sup S=1$，$\inf S=\dfrac{1}{2}$. 因为 S 中的最小元素为 $\dfrac{1}{2}$，所以 $\dfrac{1}{2}$ 是 S 的最大下界，即 $\dfrac{1}{2}$ 是 S 的下确界. 由于 $1-\dfrac{1}{2^n}<1$ （$n\in N_+$），所以 1 是 S 的一个上界，对任意的 $\varepsilon>0$，存在 $n_0\in N_+$，使得 $\dfrac{1}{2^{n_0}}<\varepsilon$，于是取 $x_0=1-\dfrac{1}{2^{n_0}}\in S$，且 $x_0>1-\varepsilon$. 因此，1 是 S 的上确界.

【14】 设数集 $S=\left\{1+n\sin\dfrac{n\pi}{3}\,\middle|\,n\in N_+\right\}$，求 $\sup S$，$\inf S$.

解 取 $n=6k+1$ （$k=1,2,\cdots$）得到数集 S 的子集 $S_1=\left\{1+(6k+1)\dfrac{\sqrt{3}}{2}\,\middle|\,k\in N_+\right\}$；

取 $n=6k+5$ （$k=1,2,\cdots$）又得到数集 S 的子集 $S_2=\left\{1-(6k+5)\dfrac{\sqrt{3}}{2}\,\middle|\,k\in N_+\right\}$.

由于 S_1 是无上界数集，S_2 是无下界数集，所以 $\sup S=+\infty$，$\inf S=-\infty$.

利用确界定义和确界原理证明

【15】设 S 为非空有界数集，定义 $S^- = \{x \mid -x \in S\}$. 证明

(1) $\inf S^- = -\sup S$； (2) $\sup S^- = -\inf S$.

证 ∵ S 为非空有界数集，∴ $S^- = \{x \mid -x \in S\}$ 也是有界数集. 从而由确界原理知 $\inf S^-$，$\sup S^-$，$\inf S$，$\sup S$ 均存在且有限. 设 $\sup S = \eta$，则对 $\forall x' \in S^-$，$-x' \in S$，从而有 $-x' \leqslant \eta$，即 $x' \geqslant -\eta$. 故 $-\eta$ 是 S^- 的一个下界. 又 $\forall \varepsilon > 0$，$\exists x_0 \in S$，使得 $x_0 > \eta - \varepsilon$. 于是 $-x_0 \in S^-$，$-x_0 < -\eta + \varepsilon$. 故 $-\eta$ 是 S^- 的下确界，即 $\inf S^- = -\sup S$.

同理可证 $\sup S^- = -\inf S$.

【16】设 A、B 皆为非空有界数集，定义数集 $A+B = \{z \mid z = x + y, x \in A, y \in B\}$. 证明：

(1) $\sup(A+B) = \sup A + \sup B$； (2) $\inf(A+B) = \inf A + \inf B$.

证 由于 A、B 有界，所以 $A+B$ 也有界，由确界原理知集合 A，B 及 $A+B$ 的上、下确界均存在且有限.

(1) 对 $\forall c \in A+B$，存在 $a \in A$，$b \in B$，使得 $c = a + b$，设 $\sup A = \eta_1$，$\sup B = \eta_2$，则 $a \leqslant \eta_1$，$b \leqslant \eta_2$，从而 $c \leqslant \eta_1 + \eta_2$. 因此 $\eta_1 + \eta_2$ 是 $A+B$ 的一个上界.

对 $\forall \varepsilon > 0$，$\exists a_0 \in A$，$b_0 \in B$，使得 $a_0 > \eta_1 - \dfrac{\varepsilon}{2}$，$b_0 > \eta_2 - \dfrac{\varepsilon}{2}$. 于是 $a_0 + b_0 > (\eta_1 + \eta_2) - \varepsilon$ 且 $(a_0 + b_0) \in (A+B)$，故 $\sup(A+B) = \eta_1 + \eta_2 = \sup A + \sup B$.

(2) 同理可证 $\inf(A+B) = \inf A + \inf B$.

§3. 函数概念

1. 函数的定义 设 $D \subset R$，$D \neq \varnothing$，若对 $\forall x \in D$，按照对应法则 f，有唯一确定的 $y \in R$ 与之对应，则称 f 为定义在 D 上的函数，记为 $f: D \to R$ $(x \to y = f(x))$. 数集 D 称为函数 f 的定义域，y 称为 x 所对应的函数值，记为 $y = f(x)$，函数值的集合称为 f 的值域，记为 $f(D)$. 即

$$f(D) = \{y \mid y = f(x), x \in D\} \subset R.$$

2. 复合函数的定义 设 $y = f(u)$，$u \in D$；$u = \varphi(x)$，$x \in E$. 若 $E^* = \{x \mid \varphi(x) \in D, x \in E\} \neq \varnothing$，则在 E^* 上确定了一个由 $y = f(u)$ 与 $u = \varphi(x)$ 经过复合运算所得到的复合函数，记作 $y = f(\varphi(x))$，$x \in E^*$，其中 $y = f(u)$ 称为外函数，$u = \varphi(x)$ 称为内函数，u 称为中间变量.

3. 反函数的定义 设函数 $y = f(x)$，$x \in D$，$y \in f(D)$. 若对 $\forall y_0 \in f(D)$，在 D 中有唯一确定的 x_0，使得 $y_0 = f(x_0)$，则在 $f(D)$ 上确定了一个函数，称为函数 $y = f(x)$ 的反函数，记作

$$f^{-1}: f(D) \to D \quad 或 \quad x = f^{-1}(y), y \in f(D).$$

4. 基本初等函数与初等函数 常数函数 $y = c$（c 为常数），幂函数 $y = x^\alpha$ $(\alpha \in R)$，指数函数 $y = a^x$ $(a \neq 1, a > 0)$，对数函数 $y = \log_a x$ $(a \neq 1, a > 0)$，三角函数和反三角函数称为基本初等函数. 由基本初等函数经过有限次四则运算或有限次复合运算，并由一个式子表示的函数称为初等函数.

基本题型

确定一元函数的定义域

【17】确定下列初等函数的定义域.

(1) $y=\lg(\lg x)$； (2) $y=\arcsin\left(\lg\dfrac{x}{10}\right)$.

解 (1)由 $\lg x>0$,得 $x>1$. 故 $y=\lg(\lg x)$的存在域为$(1,+\infty)$.

(2) $y=\arcsin x$ 的定义域为$[-1,1]$. 由$-1\leqslant\lg\dfrac{x}{10}\leqslant1$ 得$\dfrac{1}{10}\leqslant\dfrac{x}{10}\leqslant10$. 故 $y=\arcsin\left(\lg\dfrac{x}{10}\right)$的定义域为$[1,100]$.

点评 求函数的定义域,在不和具体问题结合的情况下,就是求使式子有意义的一切实数值,即存在域. 通常需要考虑如下几点：

①分母不得为零；

②偶次根号下的式子非负；

③对数符号后的值为正；

④正(余)切函数符号后的值不等于 $k\pi+\dfrac{\pi}{2}(k\pi)$ $(k=0,\pm1,\cdots)$；

⑤反正、余弦符号后的值的绝对值不大于1；

⑥若函数由几项组成,取各项定义域的交集；

⑦分段函数取各段定义域的并.

【18】 设 $f(x)=\tan x$, $f(g(x))=x^2-2$,且$|g(x)|\leqslant\dfrac{\pi}{4}$,则 $g(x)$的定义域为______.

解 $f(g(x))=\tan(g(x))=x^2-2$,所以 $g(x)=\arctan(x^2-2)$. 因为$|g(x)|\leqslant\dfrac{\pi}{4}$,所以$-1\leqslant x^2-2\leqslant1$,因此$-\sqrt{3}\leqslant x\leqslant-1$ 或 $1\leqslant x\leqslant\sqrt{3}$.

故应填$[-\sqrt{3},-1]\cup[1,\sqrt{3}]$.

讨论一元函数的值域

【19】 函数 $f(x)=\dfrac{\sin x}{1+x^2}$的值域是______.

(A) $\left(-\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2}\right)$ (B) $[0,1]$ (C) $[-1,0]$ (D) $[-1,1]$

解 因为$|f(x)|=\left|\dfrac{\sin x}{1+x^2}\right|\leqslant\dfrac{|x|}{1+x^2}<\dfrac{|x|}{2|x|}=\dfrac{1}{2}$,所以$-\dfrac{1}{2}<f(x)<\dfrac{1}{2}$.

故应选(A).

【20】 函数 $y=\sin\dfrac{\pi x}{2(1+x^2)}$的值域是______.

(A) $[-1,1]$ (B) $\left[-\dfrac{\sqrt{2}}{2},\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right]$ (C) $[0,1]$ (D) $\left[-\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2}\right]$

解 因为 $1+x^2\geqslant2|x|$,所以$-\dfrac{1}{2}\leqslant\dfrac{x}{1+x^2}\leqslant\dfrac{1}{2}$,因此$-\dfrac{\pi}{4}\leqslant\dfrac{\pi x}{2(1+x^2)}\leqslant\dfrac{\pi}{4}$,从而$-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\leqslant\sin\dfrac{\pi x}{2(1+x^2)}\leqslant\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

故应选(B).

求一元函数的表达式

【21】 设 $f\left(\dfrac{x+1}{x-1}\right)=3f(x)-2x$,求 $f(x)$.

解 令$\frac{x+1}{x-1}=t$,则 $x=\frac{t+1}{t-1}$,于是

$$f(t)=3f\left(\frac{t+1}{t-1}\right)-\frac{2t+2}{t-1}=3(3f(t)-2t)-\frac{2t+2}{t-1},$$

整理得 $8f(t)=6t+2\frac{t+1}{t-1}$,所以 $f(x)=\frac{3}{4}x+\frac{1}{4}\frac{x+1}{x-1}$, $x\neq1$.

【22】 设 $f(x)$ 满足 $f^2(\ln x)-2xf(\ln x)+x^2\ln x=0$,且 $f(0)=0$,求 $f(x)$.

解 令 $t=\ln x$,即 $x=e^t$,则有 $f^2(t)-2e^tf(t)+te^{2t}=0$,解得

$$f(t)=e^t\pm\sqrt{e^{2t}-te^{2t}}=e^t(1\pm\sqrt{1-t}).$$

由 $f(0)=0$,从而 $f(t)=e^t(1-\sqrt{1-t})$,$t\leqslant1$. 即所求的函数为 $f(x)=e^x(1-\sqrt{1-x})$,$x\leqslant1$.

【23】 设 $f(x)=\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$,求 $f_n(x)=\underbrace{f(f(\cdots f(x)))}_{n个}$.

解 因为函数 f 的值域包含于 f 的定义域内,所以 f 与 f 可以复合,于是有

$$f(f(x))=\frac{\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}}{\sqrt{1+\frac{x^2}{1+x^2}}}=\frac{x}{\sqrt{1+2x^2}};\quad f(f(f(x)))=\frac{\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}}{\sqrt{1+\frac{x^2}{1+2x^2}}}=\frac{x}{\sqrt{1+3x^2}}.$$

由此可猜测 $f_n(x)=\frac{x}{\sqrt{1+nx^2}}$,下面用数学归纳法证明.

若 $f_n(x)=\frac{x}{\sqrt{1+nx^2}}$,则

$$f_{n+1}(x)=f(f_n(x))=\frac{\frac{x}{\sqrt{1+nx^2}}}{\sqrt{1+\frac{x^2}{1+nx^2}}}=\frac{x}{\sqrt{1+(n+1)x^2}}.$$

从而 $f_n(x)=\frac{x}{\sqrt{1+nx^2}}$.

【24】 设函数 $\varphi(x)=\begin{cases}1, & |x|\leqslant1,\\ 0, & |x|>1,\end{cases}$ $\psi(x)=\begin{cases}2-x^2, & |x|\leqslant2,\\ 2, & |x|>2.\end{cases}$ 试求 $y=\varphi(\psi(x))$.

解 首先观察到函数 ψ 的值域包含在函数 φ 的定义域中,因为 φ 与 ψ 可以复合.

先求集合 $\{x\mid|\psi(x)|\leqslant1\}=\{x\mid|2-x^2|\leqslant1\}$,解不等式 $|2-x^2|\leqslant1$ 可得 $1\leqslant|x|\leqslant\sqrt{3}$,此时有 $\varphi(\psi(x))=1$.

又当 $|x|<1$ 或 $|x|>\sqrt{3}$ 时,有 $|\psi(x)|>1$,于是 $\varphi(\psi(x))=0$. 于是

$$y=\varphi(\psi(x))=\begin{cases}1, & 1\leqslant|x|\leqslant\sqrt{3},\\ 0, & |x|<1\text{ 或 }|x|>\sqrt{3}.\end{cases}$$

【25】 定义在 R 上的狄利克雷函数为

$$D(x)=\begin{cases}1, & \text{当 } x \text{ 为有理数},\\ 0, & \text{当 } x \text{ 为无理数}\end{cases}$$

和定义在[0,1]上的黎曼函数为

$$R(x)=\begin{cases}\frac{1}{q}, & \text{当 } x=\frac{p}{q}\quad(p,q\in N_+,p,q\text{ 互质}),\\ 0, & \text{当 } x=0,1\text{ 和}(0,1)\text{内的无理数}.\end{cases}$$

试求 $D(R(x))$ 和 $R(D(x))$.

解 先求 $D(R(x))$. 因为 $R(x)$ 的值域包含在 D 的定义域中，于是 D 与 R 可以复合.

当 $x\in(0,1)$，$x=\dfrac{p}{q}$，p,q 为互质正整数，有 $R\left(\dfrac{p}{q}\right)=\dfrac{1}{q}$，而 $D\left(R\left(\dfrac{p}{q}\right)\right)=D\left(\dfrac{1}{q}\right)=1$.

当 x 为 0，1 或 $(0,1)$ 中无理数时，$R(x)=0$. 而 $D(0)=1$，因而 $D(R(x))\equiv1$，$x\in[0,1]$.

再讨论 $R(D(x))$. 因为 $D(x)$ 的值域仅有 $\{0,1\}$ 两点，包含于 $R(x)$ 的定义域中且 $R(0)=R(1)=0$，于是 $R(D(x))\equiv0$，$x\in R$.

【26】 求 $y=f(x)=\begin{cases}3-x^3, & x<-2,\\ 5-x, & -2\leqslant x\leqslant2,\\ 1-(x-2)^2, & x>2\end{cases}$ 的反函数 $f^{-1}(x)$.

解 当 $x=-2$ 时，$y=3-x^3$，$x=\sqrt[3]{3-y}$ 且 $y>3+8=11$；

当 $-2\leqslant x\leqslant2$ 时，$y=5-x$，$x=5-y$ 且 $3\leqslant y\leqslant7$；

当 $x>2$ 时，$y=1-(x-2)^2$，$x=2+\sqrt{1-y}$ 且 $y<1$；

所以 $y=f(x)$ 的值域为 $(-\infty,1)\cup[3,7]\cup(11,+\infty)$.

$y=f(x)$ 的反函数 $f^{-1}(x)=\begin{cases}2+\sqrt{1-x}, & x<1,\\ 5-x, & 3\leqslant x\leqslant7,\\ \sqrt[3]{3-x}, & x>11.\end{cases}$

§4. 具有某些特性的函数

1. 有界函数 设 f 为定义在 D 上的函数. 若存在数 $M(L)$，使得对每一个 $x\in D$ 有 $f(x)\leqslant M$ $(f(x)\leqslant L)$，则称 f 为 D 上的有上(下)界函数，$M(L)$ 称为 f 在 D 上的一个上(下)界. 若存在正数 K，使得对每一个 $x\in D$ 有 $|f(x)|\leqslant K$，则称 f 为 D 上的有界函数.

2. 单调函数 设 f 为定义在 D 上的函数. 若对 $\forall x_1,x_2\in D$，当 $x_1<x_2$ 时总有

(ⅰ) $f(x_1)\leqslant f(x_2)$ $(f(x_1)\geqslant f(x_2))$，则称 f 为 D 上的增(减)函数；

(ⅱ) $f(x_1)<f(x_2)$ $(f(x_1)>f(x_2))$，则称 f 为 D 上的严格增(严格减)函数.

增函数和减函数统称为单调函数，严格增函数和严格减函数统称为严格单调函数.

3. 奇函数和偶函数 设 D 为对称于原点的数集，f 为定义在 D 上的函数. 若对每一个 $x\in D$ 有 $f(-x)=-f(x)$ $(f(-x)=f(x))$，则称 f 为 D 上的奇(偶)函数.

4. 周期函数 设 f 为定义在数集 D 上的函数. 若存在 $\delta>0$，使得对一切 $x\in D$ 有 $f(x\pm\delta)=f(x)$，则称 f 为周期函数，δ 称为 f 的一个周期. 显然，若 δ 为 f 的周期，则 $n\delta$（n 为正整数）也是 f 的周期. 若在周期函数 f 的所有周期中有一个最小的正周期，则称此最小正周期为 f 的基本周期，或简称周期.

基本题型

讨论函数的有界性

【27】 证明 $f(x)=\dfrac{x}{x^2+1}$ 是 R 上的有界函数.